This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Stanford University Libraries
3 6105 001 021 117

MATHEMATISCHE ANNALEN.

IN VERBINDUNG MIT C. NEUMANN

BEGRÜNDET DURCH

RUDOLF FRIEDRICH ALFRED CLEBSCH.

Unter Mitwirkung der Herren

Prof. P. GORDAN zu Erlangen, Prof. C. NEUMANN zu Leipzig,
Prof. K. VONDERMÜHLL zu Leipzig

gegenwärtig herausgegeben

von

Prof. **Felix Klein** zu Leipzig und Prof. **Adolph Mayer** zu Leipzig.

XXI. Band.

Mit 3 lithographirten Tafeln.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1883.

LIBRARY OF THE
LELAND STANFORD JR. UNIVERSITY.
Q 28216

Inhalt des einundzwanzigsten Bandes.

(In alphabetischer Ordnung).

Seite

Appell, in Paris. Développements en série d'une fontion holomorphe dans une aire limitée par des arcs de cercle 118

du Bois-Reymond, in Tübingen. Ueber den Gültigkeitsbereich der Taylor'schen Reihenentwicklung 109

—— Zusatz zu dem Aufsatze „Ueber den Gültigkeitsbereich der Taylor'schen Reihenentwicklung" 253

—— Ueber den Despeyrous'schen Multiplicator der elliptischen Differentialgleichung 255

Cantor, in Halle a. S. Ueber unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten. 4. Fortsetzung des Artikels in Bd. XX, pag. 113. 51

—— Ueber unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten. 5. Fortsetzung . 545

Enneper, in Göttingen. Bemerkungen über einige Transformationen von Flächen 267

Gierster, in Bamberg. Ueber Relationen zwischen Klassenzahlen binärer quadratischer Formen von negativer Determinante. (Erste Abhandlung) 1

Harnack, in Dresden. Anwendung der Fourier'schen Reihe auf die Theorie der Functionen einer complexen Veränderlichen 305

Kantor, in Prag. Ueber eine Configuration $(3, 3)_{10}$ und unicursale Curven. (Auszug aus einem Schreiben an Herrn A. Brill in München) 299

Klein, in Leipzig. Neue Beiträge zur Riemann'schen Functionentheorie. (Mit 2 lithographirten Tafeln) 141

König, in Budapest. Beiträge zur Theorie der algebraischen Gleichungen 424

Königsberger, in Wien. Bemerkung zur Form algebraischer Integrale linearer Differentialgleichungen 454

Lindemann, in Freiburg i. Br. Ueber die Hesse'sche Covariante einer binären algebraischen Form fünfter Ordnung 71

Lüroth, in München. Ueber eine eindeutige Entwickelung von Zahlen in eine unendliche Reihe 411

Meissel, in Kiel. Ueber Primzahlmengen. 304

Meyer, in Tübingen. Ueber Apolarität und rationale Curven. 125

—— Eine neue canonische Form von Gruppen binärer Formen 434

—— Ein Satz über lineare Identitäten zwischen Quadraten binärer Formen 441

—— Ein neues Uebertragungsprincip für binäre Formen, deren Ordnungszahl eine nicht prime ist 528

Seite

Noether, in Erlangen. Nachtrag zur „Note über die algebraischen Curven mit einer Schaar eindeutiger Transformationen in sich." (Diese Ann. XX, p. 59) 138

—— Ueber eine Fläche 6^{ter} Ordnung vom Flächengeschlecht — 1. 399

Pringsheim, in München. Ueber die Multiplication bedingt convergenter Reihen 327

Rausenberger, in Frankfurt a. M. Ueber eindeutige Functionen mit mehreren nicht vertauschbaren Perioden. II. 59

Schur, in Leipzig. Ueber einen das System zweier Flächen 2. Grades betreffenden Satz und einen damit verbundenen Strahlencomplex 2. Grades 515

Staude, in Breslau. Ueber geodätische Polygone auf den Flächen 2. Grades. (Mit 1 lithographirten Tafel) 219

Sturm, in Münster i. W. Ein Analogon zu Gauss' Satz von der Krümmung der Flächen. 379

—— Ueber den integrirenden Factor der elliptischen Differentialgleichung . 446

—— Ueber die Curven auf der allgemeinen Fläche dritter Ordnung 457

Wiltheiss, in Halle a. S. Ueber die complexe Multiplication hyperelliptischer Functionen zweier Argumente 385

Ueber Relationen zwischen Klassenzahlen binärer quadratischer Formen von negativer Determinante.

(Erste Abhandlung).

Von

Joseph Gierster in Bamberg.

Vorbemerkung.

Die vorliegende Arbeit enthält die Darstellung eines Theiles jener Untersuchungen, welche ich vor drei Jahren auf Anregung F. Klein's angestellt habe und deren Ergebnisse durch zwei Noten in den „Göttinger Nachrichten vom 4. Juni 1879" und in den „Sitzungsberichten der Münchener Akademie, Sitzung vom 7. Februar 1880", mitgetheilt*) sind.

Der erste Abschnitt der Arbeit beschäftigt sich mit den Klein'schen Modularcorrespondenzen, welche für das „volle System ausgezeichneter Congruenzmoduln der q^{ten} Stufe," wo q eine Primzahl > 2 ist, statthaben, wobei jedoch die Beschränkung gemacht ist, dass der Transformationsgrad n nicht durch q theilbar sein soll. Aus diesen Correspondenzen werden in Abschnitt II die linken Seiten der Klassenzahlrelationen der q^{ten} Stufe allgemein für ein durch q nicht theilbares n abgeleitet. Den Schluss bildet die Aufstellung der entsprechenden fertigen Formeln der 3. und 5. Stufe.

I. Abschnitt.

Ueber Modulargleichungen bez. Modularcorrespondenzen von primzahliger Stufe.

§ 1.

Die rationale absolute Invariante des elliptischen Integrales erster Gattung.

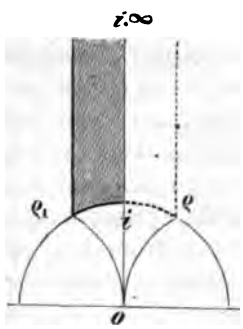
Die rationale Invariante J des elliptischen Integrales erster Gattung als Function des Periodenverhältnisses ω aufgefasst, hat die fundamentale Eigenschaft**), bei allen Substitutionen von ω in

*) Beide Noten sind in den Mathem. Annalen Bd. XVII, p. 71 ff. abgedruckt.

**) Ich verweise in Betreff der hier einschlägigen Litteratur auf die Arbeit von Hurwitz: „Grundlagen einer independenten Theorie der elliptischen Modulfunctionen etc." in den Mathem. Annalen Bd. XVIII, p. 528 ff.

$$\omega' = \frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta},$$

wo α, β, γ, δ ganze Zahlen der Determinante $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ sind, und nur bei diesen ungeändert zu bleiben. Diese Substitutionen bilden eine Gruppe, welche die „*zur Invariante $J(\omega)$ gehörige Gruppe*" heisst. Zahlen ω, welche durch Substitutionen dieser Gruppe aus einander hervorgehen, heissen *äquivalente Zahlen* und die Gesammtheit aller nichtäquivalenten Werthe ω kann bei geometrischer Deutung der complexen Variablen ω in „*das Fundamentaldreieck*" eingeschlossen werden. Letzteres ist von 2 geraden Linien, die zur Axe der rein imaginären Zahlen in den Abständen $+\frac{1}{2}$ und $-\frac{1}{2}$ parallel laufen, und einem Kreise begrenzt, der mit dem Radius 1 um den Nullpunkt beschrieben ist (siehe die nebenstehende Figur). Jedoch soll vom Rande der Figur nur die eine Hälfte etwa die linke, welche in der Figur schärfer gezeichnet ist, zum Dreieck gerechnet werden. Es gehen nämlich die beiden geradlinigen Begrenzungen durch die Substitution $\omega' = \omega + 1$, bez. $\omega' = \omega - 1$ aus einander hervor, ebenso die beiden Kreisbögen $i\varrho$ und $i\varrho_1$ durch $\omega' = -\frac{1}{\omega}$. Daher sind immer je zwei Punkte des ganzen Randes nebenstehender Figur zu einander äquivalent mit Ausnahme der Punkte $\omega = i\infty$ und $\omega = i$, welche bei den genannten Substitutionen in sich übergehen.



Unter der eben angeführten Beschränkung können zwei Punkte des Fundamentaldreiecks zu einander nie äquivalent sein, während jeder Punkt ausserhalb des Dreiecks einen zum Dreieck gehörigen äquivalenten Punkt besitzt.

Das Fundamentaldreieck wird durch die Axe der imaginären Zahlen in zwei kleinere Dreiecke „Elementardreiecke" zerlegt. In unserer Figur ist das eine dieser Dreiecke schraffirt.

Das Fundamentaldreieck geht durch Spiegelung an seinen Seiten nach dem Gesetze der reciproken Radien, entsprechend den Substitutionen der zu J gehörigen Gruppe in unendlich viele andere Kreisbogendreiecke über, von denen ebenfalls jedes in zwei Elementardreiecke, ein schraffirtes und ein nichtschraffirtes, zerlegt ist und welche in ihrer Gesammtheit die ganze positive ω-Halbebene einfach und lückenlos überdecken. Jedes der so entstandenen Kreisbogendreiecke besitzt die Eigenschaften des Fundamentaldreiecks.

Im Hinblick auf die eingangs in Bezug auf J angeführte Eigenschaft ergiebt sich nunmehr, *dass $J(\omega)$ gerade einmal seine ganze Ebene beschreibt, wenn ω über eines der ebenconstruirten Kreisbogendreiecke,*

speciell über das Fundamentaldreieck sich bewegt und zwar wird nach F. Klein J seine positive oder negative Halbebene beschreiben, je nachdem ω über die schraffirte oder nichtschraffirte Hälfte des letztgenannten Dreiecks sich ausbreitet. —

Auch in der Theorie der binären quadratischen ganzzahligen Formen von negativer Determinante spielt das Fundamentaldreieck eine sehr wichtige Rolle. Dort werden alle jene (unendlich vielen) Formen

$$P\omega_1^2 + Q\omega_1\omega_2 + R\omega_2^2,$$

welche aus einander durch ganzzahlige Substitutionen

$$\omega_1' = \alpha\omega_1 + \beta\omega_2,$$
$$\omega_2' = \gamma\omega_1 + \delta\omega_2$$

von der Determinante 1 hervorgehen, zu einer *Klasse von Formen* zusammengefasst. Insbesondere nennt man nach Gauss*) diejenigen Formen, deren Verschwindungspunkte mit positivem imaginären Bestandtheile in dem eben beschriebenen Fundamentaldreiecke liegen, *reducirte quadratische Formen.* Jede Klasse quadratischer Formen von negativer Determinante besitzt eine und nur eine solche reducirte Form, welche daher als Repräsentant der ganzen Klasse von Formen aufgefasst werden kann.

§ 2.

Die Modulargleichungen der rationalen absoluten Invariante J.

Ersetzt man ω durch

$$\omega' = \frac{a\omega + b}{c\omega + d}, \tag{1}$$

wo a, b, c, d ganze Zahlen ohne gemeinsamen Theiler sind, welche die Bedingung:

$$ad - bc = n$$

erfüllen, so bezeichnet man dies als *Transformation n^{ter} Ordnung von ω.* Die Gesammtzahl aller transformirten Werthe ω' liefert nur eine endliche Anzahl von Werthen, welche unter einander nicht äquivalent sind. Diese Anzahl ist:

$$N = n \cdot \Pi\left(1 + \frac{1}{p}\right),$$

wo das Product rechter Hand sich über alle von einander verschiedenen Primzahlen p von n hinerstreckt.

Man beweist dies am einfachsten dadurch, dass man wirklich N verschiedene ω-Werthe, „*Repräsentanten*" genannt, hinschreibt, zu

*) Disquisitiones arithmeticae art. 171.

welchen alle Zahlen ω' äquivalent sind. Als solche Repräsentanten werden gewöhnlich folgende hingestellt:

$$\Omega_{A,B} = \frac{A\omega + B}{D}, \tag{2}$$

wo A alle Theiler von n beschreibt, $D = \frac{n}{A}$ ist, und B jedesmal alle Reste mod. D bedeutet, welche zum grössten Theiler T von A und D relativ prim sind. In der That wird

$$\omega' = \frac{a\omega + b}{c\omega + d} \quad \text{in} \quad \frac{A\omega + B}{D}$$

übergeführt durch die Substitution

$$\frac{\frac{Ad - Bc}{n}\omega' - \frac{Ab - Ba}{n}}{-\frac{cD}{n}\omega' + a \cdot \frac{D}{n}}. \tag{3}$$

Offenbar kann aber von einer Aequivalenz nur dann die Rede sein, wenn diese Substitution*) der zu J gehörigen Gruppe (§ 1) angehört, d. h. wenn sie ganzzahlig ist. Dies ist nur dann der Fall, wenn

1) A der grösste Theiler von a und c mit n ist und

2) B den beiden Congruenzen

$$\begin{aligned} \frac{a}{A} B &\equiv b \bmod. D, \\ \frac{c}{A} B &\equiv d \bmod. D \end{aligned} \tag{4}$$

genügt.

Die letzten beiden Congruenzen haben aber immer eine und nur eine Lösung; denn einerseits ist die Determinante

$$\frac{a}{A} d - b \cdot \frac{c}{A} = D \equiv 0 \bmod. D$$

und andererseits sind $\frac{a}{A}$, $\frac{c}{A}$ zu D relativ prim (wegen 1).

Endlich ist auch B zum grössten Theiler T von A und D relativ prim, da sonst a, b, c, d einen gemeinsamen Theiler haben würden, was der Voraussetzung widerspricht. Also ist jede Grösse ω' zu einem ganz bestimmten der angegebenen Repräsentanten äquivalent. —

Aus diesem Umstande entstehen die Modulargleichungen der absoluten Invariante. Bezeichnet man nämlich die N Grössen

$$J' = J\left(\frac{A\omega + B}{D}\right)$$

der Reihe nach mit

$$J_1', J_2', \cdots, J_N',$$

während $J(\omega) = J$ gesetzt wird, so sind diese N Werthe J' die Wurzeln einer algebraischen Gleichung N^{ten} Grades

*) Die Substitution hat die Determinante 1.

$$f(J', J) = 0,$$

deren Coefficienten rationale Functionen von J sind. Diese Coefficienten bleiben nämlich als symmetrische Functionen der J' bei allen Transformationen der zu J gehörigen Gruppe ungeändert.

Zugleich erkennt man, dass diese Gleichung $f(J', J) = 0$ ungeändert bleibt, wenn man J und J' mit einander vertauscht. In der That geht ω aus ω' hervor durch die Transformation n^{ter} Ordnung

$$\omega = \frac{d\omega' - b}{-c\omega' + a}.$$

In einer anderen Weise werden die Repräsentanten von Herrn F. Klein aufgefasst. Seine Formulirung des Transformationsproblems schliesst die Irreductibilität der entstehenden Modulargleichung von vorneherein in sich ein. An Stelle der Zahlen $\frac{\alpha\omega + b}{c\omega + d}$ werden nämlich hier nur die Zahlen

$$\frac{1}{n} \cdot \frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta}$$

betrachtet, wo $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ganze Zahlen der Determinante $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ sind. Dem entsprechend erscheinen auch die N Repräsentanten*) unter der bezeichneten Form. Die N in ihnen enthaltenen linearen Substitutionen von ω in $\frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta}$ führen das Fundamentaldreieck in N andere über, welche sich bei passender Wahl dieser Substitutionen möglichst symmetrisch an einander anlegen und in ihrer Gesammtheit ein zusammenhängendes Polygon bilden, das „*Fundamentalpolygon der Transformation n^{ter} Ordnung.*“

Es erübrigt noch, die Verzweigungen der aufgestellten Gleichung $f(J', J) = 0$ anzuführen. Solche können**) nur bei $J = 0, 1, \infty$ eintreten und zwar hängen bei $J = 0$ alle Blätter mit Ausnahme von ε_0 zu je 3, bei $J = 1$ alle mit Ausnahme von ε_1 zu je 2 zusammen.

Die ε_0 resp. ε_1 exceptionellen Blätter verlaufen in diesen Punkten einfach. Hierbei bedeuten ε_0 und ε_1 die Anzahlen der verschiedenen in n enthaltenen Factoren $a + b\varrho$ und $a + bi$, wenn alle jene Factoren als dieselben angesehen werden, welche durch Multiplication mit $\pm\varrho$, $\pm\varrho^2$, ± 1, beziehungsweise $\pm i$, ± 1 aus einander hervorgehen. Die Bedeutungen von ϱ und i sind:

$$\varrho = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3}, \quad i = \sqrt{-1}.$$

Die Verzweigung im Punkte $J = \infty$ ergiebt sich aus der Bemerkung, dass J eine Umkreisung dieses Punktes macht, wenn ω um die Einheit

*) Auch diese Repräsentanten sind durch die obigen Bedingungen (4) charakterisirt.

**) Hurwitz, l. c.

zunimmt. Die ω-Repräentanten $\Omega_{A,B}$ lassen daher unmittelbar erkennen, dass jedem Factor A von n $\varphi(T)$ Cyklen von $\frac{D}{T}$ Blättern entsprechen, wo $A \cdot D = n$, T der grösste Theiler von A und D ist und $\varphi(T)$ die Anzahl der zu T relativen Reste modulo T bedeutet.

§ 3.

Das System der ausgezeichneten Congruenzmoduln der q^{ten} Stufe.

Die von F. Klein*) entworfene allgemeine Theorie der elliptischen Modulfunctionen schliesst sich den Betrachtungen an, welche in § 1 dargelegt sind. Diese Theorie beschäftigt sich in erster Linie mit den Untergruppen der zu J gehörigen Gruppe. Im Anschlusse hieran werden algebraische Functionen von ω betrachtet, welche ungeändert bleiben, wenn man auf ω die Substitutionen jener Untergruppe anwendet. Letztere Functionen werden *elliptische Modulfunctionen* im allgemeinsten Sinne genannt. Insbesondere werden unter *Congruenzmoduln* solche verstanden, deren zugehörige Gruppe eine Congruenzgruppe d. h. eine solche Gruppe ist, deren Substitutionen

$$\omega' = \frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta}$$

durch gewisse Congruenzen für $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ modulo m charakterisirt werden können, wo m eine positive ganze Zahl ist. Ist die Zahl m der kleinste Zahlenmodul von dieser Eigenschaft, so heisst sie *die Stufe* der Congruenzgruppe oder des Congruenzmoduls. Zahlen ω, welche durch die Substitutionen der Gruppe aus einander hervorgehen, heissen *relativ äquivalent.*

Es giebt eine besonders wichtige Gruppe der m^{ten} Stufe, welche durch folgende Congruenzen definirt ist:

$$\alpha : \beta : \gamma : \delta \equiv 1 : 0 : 0 : 1 \text{ mod. } m,$$
$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1.$$

Die Wichtigkeit dieser Congruenzgruppe**) der m^{ten} Stufe liegt darin, dass sie Untergruppe einer jeden anderen Congruenzgruppe der m^{ten} Stufe**) ist. Ausserdem ist sie eine *ausgezeichnete Untergruppe* der zu J gehörigen Gruppe, d. h. sie ist mit allen Substitutionen der letzten Gruppe vertauschbar. Ist m eine Primzahl q — und dies soll von jetzt an immer vorausgesetzt werden, — so ist diese Gruppe die einzige ausgezeichnete Congruenzgruppe der genannten Stufe.

*) Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften zu München, vom 6. Dec. 1879 oder Math. Annalen Bd. XVII, pag. 62 ff. Blosse Citate auf Seitenzahlen beziehen sich immer auf diese letztere Publication.

**) Hurwitz: Grundlagen etc. pag. 541.

Im Hinblick auf diese ausgezeichnete Congruenzgruppe der q^{ten} Stufe werden 2 Substitutionen

$$\omega' = \frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta} \quad \text{und} \quad \omega' = \frac{\alpha'\omega + \beta'}{\gamma'\omega + \delta'}$$

modulo q zu einander congruent genannt, wenn sie auseinander durch eine Substitution jener Gruppe hervorgehen, d. h. wenn die Bedingungen:

$$\alpha : \beta : \gamma : \delta \equiv \alpha' : \beta' : \gamma' : \delta' \text{ mod. } q$$

stattfinden.

Die Gesammtheit aller Substitutionen der zu J gehörigen Gruppe ist dann modulo q zu $r = \frac{q(q^2-1)}{2}$ Substitutionen congruent. Sind diese r Substitutionen passend gewählt, so führen sie das Fundamentaldreieck in $r - 1$ weitere Invariantendreiecke (§ 1) über, die sich mit dem Fundamentaldreieck selbst zu einem geschlossenen Polygon von $2r$ „Elementardreiecken" zusammensetzen. Dieses Polygon heisst *das zur Congruenzgruppe der q^{ten} Stufe gehörige Fundamentalpolygon.**) Es geht durch die Substitutionen dieser Gruppe in unendlich viele Polygone über, welche die ganze positive Halbebene einfach und lückenlos überdecken. Die Wichtigkeit dieser Polygone beruht darauf, dass jedem ω-Werthe ein und nur ein Punkt eines solchen Polygons relativ äquivalent ist.

Man kann nun zu dieser Gruppe q^{ter} Stufe *ein vollständiges System von ν ausgezeichneten Moduln*

$$\mu_1(\omega) = \frac{M_1(\omega)}{M_{\nu+1}(\omega)}; \quad \mu_2(\omega) = \frac{M_2(\omega)}{M_{\nu+1}(\omega)}; \cdots; \mu_\nu(\omega) = \frac{M_\nu(\omega)}{M_{\nu+1}(\omega)}\text{ **)},$$

welche durch $\nu - 1$ Gleichungen an einander gebunden sind, so wählen, dass dasselbe für zwei verschiedene Werthe ω_1 und ω_2 dann und nur dann das gleiche Werthsystem $M_1 : M_2 : M_3 : \cdots : M_{\nu+1}$ annimmt, wenn diese zwei Werthe zu einander relativ äquivalent sind, und dass ferner die r Werthsysteme desselben, welche einem gegebenen Werthe von $J(\omega_1)$ entsprechen und welche man erhält, wenn man auf ω_1 gerade r modulo q zu einander nicht congruente Substitutionen,

$$\omega' = \frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta}$$

anwendet, durch lineare Transformationen aus einem unter ihnen hervorgehen.***)

---

*) Ausführliches über dieses Fundamentalpolygon giebt die Arbeit von Herrn Dyck in den Mathem. Annalen Bd. XVIII, pag. 507.

**) Diese Quotienten werden eingeführt, um homogene Gleichungen zu erhalten.

***) pag. 65.

Diese r linearen Transformationen der M bilden eine *Gruppe* Γ vom Grade $r = \frac{q(q^2-1)}{2}$, welche zur Galois'schen *Gruppe* G der Modulargleichungen der Transformation q^{ter} Ordnung der absoluten Invariante J holoedrisch isomorph ist.

Wie schon gesagt wurde, entsprechen im allgemeinen jedem Werthe J gerade $\frac{q(q^2-1)}{2}$ Werthsysteme der ausgezeichneten Moduln $\mu_1, \mu_2, \cdots \mu_r$. Ausnahmen finden nur für $J = \infty$, 0, 1 statt. Diesen Werthen entsprechen bez. nur $\frac{q^2-1}{2}$, $\frac{q(q^2-1)}{6}$ und $\frac{q(q^2-1)}{4}$ verschiedene Werthsysteme jener Moduln, welche kurz Punkte a, Punkte b und Punkte c genannt werden sollen. In den entsprechenden Punkten des Fundamentalpolygons treffen je q, je 3 oder je 2 Invariantendreiecke zusammen. Die Ecken a werden zweckmässig durch die $\frac{q^2-1}{2}$ Symbole

$$\left[\frac{\tau}{\varrho}\right]$$

dargestellt, wo ϱ die Werthe $0, 1, 2, \cdots, \frac{q-1}{2}$ hat und τ im Falle $\varrho = 0$ die Zahlen $1, 2, \cdots, \frac{q-1}{2}$, in jedem anderen Falle dagegen die Zahlen $0, 1, 2, \cdots, q-1$ beschreibt.

Ferner bemerkt man, dass jeder Punkt a bei einem und nur bei einem Cyklus Γ_q*) von Substitutionen der Gruppe Γ, ebenso ein Punkt b nur bei einem Cyklus Γ_3, ein Punkt c nur bei einer Γ_2 festbleibt. Da aber die $q+1$ in der Gruppe Γ enthaltenen Cyklen Γ_q, ebenso die $\frac{q(q\pm1)}{2}$ Cyklen Γ_3 und die $\frac{q(q\pm1)}{2}$ Cyklen Γ_2 alle unter sich gleichberechtigt sind, so ergiebt sich der Satz:

Bei den Substitutionen einer Γ_q bleiben immer $\frac{q-1}{2}$ Punkte a, bei den Substitutionen einer Γ_3 $\frac{q\mp1}{3}$ Punkte b, bei jeder Substitution der Periode 2 aber bleiben $\frac{q\mp1}{2}$ Punkte c fest, je nachdem $q \equiv 1$ oder -1 mod. 3, bez. $\equiv 1$ oder -1 mod. 4 ist.

§ 4.

Die Modulargleichungen bez. Modularcorrespondenzen des ausgezeichneten Modulsystems der q^{ten} Stufe.

Dieser Paragraph beschäftigt sich mit dem *Transformationsprobleme***) der ausgezeichneten Congruenzgruppe der q^{ten} Stufe und des dazu gehörigen vollen Modulsystems. Indess sei in Betreff des Trans-

*) Der Index giebt die Ordnung der Gruppe an.

**) pag. 66.

formationsgrades n die Einschränkung getroffen, dass n zu q relativ prim sei.

In allgemeinster Weise ist hier das Transformationsproblem definirt durch die Gleichung

$$\omega' = \frac{a\omega + b}{c\omega + d}, \tag{1}$$

wo a, b, c, d ganze Zahlen der Determinante $ad - bc = n$ sind. Um alle Substitutionen der Form (1) zu finden, welche demselben ω entsprechen, hat man auf ω in Gleichung (1) alle Substitutionen der ausgezeichneten Congruenzgruppe der q^{ten} Stufe anzuwenden, d. h. alle Substitutionen

$$\omega_1 = \frac{(1 + \mu q)\omega + \nu q}{\varrho q \omega + (1 - \mu q)},$$

wo μ, ν, ϱ ganze Zahlen der Eigenschaft $\mu^2 + \nu\varrho = -1$ sind. Dies liefert aber offenbar alle ganzzahligen Substitutionen

$$\omega' = \frac{a'\omega + b'}{c'\omega + d'}, \tag{2}$$

wo a', b', c', d' ganze Zahlen der Determinante n sind, welche ausserdem den Congruenzen

$$a' : b' : c' : d' = a : b : c : d \bmod. q$$

genügen.

Hieraus folgt der Satz:

Es giebt $\frac{q(q^2-1)}{2}$ *verschiedene Modulargleichungen oder Modularcorrespondenzen zwischen den Moduln:*

$$\mu_1 = \mu_1(\omega),\ \mu_2 = \mu_2(\omega),\ \cdots,\ \mu_\nu = \mu_\nu(\omega)$$

und den Moduln:

$$\mu_1' = \mu_1(\omega');\ \mu_2' = \mu_2(\omega'), \cdots, \mu_\nu' = \mu_\nu(\omega').$$

Es giebt nämlich $\frac{q(q^2-1)}{2}$ verschiedene Lösungssysteme

$$a : b : c : d \bmod. q$$

der Congruenz

$$ad - bc \equiv n \bmod. q.$$

Durch jede solche Lösung aber wird eine Correspondenz erhalten. Wir können daher diese Correspondenzen passend durch die Congruenzen

$$\omega' \equiv \frac{a\omega + b}{c\omega + d} \bmod. q \tag{3}$$

$$ad - bc \equiv n$$

von einander unterscheiden.

Weiterhin erkennt man:

Diese $\frac{q(q^2-1)}{2}$ *Modularcorrespondenzen zwischen den* M *und den* M′ *gehen aus einer dadurch hervor, dass man die* M *fest lässt, die* M′

dagegen den $\frac{q(q^2-1)}{2}$ *linearen Substitutionen der Gruppe* Γ *unterwirft oder umgekehrt.*

In der That geht ja die erstere der beiden Correspondenzen

$$\omega' \equiv \frac{a\omega+b}{c\omega+d} \text{ mod. } q,$$

$$\omega'' \equiv \frac{a'\omega+b'}{c'\omega+d'} \text{ mod. } q$$

in die letztere derselben über, wenn man auf ω' die Substitution

$$\omega'' \equiv \frac{\frac{a'd-b'c}{n}\omega+\frac{ab'-a'b}{n}}{\frac{c'd-cd'}{n}\omega+\frac{ad'-bc'}{n}} \text{ mod. } q \tag{4}$$

der zu Γ isomorphen Gruppe G anwendet. Substitutionen der Determinante 1, welche zu jener letztgenannten Substitution modulo q congruent sind, giebt es hier immer, da ja $n \gtrless 0$ mod. q angenommen wurde. Eine solche Substitution führt aber alle Zahlen

$$\omega' = \frac{a\omega+b}{c\omega+d} \quad (ad-bc=n),$$

welche zur ersten Correspondenz gehören, in alle Zahlen

$$\omega' = \frac{a'\omega+b'}{c'\omega+d'} \quad (a'd'-b'c'=n)$$

über, welche zur zweiten gehören. —

Wir wollen jetzt für die Modularcorrespondenz (3) in ähnlicher Weise *ω-Repräsentanten* aufstellen, wie dies in § 2 für die Modulargleichungen geschehen ist. Hierzu verwenden wir die Grössen

$$S(\Omega_{A,B}) = \frac{\alpha\Omega_{A,B}+\beta}{\gamma\Omega_{A,B}+\delta} \tag{5}$$

wo α, β, γ, δ 4 ganze Zahlen der Determinante 1 sind, welche den Congruenzen:

$$\alpha : \beta : \gamma : \delta \equiv \frac{a}{A} : \frac{b}{D} : \frac{c}{A} : \frac{d}{D} \text{ mod. } q$$

genügen. Dabei bedeutet $\Omega_{A,B}$ die Grösse

$$\Omega_{A,B} = \frac{A\omega+Bq}{D},$$

wo A alle Theiler von n beschreibt, $D = \frac{n}{A}$ ist und B alle zum grössten gemeinsamen Theiler T von A, D relativ primen Reste mod. D beschreibt. Die Grössen α, β, γ, δ sind natürlich möglichst einfach zu wählen.

Man überzeugt sich durch eine Substitution S in § 1 leicht, dass jede Substitution, die in Gleichung (1) dieses Paragraphen enthalten

ist, einem und nur einem ω-Repräsentanten relativ äquivalent ist, dass ferner die Zahl der letzteren wieder durch

$$N = n\Pi\left(1 + \frac{1}{p}\right)^{*})$$

dargestellt ist. Den N Werthsystemen der transformirten Modulu $\mu_1', \mu_2', \cdots, \mu_\nu'$, welche demselben Werthsystem der ursprünglichen Moduln $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_\nu$ entsprechen (und umgekehrt), sind diese ω-Repräsentanten in ein-eindeutiger Weise zuzuordnen.

Den ebengenannten Repräsentanten, welche ich *„zur Ecke* $\left(\frac{1}{0}\right)$ *gehörig"* bezeichne, stelle ich noch andere Repräsentanten an die Seite, welche *zu den Ecken* $\left(\frac{\tau}{\varrho}\right)$ des ursprünglichen Modulsystems gehören und welche man erhält, wenn man in $\mu_1(\omega), \cdots$ und $\mu_1'(\omega) = \mu_1\left(\frac{a\omega+b}{c\omega+d}\right)$ an Stelle von ω die Grösse $\frac{\tau\omega+\sigma}{\varrho\omega+\nu}$ setzt, wo $\tau, \sigma, \varrho, \nu$ ganze Zahlen der Determinante 1 sind. Sie sind

$$\frac{\tau'\Omega_{A,B}+\sigma'}{\varrho'\Omega_{A,B}+\nu'}, \tag{6}$$

wo $\tau', \sigma', \varrho', \nu'$ wieder ganze Zahlen der Determinante 1 sind, welche den Bedingungen:

$$\tau' : \sigma' : \varrho' : \nu' \equiv \frac{a\tau+b\varrho}{A} : \frac{a\sigma+b\nu}{D} : \frac{c\tau+d\varrho}{A} : \frac{c\sigma+d\nu}{D} \text{ mod. } q \tag{7}$$

genügen.

Hieraus ergiebt sich auch leicht das Resultat, dass Verzweigungen der Moduln μ' in Bezug auf die Moduln μ nur für die Punkte a eintreten, und zwar entsprechen jeder Ecke $\left(\frac{\tau}{\varrho}\right)$ der μ für jede Zerlegung $n = A \cdot D$ genau $\varphi(T)$ Cyklen von $\frac{D}{T}$ Blättern. Dieselben vertheilen sich aber auf verschiedene Ecken $\left(\frac{\tau'}{\varrho'}\right)$ der μ'. Die Zahl dieser verschiedenen Ecken $\frac{\tau'}{\varrho'}$ ist nach den Gleichungen (6) und (7) der Anzahl der modulo q verschiedenen Werthe A^2 gleich, wenn A alle Theiler von n beschreibt.

§ 5.

Die simultanen linearen Substitutionen der Modularcorrespondenzen in sich.

Die Modularcorrespondenzen des § 4 *gehen durch* $\frac{q(q^2-1)}{2}$ *simultane Substitutionen der* M *und* M′ *in sich über.* Jeder Substitution Σ der

*) Diese Repräsentanten sind denen, welche bei den Modulargleichungen zwischen J und J' auftreten, eindeutig zugeordnet.

Grössen M aus der Gruppe Γ entspricht eine andere Substitution Σ' der Grössen M' und umgekehrt.

Dies folgt einfach daraus, dass die Congruenz

$$\omega' \equiv \frac{\omega}{n} \text{ mod. } q,$$

welche eine der $\frac{q(q^2-1)}{2}$ Correspondenzen charakterisirt, in sich übergeht, wenn man gleichzeitig auf ω und ω' die simultanen Substitutionen

$$S \equiv \frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta} \text{ mod. } q,$$

$$S' \equiv \frac{\alpha\omega+\frac{\beta}{n}}{\gamma n\omega+\delta} \text{ mod. } q$$

der Gruppe G anwendet, wobei $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ beliebige Zahlen der Determinante 1 sein können. Den Substitutionen S und S' der Gruppe G entsprechen aber Substitutionen Σ und Σ' der Gruppe Γ und diese lassen, simultan angewendet, die Correspondenz ungeändert. Was aber für eine der $\frac{q(q^2-1)}{2}$ Correspondenzen bewiesen ist, gilt für alle, da sie aus jener abgeleitet werden, indem man die M fest lässt, auf die M' dagegen die $\frac{q(q^2-1)}{2}$ Substitutionen der Gruppe Γ anwendet.

Für die allgemeine Correspondenz

$$\omega' \equiv \frac{a\omega+b}{c\omega+d} \text{ mod. } q$$

sind die simultanen ω-Substitutionen definirt durch

$$(1) \qquad \begin{aligned} S &\equiv \frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta} \text{ mod. } q, \\ S' &\equiv USU^{-1} \text{ mod. } q, \end{aligned}$$

wobei

$$U \equiv \frac{\frac{a}{\sqrt{n}}\omega+\frac{b}{\sqrt{n}}}{\frac{c}{\sqrt{n}}\omega+\frac{d}{\sqrt{n}}} \text{ mod. } q$$

zu setzen ist. Diese Substitution U gehört der Gruppe G selbst nur an, wenn n quadratischer Rest mod. q ist. Ist n quadratischer Nichtrest, so gehört sie einer Gruppe von $q(q^2-1)$ Substitutionen an, welche als Gruppe der Modulargleichung $f(J', J) = 0$ der Transformation q^{ter} Ordnung ohne Adjunction von $\sqrt{(-1)^{\frac{q-1}{2}} \cdot q}$ aufzufassen ist. —

Ferner erkennt man, *dass die Modularcorrespondenz, welche durch*

$$\omega' \equiv \frac{a\omega+b}{c\omega+d} \text{ mod. } q$$

dargestellt ist, in sich übergeht, wenn man die Grössen μ_ϱ' an Stelle der Grössen μ_ϱ setzt, die alten Grössen μ_ϱ' aber gleichzeitig durch gewisse lineare Combinationen der μ_ϱ ersetzt. Diese linearen Combinationen gehen aus den ursprünglichen Werthen μ_ϱ hervor, wenn man auf dieselben jene Substitution der Gruppe Γ anwendet, welche der Substitution

$$U^2 \text{ mod. } q$$

der Gruppe G entspricht.

Hat speciell U die Periode 2, d. h. ist $a + d \equiv 0$ modulo q dann (und nur dann) geht die Correspondenz durch gegenseitige Vertauschung der Grössen μ und μ' in sich selbst über.

In der That geht ja die Congruenz

$$\omega' \equiv \frac{a\omega + b}{c\omega + d} \text{ mod. } q$$

in

$$\omega_1' \equiv \frac{a\omega_1 + b}{c\omega_1 + d} \text{ mod. } q$$

über, wenn man $\frac{a\omega + b}{c\omega + d}$ durch ω_1 ersetzt, gleichzeitig aber ω der Substitution U^2 mod. q unterwirft.

§ 6.

Eine besondere Gruppe von simultanen Substitutionen der Modularcorrespondenzen in sich.

Von besonderem Interesse sind hier diejenigen unter den $\frac{q(q^2-1)}{2}$ simultanen Substitutionen der Modularcorrespondenzen q^{ter} Stufe in sich, *bei denen zugleich auch die Correspondenz*

$$\mathsf{M}_1 : \mathsf{M}_2 : \cdots \mathsf{M}_{\nu+1} = \mathsf{M}_1' : \mathsf{M}_2' : \cdots \mathsf{M}_{\nu+1}'$$

ungeändert bleibt. Offenbar bilden diese Substitutionen eine in der Gruppe Γ enthaltene Untergruppe.

Wir finden diese Substitutionen wieder durch Betrachtung der zugehörigen Substitutionen der Gruppe G. Die Congruenz

$$(1) \qquad \left.\begin{aligned} \omega' &\equiv \frac{a\omega + b}{c\omega + d} \\ ad - bc &\equiv n \end{aligned}\right\} \text{ mod. } q$$

geht durch die simultanen Substitutionen S und $S' \equiv USU^{-1}$ mod. q von ω bez. ω' in sich über. Diese Transformation der Congruenz (1) in sich ist eine besondere, wenn

$$S' \equiv S \text{ mod. } q$$

wird, d. h., wenn die Bedingung

$$(2) \qquad USU^{-1} \equiv S$$

oder

$$S^{-1}US \equiv U \bmod. q$$

erfüllt ist.

Die Zahl der Substitutionen der Gruppe G, welche diese Bedingung erfüllen, lässt sich aber leicht bestimmen. Gehört U zur Gruppe G, d. h. ist n quadratischer Rest modulo q, dann ist die Aufgabe ohnehin schon erledigt*). Die Substitution S muss die fest bleibenden 2 Elemente der Substitution ebenfalls fest lassen oder sie unter einander vertauschen. Diese festbleibenden Elemente sind aber die 2 reellen oder imaginären**) Wurzeln der Congruenz:

$$c\omega^2 + (d - a)\omega - b \equiv 0 \bmod. q. \tag{3}$$

Wir unterscheiden jetzt verschiedene Fälle. Es sei nämlich

$$1)\quad c \equiv d - a \equiv b \equiv 0,$$

also

$$a : b : c : d \equiv \sqrt{n} : 0 : 0 : \sqrt{n} \bmod. q,$$

dann ist U der Identität ω mod. q congruent, und also erfüllt dann jede Substitution S die Bedingung (2).

Es giebt daher, wenn n quadratischer Rest modulo q ist, eine durch

$$\omega' \equiv \frac{\sqrt{n}\,\omega}{\sqrt{n}} \bmod. q$$

dargestellte Correspondenz, für welche alle $g = \frac{q(q^2-1)}{2}$ simultanen Substitutionen besondere Substitutionen sind, so dass sie also auch die Correspondenz

$$\mathsf{M}_1 : \mathsf{M}_2 : \cdots : \mathsf{M}_{\nu+1} = \mathsf{M}_1' : \mathsf{M}_2' : \cdots : \mathsf{M}_{\nu+1}'$$

ungeändert lassen.

2. Es sei ferner wieder die Discriminante

$$-\Delta \equiv k^2 - 4n$$
$$[k \equiv \pm (a + d)]$$

der Congruenz (3) $\equiv 0$ mod. q, was n als quadratischen Rest mod. q voraussetzt. Es seien jedoch nicht gleichzeitig b und $c \equiv 0$ mod. q, dann hat U die Periode q und es giebt $g = q$ besondere Substitutionen S, welche die Potenzen von U sind und also eine cyklische Gruppe G_q bilden. Also kommt:

Ist n quadratischer Rest mod. q, so giebt es $\frac{q^2-1}{2}$ Correspondenzen, welche je $g = q$ besondere Substitutionen zulassen. Dieselben bilden

*) Vergl. meine Abhandlung: Die Untergruppen der Galois'schen Gruppe der Modulargleichung etc., Mathem. Annalen Bd. XVIII, pag. 334 ff.

**) Von den Vertauschungen der M und M' wird hier abgesehen.

einen Cyklus G_q, dem auch U angehört. Für sie ist $k \equiv \pm 2\sqrt{n}$ (also $\Delta \equiv 0$), aber nicht gleichzeitig $b \equiv 0$ und $c \equiv 0$ mod. q.

Ganz analog findet man die Sätze:

3. *Jede Correspondenz, für welche — Δ quadratischer Rest mod. q und $k \equiv \pm (a + d) \gtrless 0$ mod. q ist, hat $g = \frac{q-1}{2}$ besondere simultane Substitutionen, welche einen Cyklus $G_{\frac{q-1}{2}}$ bilden.* Zu diesem Cyklus gehört eventuell auch U*) selbst und jedem Werthe $k^2 \equiv$ Const. mod. q gehören 2. $\frac{q(q+1)}{2}$ solche Correspondenzen zu.

4. *Jede Correspondenz, für welche — Δ quadratischer Nichtrest mod. q und $k \gtrless 0$ mod. q ist, hat $g = \frac{q+1}{2}$ besondere Substitutionen, welche einen Cyklus $G_{\frac{q+1}{2}}$ bilden.* Zu diesem gehört eventuell auch die Substitution U. Jedem $k^2 \equiv$ Const. mod. q gehören $2 \cdot \frac{q(q-1)}{2}$ solche Correspondenzen zu.

5. *Es giebt $\frac{q(q \pm 1)}{2}$ Correspondenzen, welche $q - 1$ bez. $q + 1$ besondere Substitutionen zulassen. Diese bilden eine Doppelpyramidengruppe $G_{2.\frac{q-1}{2}}$ oder $G_{2.\frac{q+1}{2}}$, und zwar je nachdem $-n$ quadratischer Rest oder Nichtrest modulo q ist.* Für diese Correspondenzen ist $k \equiv 0$ mod. q.

Dass im Falle $k \equiv 0$ mod. q die Zahl der besonderen Substitutionen sich verdoppelt, hat seine ganz einfache Ursache darin, dass dann U die Periode 2 hat, und die Lösungen S der Congruenz

$$S^{-1} U S \equiv U^{-1} \text{ mod. } q$$

wegen $U^{-1} \equiv U$ auch in Betracht kommen.

II. Abschnitt.

Ueber die Klassenzahlrelationen der q^{ten} Stufe.

Wir schreiten nun zur Aufstellung der Klassenzahlrelationen, welche den Modularcorrespondenzen der q^{ten} Stufe entspringen. Zunächst soll die Klassenzahlrelation entwickelt werden, welche die Modulargleichungen der absoluten Invariante J liefern. Sie wird dann als Basis dienen, auf welche sich zweckmässig die Construction der Klassenzahlrelationen der höheren Stufen gründet. Das Princip der Ableitung besteht darin, dass man die Zahl der Coincidenzen der

*) Dies tritt ein, wenn U der Gruppe G selbst angehört.

Modularcorrespondenzen der q^{ten} Stufe in doppelter Weise abzählt, auf arithmetischem Wege und auf algebraischem Wege, und die erhaltenen Resultate mit einander vergleicht.

§ 1.

Die endlichen Punkte $J = J'$ der Modulargleichung $f(J', J) = 0$.

Im Folgenden werden wir ω in das Fundamentaldreieck einschliessen. Hierdurch erzielen wir, dass $J(\omega)$ jeden seiner Werthe ein und nur einmal annimmt. Jedoch wollen wir den Punkt $\omega = i\infty$, welchem $J = \infty$ entspricht, einstweilen von unserer Betrachtung ausschliessen.

Wir bezeichnen ferner mit J' die Grösse

$$J' = J\left(\frac{a\omega + b}{c\omega + d}\right),$$

wo a, b, c, d ganze Zahlen der Determinante n sind, welche also durch Transformation n. Ordnung aus $J = J(\omega)$ hervorgeht. Zwischen J' und J und ebenso zwischen $J' - J$ und J besteht dann eine Gleichung $f(J', J) = 0$ des Grades N, welche wir uns durch eine N-blättrige Riemann'sche Fläche veranschaulichen können. Jedem der N Blätter entspricht ein bestimmter ω-Repräsentant in der Weise, dass, wenn ω und also $J = J(\omega)$ ein vorgegebener Werth ist, die Werthe $J' - J$, welche in den N übereinanderliegenden Blättern liegen, durch die N Grössen

$$J' - J = J(\Omega_{A,B}) - J(\omega)$$

definirt sind.

Wir fragen nun: Für welche Werthe ω kann $J' - J$ gleich Null werden?

Die Grössen $J = J(\omega)$ und $J' = J\left(\frac{a\omega + b}{c\omega + d}\right)$ werden dann und nur dann einander gleich, wenn

$$\omega \text{ und } \frac{a\omega + b}{c\omega + d}$$

zu einander äquivalent sind, so dass sie durch eine ganzzahlige Transformation $\omega' = \frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta}$ der Determinante 1 aus einander hervorgehen. Denken wir uns diese Transformation in $\frac{a\omega + b}{c\omega + d}$ bereits eingegangen, so erhalten wir die Gleichungen

$$\omega = \frac{a\omega + b}{c\omega + d}, \tag{1}$$

$$c\omega^2 + (d - a)\,\omega - b = 0. \tag{2}$$

So oft also $J = J'$ wird, ergiebt sich ω als Verschwindungspunkt einer ganzzahligen quadratischen Form von einer negativen) Determinante der Gestalt*

$$D = (d + a)^2 - 4n = -\Delta.$$

Der Voraussetzung nach, welche wir in Betreff der Grösse ω am Eingange dieses Paragraphen gemacht haben, ist unsere Form (2) eine reducirte quadratische Form von negativer Determinante.

Es handelt sich jetzt umgekehrt darum, die Anzahl der einfachen Punkte $J' = J$, oder die Zahl der Nullpunkte $J' - J$ in Bezug auf die Variable J aufzufinden, welche einer vorgegebenen quadratischen Form:

$$P\omega^2 + Q\omega + R \tag{3}$$

der negativen Determinante $x^2 - 4n$ entsprechen. Diese Anzahl ist offenbar durch die Zahl der Repräsentanten $\Omega_{A,B}$ definirt, welche zu dem Verschwindungspunkte mit positivem imaginären Bestandtheile jener quadratischen Form äquivalent sind.

In der That werden von den N zugehörigen Werthen

$$J(\Omega_{A,B}) - J(\omega)$$

die und nur die zu Null werden, für welche Ω_{AB} zu ω äquivalent wird. Alle diese Punkte liegen ferner in verschiedenen Blättern der Riemann'schen Fläche, sie können keine Verzweigungspunkte sein von J' in Bezug auf J, also auch nicht von $J' - J$ in Bezug auf J. Man bemerke nämlich, dass Verzweigungen von J' in Bezug auf J ausser in dem ausgeschlossenen Punkte $J = \infty$ nur für $J = 0$ und 1 statthaben können, dass aber gerade jene Punkte keine Verzweigungen haben, für welche $J = J' = 0$ oder 1 ist. Ausserdem bemerke man, dass jedem Repräsentanten $\Omega_{A,B}$ gerade *ein* Nullpunkt von $J' - J$ entspricht. Wenn zwei solche vorhanden wären, so müsste ausser $J' = J$ auch noch $J' + dJ' = J + dJ$ sein. Diesem entspräche aber, dass ausser:

$$\omega \text{ und } \frac{a\omega + b}{c\omega + d}$$

auch noch

$$\omega + \delta\omega \text{ und } \frac{a(\omega + \delta\omega) + b}{c(\omega + \delta\omega) + d},$$

wo $\delta\omega$ das Differential von ω ist, äquivalent wären. Es müsste also ausser der Gleichung

$$P\omega^2 + Q\omega + R = 0$$

noch die Gleichung $2P\omega + Q = 0$ bestehen, also ω reell sein, was gegen die Voraussetzung ist.

---

*) Da ω im Fundamentaldreieck liegt.

Dass $\frac{dJ'-dJ}{dJ}$ für die hier brauchbare Wurzel ω einer Gleichung (2) weder 0 noch ∞ werden kann, folgt auch aus der Gleichung:

$$M^2 = \frac{1}{n} \cdot \frac{dJ'}{dJ} \cdot \frac{J^{\frac{2}{3}}(J-1)^{\frac{1}{2}}}{J'^{\frac{2}{3}}(J'-1)^{\frac{1}{2}}} \text{ *).}$$

Für $J = J'$ kommt aus ihr $\frac{dJ'}{dJ} = n \cdot M^2$. Nun ist hier M dargestellt durch die Gleichungen

$$M = \frac{\sqrt[12]{\Delta(a\omega_1 + b\omega_2,\ c\omega_1 + d\omega_2)}}{\sqrt[12]{\Delta(\omega_1, \omega_2)}},$$

$$\sqrt[12]{\Delta}(\omega_1, \omega_2) = \frac{2\pi}{\omega_2} \cdot q^{\frac{1}{6}} \cdot \prod\prod (1 - q^{2\nu})^2 \text{ *),}$$

wobei $q = e^{i\pi\omega}$ und $\omega = \frac{\omega_1}{\omega_2}$ zu setzen ist. Wegen der Gleichungen (1) und (2) ist aber jetzt $a\omega_1 + b\omega_2 = \omega_1(c\omega + d)$ und $c\omega_1 + d\omega_2 = \omega_2(c\omega + d)$; also wird hier

$$M = \frac{1}{c\omega + d},$$

und da (wegen Gleichung (2)) auch $n = (c\omega + d)(-c\omega + a)$ ist, so kommt

$$\frac{dJ'}{dJ} = \frac{-c\omega + a}{c\omega + d},$$

ein Ausdruck, der von 1 und ∞ verschieden ist.

Wir schreiten jetzt zur Abzählung der Repräsentanten $\Omega_{A,B}$. Zunächst folgt: Jeder reducirten quadratischen Form (3) entspricht eine und nur eine Gleichung (1), wenn man jene Formen, für welche $\varkappa > 0$ ist, doppelt nimmt und die eine dieser Formen dem positiven Werthe von $\varkappa$, die andere dem negativen als entsprechend zuweist. Dies letztere soll im Folgenden durchaus geschehen.

Es ergiebt sich nämlich folgende Lösung:

$$\omega' = \frac{\frac{-Q+\varepsilon\varkappa}{2}\omega - R}{P\omega + \frac{Q+\varepsilon\varkappa}{2}}, \qquad \varepsilon = +1, -1. \tag{4}$$

Hierbei sind aber einstweilen diejenigen Formen (3) ausgeschlossen, für welche P, Q, R, n einen gemeinsamen Theiler haben. Dieser würde nämlich auch Theiler von

$$P, \frac{Q+\varepsilon\varkappa}{2}, \quad \frac{Q-\varepsilon\varkappa}{2}, \quad R \text{ (und umgekehrt)}$$

sein, ein Vorkommniss, welches in Absch. I., § 2. ausgeschlossen wurde.

*) Klein, Math. Ann. Bd. XIV, pag. 145; Hurwitz, Math. Ann. Bd. XVIII, pag. 565 ff.

Wir haben noch zu entscheiden, ob die beiden durch $\varepsilon = +1$ und $\varepsilon = -1$ unterschiedenen Substitutionen (4) zu verschiedenen Repräsentanten gehören.

Nach der Definition dieser Repräsentanten (Absch. I., § 2.) liefern unsere Substitutionen dann und nur dann denselben Repräsentanten, wenn erstens die Zahlen

a) $$P, \frac{Q+\varkappa}{2}, n,$$

und die Zahlen

$$P, \frac{Q-\varkappa}{2}, n$$

denselben grössten Theiler A besitzen und wenn zweitens die folgenden 4 Congruenzen gleichzeitig bestehen:

$$\frac{Q+\varkappa}{2} \cdot B \equiv RA \bmod. n \qquad \frac{Q-\varkappa}{2} \cdot B \equiv RA \bmod. n,$$

$$\frac{P}{A} \cdot B \equiv \frac{Q-\varkappa}{2} \bmod. D \qquad \frac{P}{A} \cdot B \equiv \frac{Q+\varkappa}{2} \bmod. D.$$

Aus der ersten Bedingung folgt jetzt: $\varkappa \equiv 0 \bmod. A$, aus den Bedingungen (2) hingegen kommt: $\varkappa \cdot B \equiv 0 \bmod. n$, $\varkappa \equiv 0 \bmod. D$.

Da B zum grössten Theiler T von A und D relativ prim ist, so sagen die 3 letzten Bedingungen Folgendes aus: Die nothwendige und hinreichende Bedingung für die Aequivalenz der 2 Lösungen (4) ist:

(5) $$\varkappa \equiv 0 \bmod. n.$$

Ist also $n > 3$, so fallen nur mehr, wie selbstverständlich ist, für $\varkappa = 0$ beide Lösungen zusammen, da ja $\varkappa^2 < 4n$ sein muss.

Hingegen liefern bei $n = 2$ und $n = 3$, ausser $\varkappa = 0$, noch $\varkappa = \pm 2$ bez. $\varkappa = \pm 3$ nur je eine Lösung (4).

§ 2.

Die Zahl der Punkte $J = J'$, welche einem gegebenen Werthe ω entsprechen.

Durch die Betrachtungen des § 1. ist noch kein ein-eindeutiges Entsprechen zwischen den verschiedenen quadratischen Formen*) der negativen Determinanten $-\Delta = \varkappa^2 - 4n$ und den einfachen endlichen Punkten $J = J'$ hergestellt. Es kann nämlich ein gegebener Werth ω, der im Fundamentaldreiecke liegt, Verschwindungspunkt von mehreren solchen reducirten quadratischen Formen sein. Zu ω gehört dann eine gewisse Anzahl von Formen der verlangten Eigenschaften, die sich alle in der Form:

*) Es kommen nur Formen (P, Q, R) in Betracht, für welche P, Q, R keinen gemeinsamen Theiler mit n haben.

(6) $$\varrho p\omega^2 + \varrho q\omega + \varrho r = 0$$

darstellen, wo p, q, r zu einander relativ prim sind und ϱ mit n keinen gemeinsamen Theiler >1 hat. Setzen wir jetzt

$$4pr - q^2 = \Delta',$$

so folgt, *dass die Anzahl der reducirten Formen**) (5), *welche dem gegebenen Punkte* ω *entsprechen, der halben Anzahl* ν *der Darstellungen*

$$4n = \varkappa^2 + \varrho^2\Delta'$$

durch relative Primzahlen $\varkappa$, ϱ *gleich ist, wobei jedoch die Vorzeichen von* $\varkappa$, ϱ, *so wie die Nullwerthe von* $\varkappa$ *mit zu berücksichtigen sind.*

Alle diese Formen liefern ebensoviele Gleichheiten:

(7) $$\omega' = \frac{a\omega + b}{c\omega + d}$$

und unsere Frage ist: *Sind alle diese Ausdrücke zu verschiedenen Repräsentanten gehörig oder sind sie es nicht?*

Zu diesem Zwecke untersuchen wir, wann 2 Formen:

$$\varrho_1 \cdot (p\omega^2 + q\omega + r) = 0, \quad \varepsilon_1\varkappa_1$$
$$\varrho_2 \cdot (p\omega^2 + q\omega + r) = 0, \quad \varepsilon_2\varkappa_2$$

äquivalente Lösungen (7) haben.

Dies lässt sich in derselben Weise entscheiden, wie in § 1. die Frage nach der Verschiedenheit der 2 Lösungen (4). Man findet als nothwendige und hinreichende Bedingung hierfür diese, dass:

(8) $$\frac{\varepsilon_1\varkappa_1\varrho_2 - \varepsilon_2\varkappa_2\varrho_1}{2} \equiv 0 \bmod. n$$

sei.

Die Grössen $\varkappa$, ϱ genügen demnach folgenden Bedingungen:

(9) $$\begin{aligned} 2nx &= \varepsilon_1\varkappa_1\varrho_2 - \varepsilon_2\varkappa_2\varrho_1, \\ 4n &= \varkappa_1^2 + \varrho_1^2 \cdot \Delta', \\ 4n &= \varkappa_2^2 + \varrho_2^2 \cdot \Delta', \end{aligned}$$

wobei x eine ganze Zahl ist. Diese Bedingungen aber vereinigen sich zur folgenden:

(10) $$0 = \left(\varepsilon_1\varkappa_1 - \frac{2\varrho_2}{x}\right)^2 + \left(\varepsilon_2\varkappa_2 + \frac{2\varrho_1}{x}\right)^2 + (\varrho_1^2 + \varrho_2^2) \cdot \left(\Delta' - \frac{4}{x^2}\right).$$

Hieraus folgt sogleich:

Sobald $\Delta' > 4$ *ist, sind alle Repräsentanten* (7) *von einander verschieden.* In diesem Falle kann nämlich die letzte Gleichung unmöglich erfüllt sein. Die Fälle $\Delta' = 3$, $\Delta' = 4$ erfordern eine besondere Untersuchung.

---

*) Es sind wieder die Formen $+\varkappa$ und $-\varkappa$ von einander getrennt zu betrachten.

I. Der Werth $\Delta' = 4$ entspricht den Formen $(\varrho, 0, \varrho)$, d. h. den Formen $\varrho\omega^2 + \varrho$. Die Gleichung (10) gestattet hier die Lösung

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 x_1 &= 2\varrho_2, \\ \varepsilon_2 x_2 &= -2\varrho_1, \end{aligned} \qquad 4n = 4\varrho_1^2 + 4\varrho_2^2,$$

für welche auch

$$\frac{\varepsilon_1 x_1 \varrho_2 - \varepsilon_2 x_2 \varrho_1}{2} = \varrho_2^2 + \varrho_1^2 = n$$

ist, so dass die Bedingungen (9) alle erfüllt sind. Wir schliessen hieraus:

Von den Formen $(\varrho, 0, \varrho)$ *geben immer je 2 zusammen denselben Repräsentanten. Je zwei Formen dieser Art geben daher immer nur einen Punkt* $J' = J = 1$. Zwei solche zusammengehörige Formen sind folgende:

$$\begin{aligned} &(\varrho_1, 0, \varrho_1), \quad x = \pm 2\varrho_2 \text{*)}, \\ &(\varrho_2, 0, \varrho_2), \quad x = \mp 2\varrho_1, \end{aligned}$$

wenn:

$$4n = 4\varrho_1^2 + 4\varrho_2^2$$

ist und die oberen und unteren Vorzeichen zusammengehören.

Nur ein Fall bildet eine Ausnahme. Bei $n = 2$ fallen nämlich beide Formen in eine zusammen. Es ist

$$\varrho_1 = \varrho_2 = 1.$$

II. Ganz ähnliches findet statt, wenn $\Delta' = 3$ ist. Die hier auftretenden Formen $(\varrho, \varrho, \varrho)$ haben die Gestalt:

$$\varrho\omega^2 + \varrho\omega + \varrho.$$

Die Bedingungen (9) der Aequivalenz zweier Formen dieser Art $(\varrho_1, \varrho_1, \varrho_1)$, $\varepsilon_1 x_2$, $(\varrho_2, \varrho_2, \varrho_2)$, $\varepsilon_2 x_2$ sind $4n = x_1^2 + 3\varrho_1^2$, $4n = x_2^2 + 3\varrho_2^2$, $\varepsilon_1 x_1 \varrho_2 - \varepsilon_2 x_2 \varrho_1 = 2n$.

Diese Gleichungen sind indess nur dann erfüllt, wenn (abgesehen vom Vorzeichen):

$$S = \frac{\varepsilon_2 x_2 + \varrho_2\sqrt{-3}}{\varepsilon_1 x_1 + \varrho_1\sqrt{-3}}$$

eine dritte Einheitswurzel ist. In der That kommt sogleich:

$$S = \frac{(\varepsilon_1\varepsilon_2 x_1 x_2 + 3\varrho_1\varrho_2) + (\varepsilon_1 x_1 \varrho_2 - \varepsilon_2 x_2 \varrho_1)\sqrt{-3}}{x_1^2 + 3\varrho_1^2} = \frac{t + 2n\sqrt{-3}}{4n}.$$

Bemerkt man aber ferner, dass:

$$\frac{\varepsilon_2 x_2 + \varrho_2\sqrt{-3}}{\varepsilon_1 x_1 + \varrho_1\sqrt{-3}} \cdot \frac{\varepsilon_2 x_2 - \varrho_2\sqrt{-3}}{\varepsilon_1 x_1 - \varrho_1\sqrt{-3}} = \frac{x_2^2 + 3\varrho_2^2}{x_1^2 + 3\varrho_1^2} = 1$$

ist, so folgt

$$\frac{t + 2n\sqrt{-3}}{4n} \cdot \frac{t - 2n\sqrt{-3}}{4n} = 1,$$

also

$$S = \frac{\mp 1 + \sqrt{-3}}{2}.$$

*) Die Grössen ϱ gelten hier durchaus als positiv.

Auch umgekehrt folgt: Ist S eine solche dritte Einheitswurzel, so sind die Gleichungen (9) erfüllt. *Also erhalten wir zu jeder Form* $(\varrho, \varrho, \varrho)$, εx *noch* 2 *weitere, welche denselben Punkt* $J' = J = 0$ *liefern.*

Diese 3 zusammengehörigen Formen sind:

$$(\varrho, \varrho, \varrho), \quad \varepsilon x_1,$$

$$\left(\frac{\varrho \mp x}{2}, \quad \frac{\varrho \mp x}{2}, \quad \frac{\varrho \mp x}{2}\right), \quad x_2 = \frac{\varepsilon x_1 \mp 3\varrho_1}{2}.$$

Die zugehörigen Darstellungen von $4n$ lauten:

$$4n = x^2 + 3\varrho^2,$$

$$4n = \left(\frac{-x \mp 3\varrho}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{\varrho \mp x}{2}\right)^2.$$

Auch hier findet eine Ausnahme statt. Ist $n = 3$, so fallen 2 jener Formen (die beiden letzteren) in eine zusammen.

Es scheint hier am Platze zu sein, zu bemerken, dass gerade die Formen $(\varrho, 0, \varrho)$ und $(\varrho, \varrho, \varrho)$ es sind, deren Verschwindungspunkte mit positivem imaginären Bestandtheile in der ω-Ebene als Eckpunkte der Invariantendreiecke auftreten. In ihnen finden Drehungen der positiven ω-Halbebene in sich von den Perioden 2 und 3 statt.

Um jetzt auch zwischen den Formen $(\varrho, 0, \varrho)$ bez. $(\varrho, \varrho, \varrho)$ und den zugehörigen einfachen Punkten $J' = J$ ein eindeutiges Entsprechen festzustellen, wollen wir diese Formen beziehungsweise als $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{3}$ zählen. Diese Festsetzungen gelten dann namentlich auch für die Fälle $n = 2$ und $n = 3$. Denn die Ausnahmen, welche bei diesen Formen in § 1. stattfanden, werden von den Ausnahmen des § 2. gerade im Sinne der gemachten Festsetzung aufgehoben.

Das Resultat dieser Untersuchung spricht sich in folgendem Satze aus:

Zwischen den einfachen endlichen Punkten $J' = J$ *und den Klassen der quadratischen Formen von folgenden Determinanten:*

$$D = x^2 - 4n,$$

wo x *alle Werthe:* $0, \pm 1, \pm 2, \cdots$ *durchläuft, die absolut genommen* $< \sqrt{4n}$ *sind, findet ein eindeutig umkehrbares Entsprechen statt, wenn jede Formenklasse* (P, Q, R), *für welche* P, Q, R *mit* n *einen gemeinsamen Theiler haben, ausgeschlossen ist, wenn ferner jede auftretende Formenklasse* $(\varrho, 0, \varrho)$ *als* $\frac{1}{2}$, *jede Formenklasse* $(\varrho, \varrho, \varrho)$ *als* $\frac{1}{3}$, *jede andere Formenklasse dagegen als* 1 *gezählt wird.*

Bezeichnen wir jetzt mit $H'(4n - x^2)$ die Anzahl dieser Klassen für die bestimmte Determinante $x^2 - 4n$, so folgt als Anzahl der Nullpunkte von $J' - J$ der Ausdruck $\sum H'(4n - x^2)$, wo sich die Summation auf alle Zahlen $x = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$ hinerstreckt, für welche $x^2 < 4n$ ist.

§ 3.

Die Unendlichkeitspunkte von $J' - J$.

Es handelt sich nunmehr um die Abzählung der Unendlichkeitspunkte der Function $J' - J$ von J. Diese kann geleistet werden mit Hilfe der Reihenentwicklungen von $J(\omega)$, welche nach Potenzen von $q = e^{i\pi\omega}$ fortschreitet*). Sie ist in erster Annäherung

$$J = \frac{1}{1728 q^2}, \quad q = e^{i\pi\omega}. \tag{1}$$

J und J', also auch $J' - J$, werden nur unendlich, wenn $\omega = i\infty$ ist. Für diesen Werth aber ergeben sich aus (1) die Entwicklungen:

$$\begin{aligned} J &= J(\omega) = \frac{1}{1728 q^2}, \\ J' &= J\left(\frac{A\omega + B}{D}\right) = \frac{1}{1728 q^{2\cdot\frac{A}{D}} \cdot e^{\frac{2i\pi B}{D}}}. \end{aligned} \tag{2}$$

Bezeichnet man wieder mit T den grössten Theiler von A und D, so ergeben sich hieraus die folgenden Relationen zwischen J und $J' = J\left(\frac{A\omega + B}{D}\right)$ für die Nähe des Punktes $\omega = i\infty$

$$J'^{\frac{D}{T}} = 1728^{\frac{A-D}{T}} \cdot e^{-\frac{2iB\pi}{T}} \cdot J^{\frac{A}{T}}, \tag{3}$$

oder

$$(J' - J)^{\frac{D}{T}} = 1728^{\frac{A-D}{T}} \cdot e^{-\frac{2i\pi B}{T}} \cdot J^{\frac{A}{T}} - J^{\frac{D}{T}}. \tag{4}$$

Hier beschreibt $e^{\frac{2i\pi B}{T}}$, da B zu T relativ prim ist, alle primitiven T^{ten} Einheitswurzeln und wir erhalten daher diesen Wurzeln entsprechend für jede Zerlegung der Zahl n in

$$n = A \cdot D$$

genau $\varphi(T)$ solche Entwicklungen der Gestalt (3). Diese $\varphi(T)$ Entwicklungen entsprechen den $\varphi(T)$ Verzweigungspunkten, in denen je $\frac{D}{T}$ Blätter zusammenhängen.

Sind jetzt A und D von einander verschieden und bezeichnet man mit d die grössere von diesen 2 Zahlen, so dass $d > \sqrt{n}$ ist, so giebt die Gleichung (4):

$$(J' - J)^{\frac{D}{T}} = \text{Const.}\, J^{\frac{d}{T}}$$

*) F. Klein: Ueber die Transformation der elliptischen Functionen und die Auflösung der Gleichung fünften Grades in den Mathem. Annalen, Bd. XIV, pag. 119.

an, dass die Zahl der einfachen Unendlichkeitspunkte, welche einem solchen Cyklus von $\frac{D}{T}$ Blättern entsprechen, durch

$$\frac{d}{T}$$

dargestellt ist. Den $\varphi(T)$ Cyklen entsprechen also

$$\frac{d}{T}\varphi(T)$$

einfache Unendlichkeitspunkte.

Genau dieselbe Anzahl von einfachen Unendlichkeitspunkten erhält man, wenn man die Zahlen A und D mit einander vertauscht wenn also $J' = J\left(\frac{D\omega + B}{A}\right)$ gesetzt wird.

Ist also n kein reines Quadrat, so ist die Zahl aller einfachen Unendlichkeitspunkte von $J' - J$ durch

$$r = 2\sum' \frac{d}{T}\varphi(T)$$

dargestellt, wo die Summe sich über alle Theiler d von n, die $> \sqrt{n}$ sind, hinerstreckt und T den grössten Theiler von d und $\frac{n}{d} = a$ bedeutet.

Ist n ein reines Quadrat, so ist noch die Zerlegung

$$n = \sqrt{n} \cdot \sqrt{n},$$

für welche also $A = D = T = \sqrt{n}$ ist, zu betrachten. Ihr entsprechen die $\varphi(\sqrt{n})$ Entwicklungen:

$$J' - J = \left(e^{-\frac{2i\pi B}{\sqrt{n}}} - 1\right) J.$$

In ihnen kann der Coefficient von J auf der rechten Seite nicht Null werden, weil $e^{-\frac{2i\pi B}{\sqrt{n}}}$ als primitive $(\sqrt{n})^{\text{te}}$ Einheitswurzel nie gleich 1 sein kann. Diesen Entwicklungen entsprechen daher

$$\varphi(\sqrt{n})$$

einfache Unendlichkeitspunkte. *Im Falle eines reinen Quadrates n kommt daher zur Zahl r noch der Summand $\varphi(\sqrt{n})$.*

Hieraus ergiebt sich nunmehr als Gesammtzahl der einfachen Unendlichkeitspunkte von $J' - J$ für jedes n ohne Ausnahme die Zahl

$$\sum' \frac{\delta}{T}\varphi(T) + \sum \frac{d-a}{T}\varphi(T).$$

Hierbei erstrecken sich die Summen rechter Hand über alle Theiler δ, d, a von n, wenn δ irgend einen Theiler von n, d einen Theiler von n, der $> \sqrt{n}$ und also $a = \frac{n}{d}$ einen Theiler von n der

$< \sqrt{n}$ ist, darstellt. T giebt immer den grössten Theiler von δ, $\frac{n}{\delta}$ bez. von d und a an.

§ 4.

Die Klassenzahlrelation der ersten Stufe.

Durch Vergleichung der Anzahlen der Nullpunkte und Unendlichkeitspunkte von $J' - J$ kommt das Resultat):*

$$(1) \qquad \sum_{x=0,\ \pm 1,\ \pm 2\ \cdots} H'(4n - x^2) = \sum \frac{\delta}{T}\,\varphi(T) + \frac{d-a}{T}\,\varphi(T).$$

Diese Formel gilt für jedes $n > 1$. Sie bleibt auch für $n = 1$ bestehen, wenn man $H'(0) = -\frac{1}{12}$ festsetzt. Dies soll im Folgenden immer geschehen. Wir können dann unmittelbar zu einer wirklichen Klassenzahlrelation im Kronecker'schen Sinne gelangen.

Dies erreichen wir, wenn wir die Formel (1) für alle jene Theiler m von n bilden, für welche $\frac{n}{m}$ ein reines Quadrat ist, und alle diese Formeln addiren. Das Resultat lautet dann:

$$(2) \qquad \sum_{x=0,\ \pm 1,\ \pm 2\ \cdots} H(4n - x^2) = \Phi(n) + \Psi(n).$$

Hierbei haben $\Phi(n)$, $\Psi(n)$, $H(n)$ folgende von Kronecker eingeführte Bedeutung:

$\Phi(n) = \Sigma\delta$ ist die Summe *aller* Theiler von n,

$\Psi(n) = \Sigma(d-a)$ ist die Summe aller Theiler von n die $> \sqrt{n}$ sind, weniger der Summe aller Theiler von n, die $< \sqrt{n}$ sind.

$H(n)$ ist die Anzahl aller nicht äquivalenten Klassen quadratischer Formen $P\omega^2 + Q\omega + R$ von der Determinante $Q^2 - 4PR = -n$, wenn jede Formenklasse $(\varrho, 0, \varrho)$ als $\frac{1}{2}$, jede Formenklasse $(\varrho, \varrho, \varrho)$ als $\frac{1}{3}$, jede andere Klasse als 1 gerechnet und $H(0) = -\frac{1}{12}$ gesetzt wird.

Uebrigens erstreckt sich die Summe linker Hand über alle Zahlen $x = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$ hin, für welche $4n - x^2$ nicht negativ ist.

Dass dies so ist, wird folgendermassen erkannt. Links treten alle Formen hinzu, welche früher ausgeschlossen waren. Rechts hingegen treten Doppelsummen der Gestalt

---

*) In dieser Form hat Joubert einige der Kronecker'schen Formeln abgeleitet (Comptes Rendus, tome 50, pag. 773 ff.).

**) Diese Formel ergiebt sich also aus der *irreductiblen* Gleichung $f(J', J)$.

$$\sum \frac{\delta}{T}\left[\sum \varphi\left(\frac{T}{\tau}\right)\right]$$

auf, wo die innere Summe sich über alle Theiler τ von T hinerstreckt Diese Summe ist aber bekanntlich gleich T und mithin wird:

$$\sum \frac{\delta}{T}\left[\sum \varphi\left(\frac{T}{\tau}\right)\right] = \sum \delta = \Phi(n)$$

und

$$\sum \frac{d-a}{T}\left[\sum \varphi\left(\frac{T}{\tau}\right)\right] = \sum (d-a) = \Psi(n).$$

§ 5.

Zusammenhang der Klassenzahlrelation erster Stufe mit den Kronecker'schen Formeln.

Nach einem Satze von Kronecker muss die eben abgeleitete Klassenzahlrelation als lineare Combination seiner 8 *Formeln darstellbar sein. Dies ist in der That der Fall.* Man hat

$$\sum_{x=0,\pm1,\pm2,\cdots} \mathrm{H}(4n-x^2) = \sum_{x=0,\pm2,\pm4} \mathrm{H}(4n-x^2) + \sum_{x=\pm1,\pm3,\cdots} \mathrm{H}(4n-x^2).$$

Nun bestehen folgende Fundamentalrelationen*):

1) $\mathrm{H}(n) = F(n)$, wenn $n \equiv 7 \bmod 8$,
2) $3\mathrm{H}(n) = F(n)$, „ $n \equiv 3 \bmod 8$,
3) $\mathrm{H}(n) = 0$, „ $n \equiv 1, 2 \bmod 8$.
4) $\mathrm{H}(4n) = G(n)$
5) $F(4n) = 2 \cdot F(n)$ } für jedes n,
6) $G(n) = F(n) + \mathrm{H}(n)$.

Demnach erhalten wir, wenn $n \equiv 0 \bmod 2$ ist:

$$\sum_{x=0,\pm1,\pm2,\cdots} \mathrm{H}(4n-x^2) = \sum_{x=0,\pm2,\pm4} \mathrm{H}(4n-x^2) + \sum_{x=\pm1,\pm3,\cdots} F(4n-x^2)$$

$$= \sum_{x=0,\pm2,\cdots} [\mathrm{H}(4n-x^2) - F(4n-x^2)] + \sum_{x=0,\pm1,\pm2,\cdots} F(4n-x^2),$$

oder wegen der Fundamentalrelationen 4, 5, 6:

*) Kronecker: Berliner Monatsberichte 1875. Siehe dort auch die Definitionen der Klassenzahlen $F(n)$ und $G(n)$.

$$\sum_{x=0,\pm1,\pm2,\cdots} H(4n-x^2) = \sum_{x=0,\pm1,\pm2,\cdots} (H(n-x^2) - F(n-x^2)) + \sum_{x=0,\pm1,\pm2,\cdots} F(4n-x^2).$$

Bezeichnet man jetzt die Kronecker'schen Formeln, gebildet für die Zahl (n), der Reihe nach mit $I(n)$, $II(n)$ $\cdots$ und ebenso die Relation erster Stufe mit $J(n)$, so kommt:

$$J(n) - J\left(\tfrac{n}{4}\right) = I(n) - I\left(\tfrac{n}{4}\right), \tag{7}$$

und zwar gilt diese Formel ganz allgemein, so oft $n \equiv 0 \bmod 2$ ist, selbst dann, wenn $\frac{n}{4}$ keine ganze Zahl ist. Die Bedeutung der Functionen $J\left(\frac{n}{4}\right)$, $I\left(\frac{n}{4}\right)$ ist eben dann folgende:

$$J\left(\tfrac{n}{4}\right) = \sum_{x=0,\pm1,\pm2,\cdots} H(n-x^2),$$

$$I\left(\tfrac{n}{4}\right) = \sum_{x=0,\pm1,\pm2,\cdots} F(n-x^2).$$

Bemerkt man hierzu noch, dass für ein ungerades m:

$$\begin{aligned} J(m) &= \sum_{x=0,\pm1,\pm2,\cdots} H(4m-x^2) \\ &= \sum_{x=0,\pm2,\pm4,\cdots} H(4m-x^2) + \sum_{x=\pm1,\pm3,\cdots} H(4m-x^2) \\ &= \sum_{x=0,\pm1,\cdots} G(m-x^2) + \tfrac{1}{3}\cdot\sum_{x=\pm1,\pm3,\cdots} F(4m-x^2) \\ &= \tfrac{1}{3}\,IV(m) + \tfrac{1}{3}\,I(m) - \tfrac{1}{3}\,V(m) \end{aligned}$$

ist, *so erhält man die gewünschte Darstellung in einer der 2 folgenden Formeln:*

a) $J(n) = I(n) - II(m)$,

b) $J(n) = I(n) - \frac{2}{3}\,I(m) + \frac{1}{3}\,IV(m) - \frac{1}{3}\,V(m)$.

Hier ist $n = 2^{\mu}\cdot m$ gesetzt und unter m eine ungerade Zahl verstanden, und es gilt die erste oder die zweite Formel, je nachdem μ ungerade oder gerade ist.

§ 6.

Ableitung der Klassenzahlrelation der ersten Stufe aus dem Correspondenzprincipe.

Es ist für die Entwicklung der Klassenzahlrelationen der höheren Stufen, soweit diese hier in Betracht gezogen werden, von Vortheil, das sogenannte Correspondenzprincip für Correspondenzen auf Curven vom Geschlechte $p = 0$ anzuwenden. Aus letzterem soll zunächst die Relation der ersten Stufe abgeleitet werden.

Die Gleichung $f(J', J) = 0$ giebt zwischen J und J' eine $N - N$*) *deutige Correspondenz* auf der geraden Linie (der einfachsten Curve vom Geschlechte 0). Jedem Werthe von J entsprechen nämlich N Werthe von J' und umgekehrt und diese sind wieder auf die N Repräsentanten Ω_{AB} ein-eindeutig bezogen. Daher ist die Zahl der einfachen *endlichen* Coincidenzen $J' = J$ wieder durch die Summe

$$\nu = \sum_{x=0,\pm1,\pm2,\cdots} H'(4n - x^2) \qquad (\S\ 3.)$$

gegeben.

Offenbar stimmt diese Anzahl genau überein mit dem Grade, welchen die Gleichung $f(J', J) = 0$ in J erhält, wenn man $J' = J$ setzt. Dieser Grad aber kann ermittelt werden als Ordnung des Unendlichwerdens der linken Seite von $f(J', J) = 0$, wenn man $J' = J = \infty$ setzt.

Nun bemerke man, dass die linke Seite der Gleichung $f(J', J) = 0$ für $J = \infty$ in ein Product von Factoren zerfällt (§ 3.), nämlich in

$$(1) \qquad \prod \left(J'^{\frac{D}{T}} - aJ^{\frac{A}{T}}\right)^{**}),$$

wo a jedesmal eine von 0 und ∞ verschiedene Constante bedeutet.

Setzt man hierin $J' = J$, so erkennt man leicht, dass die höchste Potenz von J, welche auftritt, und welche die Ordnung des Unendlichwerdens charakterisirt, den Exponenten

$$c = 2 \cdot \sum \frac{d}{T} \varphi(T) + \varphi(\sqrt{n})$$

hat. Die Bedeutung der auftretenden Summe stimmt mit dem r des § 3. überein und $\varphi(\sqrt{n})$ ist immer durch Null zu ersetzen, wenn n kein reines Quadrat ist.

Damit nun die Correspondenzformel, nach welcher die Zahl aller Coincidenzen der $N - N$-deutigen Correspondenz gleich $2N$ sein soll,

---

*) Die Bedeutung von N siehe Absch. I, § 2.

**) Ist $A = D$, so hat die Constante a einen von 0 verschiedenen Werth (§ 4.).

auch hier die volle Gültigkeit hat, müssen wir auch *für den Punkt* $J = \infty$ eine geeignete Zahl von Coincidenzen festsetzen. Diese Zahl ist eben dadurch zu definiren, dass sie den Grad der Gleichung $f(J', J) = 0$ für $J = J'$ zu $2N$ ergänzt.

Nach diesem Principe ergiebt sich sogleich aus jeder Entwicklung

$$J'^{\frac{D}{T}} - a\, J^{\frac{A}{T}} = 0$$

für den Punkt $J = \infty$, $J' = \infty$ eine Zahl von $\frac{a}{T}$ Coincidenzen, wenn a die kleinere der 2 Zahlen D und A (also $< \sqrt{n}$) ist, und eine Coincidenz, wenn $A = D = T = \sqrt{n}$ ist. Aus allen Factoren des Productes (1) *ergeben sich somit für den Punkt* $J = \infty$ *und* $J' = \infty$

$$\lambda = 2 \sum \tfrac{a}{T}\, \varphi(T) + \varphi(\sqrt{n})$$

Coincidenzen, wobei die erste Summe sich über alle Theiler $a < \sqrt{n}$ von n hinerstreckt, T der grösste Theiler von a und $\frac{n}{a}$ ist, $\varphi(T)$ und $\varphi(\sqrt{n})$ wieder die frühere Bedeutung haben. Nunmehr ergiebt sich in voller Strenge die Formel:

$$\nu + \lambda = 2N.$$

§ 7.

Die allgemeinen Ansätze für die linken Seiten der Klassenzahlrelationen der q^{ten} Stufe.

Zur Ableitung der linken Seiten der Klassenzahlrelationen der q^{ten} *Stufe verwenden wir die* $\frac{q(q^2-1)}{2}$ *irreductiblen Modularcorrespondenzen der* q^{ten} *Stufe.*

Es seien

$$\mu_1(\omega) = \frac{M_1}{M_{\nu+1}}, \qquad \mu_2 = \frac{M_2}{M_{\nu+1}}, \cdots$$

wieder die Moduln des vollen Systems ausgezeichneter Congruenzmoduln der q^{ten} Stufe, mit den Eigenschaften ausgerüstet, welche in Abschn. I, § 3. auseinandergesetzt sind. Ferner seien

$$\mu_1'(\omega) = \mu_1\left(\frac{a\omega + b}{c\omega + d}\right) = \frac{M_1'}{M_{\nu+1}'}, \cdots$$

(wo a, b, c, d ganze Zahlen der Determinante $ad - bc = n$ sind), die durch Transformation n^{ter} Ordnung daraus abgeleiteten Moduln. Ausserdem schränken wir die Variable ω in das zur ausgezeichneten Congruenzgruppe der q^{ten} Stufe gehörige Fundamentalpolygon ein, schliessen aber einstweilen die Ecken*) a desselben von der Betrachtung

*) Diese Ecken liegen auf der Axe der reellen Zahlen.

aus. Wir beschränken uns also zunächst auf solche Werthe $\omega = a + bi$, für welche b einen positiven endlichen und von Null verschiedenen Werth hat.

Es kann nun das Werthsystem $\mathsf{M}_1 : \mathsf{M}_2 : \cdots : \mathsf{M}_{\nu+1}$ *nur dann mit dem Werthsystem* $\mathsf{M}_1' : \mathsf{M}_2' : \cdots : \mathsf{M}_{\nu+1}'$ *coincidiren, wenn die zugehörigen* ω*-Werthe*

$$\omega \text{ und } \omega' = \frac{a\omega + b}{c\omega + d} \tag{1}$$

zu einander relativ äquivalent sind, d. h. wenn sie auseinander durch eine ganzzahlige Substitution der Determinante 1

$$\omega' = \frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta} \equiv \omega \bmod. q \tag{2}$$

hervorgehen.

Denkt man sich diese Substitution bereits in $\frac{a\omega + b}{c\omega + d}$ eingegangen, so erhält man die Gleichung

$$\omega = \frac{a\omega + b}{c\omega + d} \tag{3}$$

oder

$$c\omega^2 + (d - a)\omega - b = 0.$$

Da nun hier die Verhältnisse $a : b : c : d$ modulo q feste Werthe haben und $ad - bc = n$ sein muss, *so ist* ω *der eine Verschwindungspunkt einer quadratischen Form*

$$P\omega^2 + Q\omega + R, \tag{4}$$

für welche die Congruenzen bestehen:

$$\begin{aligned} \pm P &\equiv \mp c \equiv \quad \text{const. mod. } q \\ \pm Q &\equiv \pm (d - a) \equiv \quad \text{,,} \quad \text{,,} \\ \pm R &\equiv \mp b \equiv \quad \text{,,} \quad \text{,,} \end{aligned} \tag{5}$$

Freilich braucht diese Form keine reducirte zu sein, da wir ja ω nicht in das Fundamentaldreieck der absoluten Invariante J, sondern nur in das Fundamentalpolygon der ausgezeichneten Congruenzgruppe der q^{ten} Stufe eingeschlossen haben. Wir können daher auch für eine reducirte Form nicht die Bedingungen (5) verlangen.

Allein die Determinante der Form bleibt bei jeder linearen Transformation ungeändert und diese hat die Gestalt

$$-\Delta = x^2 - 4n,$$

wo $x \equiv \pm (a + d)$ also $x^2 \equiv$ const. mod. q ist. Es kommen also höchstens quadratische Formen von *solchen* Determinanten hier in Betracht. Ihnen allein können Coincidenzen der M und M' entsprechen.

Unsere nächste Frage wird sein: *Wie viele einfache Coincidenzen der* M *und* M' *entsprechen einer gegebenen Klasse von Formen von einer der angegebenen Determinanten?*

Zur Beantwortung dieser Frage ist es nothwendig, wieder jede Form, für welche $x > 0$ ist, zweimal hinzuschreiben und diese zwei

Formen durch das Vorzeichen von $\varkappa$ zu unterscheiden. Dadurch erreichen wir, dass die Coincidenzen der M und M', welche einer quadratischen Form (4) entsprechen, auf eine bestimmte Coincidenz von J und J' bezogen werden können. Die Zahl der Coincidenzen der M und M', welche einem einfachen Punkte $J' = J$ entsprechen, wollen wir das Gewicht λ der zugehörigen Form nennen.

Ferner wollen wir statt ω eine neue Variable ω_ν einführen, welche wir einerseits in das Fundamentaldreieck der Invariante J einschliessen, auf welche wir andrerseits geeignete $\frac{q(q^2-1)}{2}$ lineare Substitutionen der Invariantengruppe anwenden.

Diese letzteren Substitutionen sollen den Substitutionen der Gruppe G (Abschn. I, § 3) isomorph, also modulo q alle von einander verschieden sein.

Mit Hülfe dieser Transformationen wird ω_ν gerade das Fundamentalpolygon, in welches ω eingeschlossen war, beschreiben.

Dadurch erreichen wir, dass wir jetzt reducirte Formen

$$P'\omega_\nu^2 + Q'\omega_\nu + R' \tag{6}$$

annehmen können. Jede solche Form geht durch die $\frac{q(q^2-1)}{2}$ linearen Substitutionen in eben soviele äquivalente Formen über. Von den $\frac{q(q^2-1)}{2}$ Verschwindungspunkten mit positivem imaginären Bestandtheile, welche diesen Formen angehören, liegt in jedem Invariantendreiecke, welches zum Polygon gehört, gerade einer. Für sie alle hat das zugehörige $J' = J\left(\frac{a\omega+b}{c\omega+d}\right)$ denselben Werth *wie* J.

Es ist nun einfach zu sehen, dass λ (wenn man einstweilen von den Formenklassen $(\varrho, 0, \varrho)$ und $(\varrho, \varrho, \varrho)$ absieht) *die Anzahl derjenigen unter den* $\frac{q(q^2-1)}{2}$ *aus einer reducirten Form* (6) *erhaltenen Formen*

$$P_\nu'\omega_\nu^2 + Q_\nu'\omega_\nu + R_\nu'$$

ist, für welche die Grössen P_ν', Q_ν', R_ν' den Bedingungen (5):

$$P_\nu' \equiv \pm c, \quad Q_\nu' \equiv \pm(d-a), \quad R_\nu' \equiv \mp b, \quad \varepsilon\varkappa \equiv \pm(a+d) \text{ mod. } q$$

Genüge leisten. Hier gehören die oberen und die unteren Vorzeichen zusammen und ε hat den Werth $+1$ oder -1, der übrigens so zu bestimmen ist, dass die Congruenz $\varepsilon\varkappa \equiv \pm(a+d)$ nicht gestört wird.

In der That entspricht jeder solchen Form eine und nur eine Gleichung

$$\omega_\nu' = \frac{\frac{-Q_\nu'+\varepsilon\varkappa}{2}\omega_\nu - R_\nu'}{P_\nu'\omega_\nu + \frac{Q_\nu'+\varepsilon\varkappa}{2}}. \tag{7}$$

Es sind aber hier ω_ν' und ω_ν nicht nur äquivalent, sondern auch relativ äquivalent, da die rechte Seite der Gleichung (7) modulo q zu $\frac{a\omega+b}{c\omega+d}$ congruent ist.

§ 8.

Bestimmung des Gewichtes λ.

Das Gewicht λ bestimmt sich im allgemeinen durch folgenden Satz I: *Jedem einfachen von $J=0$ und $J=1$ verschiedenen Coincidenzpunkte $J'(\omega')=J(\Omega_{AB})=J(\omega)$ entsprechen 0 oder g einfache Coincidenzen der* M *und* M′, *wo g die Zahl der besonderen simultanen Substitutionen der Modularcorrespondenz*

$$\omega' \equiv \frac{a\omega+b}{c\omega+d} \text{ mod. } q$$

ist, welche zugleich auch die Gleichungen:

$$M_1 : M_2 : \cdots : M_{\nu+1} = M_1' : M_2' : \cdots : M_{\nu+1}'$$

ungeändert lassen. Diese g Coincidenzen gehen durch jene g besonderen Substitutionen aus einander hervor.

Da hier die Punkte a, b, c, welche $J=\infty$, 1, 0 entsprechen, von der Betrachtung ausgeschlossen sind, so folgt nämlich, dass jedem einfachen Punkte $J(\omega_1)$ genau $\frac{q(q^2-1)}{2}$ Werthsysteme der M und ihnen eindeutig zugeordnet für einen gegebenen Repräsentanten $\Omega_{A,B}$ ebensoviele Werthsysteme der M′ entsprechen. Diese Werthsysteme der M und ebenso die der M′ gehen durch die Substitutionen der Gruppe Γ aus einem unter ihnen hervor (Abschn. I, § 3). Es ist nun klar, dass aus einer Coincidenz

$$(1) \qquad M_1 : M_2 : \cdots : M_{\nu+1} = M_1' : M_2' : \cdots : M_{\nu+1}'$$

der M und M′ sogleich g von einander verschiedene Coincidenzen

$$(2) \qquad M_1^{(\nu)} : M_2^{(\nu)} : \cdots = M_1'^{(\nu)} : M_2'^{(\nu)} : \cdots$$

$$\nu = 1, 2, \cdots, g$$

erhalten werden, wenn man auf (1) die oben bezeichneten g besonderen Substitutionen anwendet. Ausser diesen g Coincidenzen aber existiren keine weiteren mehr. Wäre nämlich eine weitere Coincidenz

$$(3) \qquad M_1^{(g+1)} : M_2^{(g+1)} : \cdots = M_1'^{(g+1)} : M_2'^{(g+1)} : \cdots$$

vorhanden, so könnte man jedenfalls durch eine lineare Substitution Σ der Gruppe Γ das Werthsystem $M_1 : M_2 : \cdots : M_{\nu+1}$ in das Werthsystem $M_1^{(g+1)} : M_2^{(g+1)} : \cdots : M_{\nu+1}^{(g+1)}$ überführen. Zu dieser Substitution der M gäbe es aber nach Abschnitt I, § 5 eine simultane Substitution Σ' der M′, durch welche in Verbindung mit der erstgenannten Substitution Σ die Modularcorrespondenz in sich überginge. Diese Substitution Σ' der M′ müsste auch das Werthsystem $M_1' : M_2' : \cdots$ in

$M_1'^{(g+1)} : M_2'^{(g+1)} : \cdots$ überführen. Da aber diese 2 Werthsysteme der M' mit denen der M übereinstimmen sollen und nur *eine einzige* Substitution der Gruppe Γ das zweite Werthsystem aus dem ersten erhalten lässt, so fiele Σ' mit Σ zusammen. Also würde Σ zu den g besonderen Substitutionen gehören und die Coincidenz (3) wäre mit einer der Coincidenzen (2) identisch. Dies wäre aber ein Widerspruch gegen die Voraussetzung.

Etwas anders verhält sich die Sache für die Punkte $J = J' = 1$ und $J = J' = 0$. Für diese Punkte gilt der Satz II:

Jedem einfachen Punkte $J = J' = 1$ entsprechen 0 oder 1 oder 2 Gruppen von $\frac{g}{2}$ einfachen Coincidenzen der M und M', jedem Punkte $J = J' = 0$ aber 0, 1, 2 oder 3 Gruppen von $\frac{g}{3}$ solchen Coincidenzen. Diese Gruppen von $\frac{g}{2}$ bez. $\frac{g}{3}$ Coincidenzen) gehen aus einer unter diesen durch die g besonderen Substitutionen der Modularcorrespondenz in sich hervor.*

Zunächst bemerke man, dass die Substitutionen der Periode 3 oder 2 von der Gruppe Γ, welche einen solchen Punkt b oder c, für den eine Coincidenz der M oder M' eintritt, festlassen, zu den g besonderen Substitutionen gehört. Für einen Punkt b erkennt man dies auf folgende Weise. Man betrachtet an Stelle der Substitutionen der Gruppe Γ die entsprechenden Substitutionen S der Gruppe G. Man nehme jetzt an, dem Punkte b entspreche der Werth $\omega_\nu = \varrho = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$, dann muss ω_ν, wenn für den Punkt b eine Coincidenz der M und M' wirklich stattfindet, der Bedingung

$$P_\nu \omega_\nu^2 + P_\nu \omega_\nu + P_\nu = 0$$

genügen und es muss, wenn die Modularcorrespondenz durch

$$\omega' \equiv \frac{a\omega + b}{c\omega + d} \bmod. q \tag{4}$$

dargestellt ist (wegen § 7, Gleichung (5))

---

*) Im allgemeinen bleiben bei der in der Gruppe $G_{\frac{q\pm1}{2}}$ von besonderen Substitutionen in diesem Falle enthaltenen Substitution der Periode 2 bez. 3 je $\frac{q\pm1}{2}$ Punkte c oder $\frac{q\pm1}{3}$ Punkte b fest, diese theilen sich in 2 Gruppen von bez. $\frac{q\pm1}{4}$ oder $\frac{q\pm1}{6}$ Punkten. Die Punkte einer solchen Gruppe gehen aus einander bei den Substitutionen jener $G_{\frac{q\pm1}{2}}$ hervor. Dagegen gehen die Punkte der einen Gruppe in jene der andern nur über, wenn eine Gruppe $G_{2.\frac{q\pm1}{2}}$ von besonderen Substitutionen existirt. Die oben genannten $\frac{g}{2}$ oder $\frac{g}{3}$ Coincidenzen beziehen sich auf diese Gruppen von festbleibenden Punkten.

$$c \equiv -b \equiv d - a \bmod. q$$

sein. Die betreffende Correspondenz ist daher durch die Congruenz

$$\omega' \equiv \frac{a\omega - c}{c\omega + (a+c)} \bmod. q$$

dargestellt und man findet nach Abschnitt I, § 5 sogleich, dass die letztere ungeändert bleibt, wenn man auf ω' und ω simultan die Substitution

$$S = \frac{\omega + 1}{-\omega}$$

anwendet. Sie gehört also zu den g besonderen Substitutionen, und da sie ausserdem den Punkt $\varrho = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ fest lässt, so ist für diesen speciellen Fall der Satz bewiesen. Derselbe kann aber sogleich als allgemein gültig betrachtet werden, wenn man bedenkt, dass alle in der Gruppe G enthaltenen Cyklen der Periode 3 gleichberechtigt sind.

Hieraus erkennt man noch ferner, dass die Substitution S, mod. q aufgefasst, die nämlichen zwei festbleibenden Elemente hat (Abschn. I, § 5), wie die reelle (oder imaginäre) Substitution

$$U \equiv \frac{\frac{a}{\sqrt{n}}\omega + \frac{b}{\sqrt{n}}}{\frac{c}{\sqrt{n}}\omega + \frac{d}{\sqrt{n}}} \bmod. q,$$

und dass also eventuell S und U demselben Cyklus $G_{\frac{q\pm1}{2}}$ angehören. Ganz dasselbe ergiebt sich für einen Punkt c, dem eine Coincidenz der M und M′ entspricht.

Hieraus folgt aber, dass aus einer einfachen Coincidenz in einem Punkte b oder c durch die g besonderen Substitutionen nur bez. $\frac{g}{3}$ oder $\frac{g}{2}$ solche Coincidenzen sich ergeben.

Hat man also etwa einen Punkt c, dem eine Coincidenz der M und M′ entspricht, so kann man sofort $\frac{g}{2}$ andere solche Punkte c_r daraus ableiten. Ihnen entsprechen $\frac{g}{2}$ einfache Coincidenzen der M und M′. Damit braucht aber die Zahl der demselben Punkte $J = J'$ entsprechenden Coincidenzen der M und M′ noch nicht erschöpft zu sein. Es liefere etwa der Punkt c_1' eine weitere solche Coincidenz, so kann man wohl, wie oben im allgemeinen Falle geschehen ist, durch simultane Substitutionen Σ und Σ', welche die Modularcorrespondenz in sich überführen, die den Punkten c_1 und c_1' entsprechenden Coincidenzen der M und M′ in einander überführen. Allein diese Substitutionen Σ und Σ' brauchen nicht, wie oben, zusammenzufallen, da es *zwei* Substitutionen giebt, welche das erstere Werthsystem der

M in das letztere überführen. Ist nämlich Σ eine solche Substitution der Gruppe Γ, so ist ΣT die andere, wenn T die Substitution der Periode 2 von dieser Gruppe ist, welche den ersten Punkt c_1 fest lässt. Also kann auch sein, dass die Correspondenz durch die simultanen Substitutionen Σ und ΣT in sich übergeht. Bemerkt man jetzt noch, dass, wenn ein c_1' der zweiten Art existirt, dieses durch die g besonderen Substitutionen gerade in $\frac{g}{2}$ andere übergeführt wird, so erkennt man, dass einem Punkte $J = J' = 1$ entweder 0, oder 1 oder 2 Gruppen von $\frac{g}{2}$ Coincidenzen der M und M′ entsprechen können.

Ganz ähnlich beweist sich der Satz II für die Punkte $J = J' = 0$.

Der Satz II lässt sich noch präciser gestalten, durch folgenden Satz III: *Jedem einfachen Punkte* $J = J' = 1$ *entsprechen* 0 *oder* 2 *Gruppen von* $\frac{g}{2}$ *Coincidenzen der* M *und* M′, *wenn* $\varepsilon x \equiv \pm (a + d) \equiv \pm \sqrt{2n}$*) *ist; in jedem anderen Falle aber entsprechen ihm* 0 *oder* 1 *solche Gruppen. Einem Punkte* $J' = J = 0$ *entsprechen* 0 *oder* 2 *Gruppen von* $\frac{g}{3}$ *Coincidenzen der* M *und* M′, *wenn* $\varepsilon x \equiv \pm (a + d) \equiv \pm \sqrt{3n}$ *oder* $\equiv \pm \sqrt{n}$ *ist; in jedem anderen Falle entsprechen ihm* 0 *oder* 1 *solche Gruppen.*

Es werden nämlich 2 Punktgruppen c_ν und c_ν' von je $\frac{g}{2}$ Punkten c nach den oben gemachten Auseinandersetzungen dann und nur dann existiren, wenn die die Modularcorrespondenz darstellende Congruenz

$$\omega' \equiv \frac{a\omega + b}{c\omega + d} \text{ mod. } q \tag{4}$$

durch simultane Substitutionen $S' \equiv VT$ und $S \equiv V$**) von ω' und ω in sich übergeht, wobei T diejenige Substitution der Periode 2 ist, welche den Punkt c_1 fest lässt.

Nun ist (Abschn. I, § 5)

$$S' = USU^{-1}.$$

Daher muss die Relation bestehen

$$T \cdot U \equiv S^{-1} US \text{ mod. } q. \tag{5}$$

Umgekehrt, ist diese Bedingung erfüllt, so giebt es zur Substitution S von ω die simultane Substitution $S' \equiv ST$ von ω' der betrachteten Congruenz (4) in sich. Nun müssen aber U und T, also auch UT, dieselben 2 festbleibenden Elemente haben, dann sind aber nur 2 Fälle einer Congruenz (4) möglich***), nämlich

---

*) $\sqrt{2n}$ mod. q bedeutet eine Zahl, welche ins Quadrat erhoben $\equiv 2n$ mod. q ist.

**) Diese Substitutionen entsprechen den eben genannten Substitutionen Σ und ΣT der Gruppe Γ.

***) Vergl. die Abh. Ueber die Untergruppen etc. Math. Ann. Bd. XVIII, p. 334.

$$TU \equiv U \quad \text{oder} \quad TU \equiv U^{-1}.$$

Im ersten Falle hat S ebenfalls dieselben 2 festbleibenden Elemente wie U, im 2. Falle vertauscht sie dieselben unter einander. Der erste Fall ist aber unmöglich, also muss

$$T \equiv U^2 \tag{6}$$

sein, d. h. U^2 muss die Periode 2 haben. Umgekehrt reicht aber diese Bedingung auch aus, um 2 Substitutionen S' und S der verlangten Art zu erhalten.

Nun hat

$$U^2 \equiv \begin{matrix} \left(\frac{a^2+bc}{n}\right)\omega + \frac{(a+d)b}{n} \\ \frac{(a+d)c}{n}\omega + \left(\frac{d^2+bc}{n}\right) \end{matrix} \text{ mod. } q$$

die Periode 2, wenn

$$a^2 + d^2 + 2bc \equiv 0 \text{ mod. } q$$

also

$$\varepsilon x \equiv \pm (a+d) \equiv \pm \sqrt{2n}$$

ist. Damit ist der Satz für die Punkte c bewiesen.

Auf gleiche Weise findet man, dass für die Punkte b dann und nur dann 2 Gruppen von $\frac{g}{3}$ auftreten — drei solche Gruppen können nie auftreten —, wenn U^2 die Periode 3 hat, d. h. wenn

$$\frac{a^2+d^2+2bc}{n} \equiv \pm 1 \text{ mod. } q$$

ist. Dies giebt aber für εx eine der beiden Bedingungen:

$$\varepsilon x \equiv \pm (a+d) \equiv \pm \sqrt{3n}$$

oder

$$\varepsilon x \equiv \pm (a+d) \equiv \pm \sqrt{n} \text{ mod. } q.$$

§ 9.

Bestimmung der Klassen von Formen, welche Coincidenzen der M und M′ liefern.

Es ist jetzt nach den Resultaten des § 8 *nur noch die Frage zu entscheiden, ob einer vorgegebenen quadratischen (reducirten) Form von einer der negativen Determinanten*

$$-\Delta = -(4n - x^2), \qquad \varepsilon x \equiv \pm (a+d) \text{ mod. } q \tag{1}$$

eine wirkliche Coincidenz der M *und* M′ *entspricht.*

Sei

$$P\omega_r^2 + Q\omega_r + R \qquad (\varepsilon x) \tag{2}$$

eine gegebene reducirte Form der Determinante

$$Q^2 - 4PR = -(4n - \varkappa^2),$$

für welche P, Q, R mit n keinen gemeinsamen Theiler haben. Dann wird dieselbe durch die Substitution $\omega_\nu' = \frac{\alpha\omega_\nu + \beta}{\gamma\omega_\nu + \delta}$ für ω_ν in die Formen

$$(3) \qquad P_\nu\omega_\nu^2 + Q_\nu\omega_\nu + R_\nu \qquad (\varepsilon\varkappa)$$

übergeführt, wobei folgende Gleichungen bestehen:

$$(4) \quad \begin{aligned} \pm P_\nu &= P\alpha^2 + Q\alpha\gamma + R\gamma^2, \\ \pm Q_\nu &= 2P\alpha\beta + Q(\beta\gamma + \alpha\delta) + 2R\gamma\delta, \\ \pm R_\nu &= P\beta^2 + Q\beta\delta + R\delta^2, \end{aligned}$$

oder umgekehrt

$$(5) \quad \begin{aligned} \pm P &= P_\nu\delta^2 - Q_\nu\delta\gamma + R_\nu\gamma^2, \\ \pm R &= P_\nu\beta^2 - Q_\nu\alpha\beta + R_\nu\alpha^2, \\ \pm Q &= -2P_\nu\beta\delta + Q_\nu(\alpha\delta + \beta\gamma) - 2R_\nu\alpha\gamma. \end{aligned}$$

Offenbar liefert nun die Congruenz (3) dann und nur dann eine Coincidenz der M und M', wenn die Bedingungen (§ 6)

$$P_\nu \equiv \pm c, \quad Q_\nu \equiv \pm(d-a), \quad R_\nu \equiv \mp b, \quad \varepsilon\varkappa \equiv \pm(d+a),$$
$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1$$

stattfinden, d. h. wenn modulo q ist:

$$(6) \quad \begin{aligned} \pm P &\equiv c\delta^2 - (d-a)\delta\gamma - b\gamma^2, \\ \frac{\pm Q + d - a}{2} &\equiv -c\beta\delta + (d-a)\alpha\delta + b\alpha\gamma, \\ \frac{\pm Q - d + a}{2} &\equiv -c\beta\delta + (d-a)\beta\gamma + b\alpha\gamma, \\ \pm R &\equiv c\beta^2 - (d-a)\alpha\beta - b\alpha^2, \\ \alpha\delta - \beta\gamma &\equiv 1. \end{aligned}$$

Hiebei gehören die oberen und die unteren Vorzeichen zusammen.

Die Bedingungen (6) lassen sich aber sogleich ersetzen durch die folgenden:

$$(7) \quad \begin{aligned} \pm P\alpha + \frac{\pm Q + d - a}{2}\gamma &\equiv c\delta, \\ \pm R\gamma + \frac{\pm Q - d + a}{2}\alpha &\equiv -c\beta, \\ \pm P\beta + \frac{\pm Q - d + a}{2}\delta &\equiv b\gamma, \\ \pm R\delta + \frac{\pm Q + (d-a)}{2}\beta &\equiv -b\alpha, \\ \alpha\delta - \beta\gamma &\equiv 1. \end{aligned}$$

Schliesst man jetzt die Formen (P, Q, R) aus, für welche

$$P \equiv Q \equiv R \equiv 0 \text{ mod. } q$$

ist und bemerkt, dass man an Stelle der Form (2) jede andere ihr äquivalente treten lassen kann, so dass man immer den Coefficienten $P \gtrless 0$ mod. q annehmen kann, so erhält man das Resultat, *dass die Gleichungen* (7) *sowie* (6) *dann und nur dann erfüllt sind, wenn* γ *und* δ *die Wurzeln der Congruenz*

$$\pm P \equiv c\delta^2 - (d-a)\delta\gamma - b\gamma^2 \tag{8}$$

sind, und wenn man

$$\alpha \equiv \frac{c\delta - \frac{\pm Q + d - a}{2}\gamma}{\pm P},$$

$$\beta \equiv \frac{b\gamma - \frac{\pm Q - (d+a)}{2}\delta}{\pm P}$$

setzt, wo wieder die oberen und die unteren Vorzeichen zusammengehören.

Es handelt sich also im allgemeinen nur mehr um die Lösbarkeit der Congruenz (8).

Abgeschen hievon ist nur noch für die Formenklassen $(\varrho, 0, \varrho)$ *und* $(\varrho, \varrho, \varrho)$ *eine Bemerkung nothwendig.* Wir haben nämlich in § 8 gesehen, dass jedem Punkte $J' = J = 1$ bez. $J = J' = 0$, entweder 1 oder 2 Gruppen von $\frac{g}{2}$ bez. $\frac{g}{3}$ Coincidenzen der M und M′ entsprechen, wenn überhaupt eine solche Coincidenz existirt.

Nun erinnern wir uns gleichzeitig (§ 2) dass jedem einfachen Punkte $J = J' = 1$ gerade 2 quadratische Formen entsprechen, nämlich

$$\begin{aligned} &(\varrho_1, 0, \varrho_1), \quad x = \pm 2\varrho_2, \text{*)} \\ &(\varrho_2, 0, \varrho_2), \quad x = \mp 2\varrho_1, \end{aligned} \tag{9}$$

wenn

$$4n = 4\varrho_1^2 + 4\varrho_2^2$$

ist. Ebenso entsprechen jedem Punkte $J' = J = 0$ gerade 3 zusammengehörige Formen

$$(\varrho, \varrho, \varrho), \quad \varepsilon x$$

$$\left(\frac{\varrho \mp x}{2}, \frac{\varrho \mp x}{2}, \frac{\varrho \mp x}{2}\right), \quad x_2 = \frac{-\varepsilon x \mp 3\varrho}{2}, \tag{10}$$

wenn

$$4n = x^2 + 3\varrho^2,$$

also auch

*) Hiebei gehören die oberen und unteren Vorzeichen zusammen.

$$4n = \left(\frac{-\varkappa \mp 3\varrho}{2}\right)^2 + 3\cdot\left(\frac{\varrho \mp \varkappa}{2}\right)^2$$

ist.

Da aber für die Modularcorrespondenzen der q^{ten} Stufe

$$\varkappa^2 \equiv \text{const. mod. } q$$

sein muss, so werden im allgemeinen diese zusammengehörigen Formen nicht gleichzeitig unter den Determinanten $-\Delta = -(4n - \varkappa^2)$ auftreten.

Ich behaupte nun: *Es treten immer genau soviele von diesen zusammengehörigen Formen auf, als Gruppen von $\frac{g}{2}$ bez. $\frac{g}{3}$ Coincidenzen dem zugehörigen einfachen Coincidenzpunkte $J' = J = 1$ oder 0 entsprechen.*

In der That, werden die beiden Formen (9) dann und nur dann gleichzeitig auftreten, wenn

$$\varkappa^2 \equiv 4\varrho_1^2 \equiv 4\varrho_2^2$$

also

$$\varkappa \equiv \pm\sqrt{2n} \text{ mod. } q$$

ist, was nach § 8 Satz (III) zu beweisen war.

Von den Formen (10) kann zur ersten Form nur noch eine der übrigen auftreten.

Dies tritt ein, wenn

$$\pm\varkappa \equiv \frac{-\varkappa \mp 3\varrho}{2} \text{ mod. } q$$

ist, d. h. wenn $\pm\varkappa \equiv 3\varrho$ oder $\pm\varkappa \equiv \varrho$ mod. q ist. Setzt man die erhaltenen Werthe von ϱ in die Gleichung

$$4n = \varkappa^2 + 3\varrho^2$$

ein, so ergiebt sich

$$\varkappa \equiv \pm\sqrt{3n} \quad \text{oder} \quad \varkappa \equiv \pm\sqrt{n},$$

was nach § 8, Satz III zu beweisen war.

Also erhält man ganz genau die Anzahlen der zu den Formenklassen $(\varrho, 0, \varrho)$ bez. $(\varrho, \varrho, \varrho)$ gehörigen Coincidenzen der M *und* M', *wenn man wie früher jede auftretende Formenklasse $(\varrho, 0, \varrho)$ als $\frac{1}{2}$, jede auftretende Formenklasse $(\varrho, \varrho, \varrho)$ als $\frac{1}{3}$ zählt, dagegen das zugehörige Gewicht nicht $\frac{g}{2}$ oder $\frac{g}{3}$, sondern g setzt.*

§ 10.

Discussion der Congruenz: $\pm P \equiv c\delta^2 - (a-a)\,\delta\gamma - b\gamma^2$.

Die definitive Erledigung der linken Seiten der Klassenzahlrelationen der q^{ten} Stufe erfordert im allgemeinen noch die Discussion der Lösbarkeit der Congruenz:

$$\pm P \equiv c\delta^2 - (a-a)\,\delta\gamma - b\gamma^2 \tag{8}$$

durch reelle Zahlen γ, δ modulo q.

I. Fall. $\Delta \equiv 0 \bmod. q$.

a) *Zuerst erledigt sich einfachst der früher ausgeschlossene Fall einer Form (P, Q, R), für welche $P \equiv Q \equiv R \equiv 0$ mod. q ist.* Da in diesem Falle

$$\Delta = 4n - x^2 \equiv 0 \bmod. q$$

ist, so kann derselbe nur eintreten, wenn n quadr. Rest mod. q ist. Ferner müssen nach den Formeln (4) in § 9. *die Congruenzen bestehen:*

$$b \equiv c \equiv 0; \quad d \equiv a \equiv \pm\sqrt{n}$$

und

$$\varepsilon x \equiv \pm 2\sqrt{n}.$$

Sind aber diese Bedingungen erfüllt, so erfüllen alle ganzzahligen Lösungen der Gleichung $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen (4), um einer wirklichen Coincidenz der M und M′ zu entsprechen, ob man nun die oberen, oder unteren Vorzeichen nimmt, welche immer einzeln dem positiven oder negativen Werthe von x entsprechen. Also kommen hier alle diese Formen in Betracht. *Die Zahl der Coincidenzen, welche endlichen Punkten $J' = J$ entsprechen, ist also*

$$g \cdot \sum H'\left(\frac{4n - l^2}{q^2}\right)^*),$$

$$g = \frac{q(q^2-1)}{2},$$

wo l alle jene *positiven und negativen* ganzen Zahlen beschreibt, für welche $4n - l^2 \equiv 0 \bmod. q^2$ ist und $l^2 < 4n$ ist. Führt man an Stelle von l einen anderen Summationsbuchstaben x ein, der nur alle positiven Zahlen l beschreibt, so hat man:

$$2g \cdot \sum H'\left(\frac{4n - x^2}{q^2}\right).$$

*) Die Definition von $H'(m)$ siehe (§ 3).

b) *Es sei eine der Grössen b und c nicht* $= 0$ *modulo q, etwa c.* Dann schreibt sich die Congruenz (8) in folgende Gestalt:

$$\pm Pc \equiv \left(c\delta - \frac{d-a}{2}\gamma\right)^2 \text{ mod. } q.$$

Sie hat also nur dann Lösungen, wenn das Legendre'sche Zeichen

(11) $$\left(\frac{\pm cP}{q}\right) \text{ den Werth } 1$$

hat. Ist diese Bedingung erfüllt, so hat die Congruenz Lösungen δ, γ.

Ist jetzt $q \equiv 1$ *mod.* 4, *also* $\left(\frac{-1}{q}\right) = 1$, *so haben entweder nur solche Formen Lösungen, für welche der Charakter,* $\left(\frac{P}{q}\right) = +1$ *oder nur solche Formen, für welche dieser Charakter* -1 *ist und zwar findet das erstere statt, wenn* $\left(\frac{c}{q}\right) = \left(\frac{b}{q}\right) = 1$, *das letztere, wenn* $\left(\frac{c}{q}\right) = -1$ *ist.* Es existiren für das obere und für das untere Vorzeichen in (11) Lösungen, also für positive und negative Werthe x. Ausgeschlossen sind die Formen $P \equiv Q \equiv R$ modulo q.

Bezeichnet man jetzt mit $\mathsf{H}'_{+1}(m)$ *bez.* $\mathsf{H}'_{-1}(m)$ *die Zahl der Klassen quadratischer Formen* $P\omega^2 + Q\omega + R$ *der negativen Determinante* $-m$, *für welche der Charakter* $\left(\frac{P}{q}\right)$ *den Werth* $+1$, *bez.* -1 *hat, und für welche* P, Q, R *weder mit n noch mit q einen gemeinsamen Theiler haben, so kommt als Zahl der den endlichen Werthen* $J' = J$ *entsprechenden Coincidenzen entweder:*

$$g \cdot \sum \mathsf{H}'_{+1}\left(4n - l^2_{2\sqrt{n}}\right) = 2g \cdot \sum \mathsf{H}'_{+1}\left(4n - x^2_{2\sqrt{n}}\right)$$

oder

$$g \cdot \sum \mathsf{H}'_{-1}\left(4n - l^2_{2\sqrt{n}}\right) = 2g \cdot \sum \mathsf{H}'_{-1}\left(4n - x^2_{2\sqrt{n}}\right)$$

$$g = q,$$

je nachdem $\left(\frac{c}{q}\right) = 1$ *oder* -1 *ist.*

Hiebei beschreibt $l_{2\sqrt{n}}$ alle positiven und negativen ganzen Zahlen, welche $\equiv \pm 2\sqrt{n}$ mod. q und deren Quadrate $< 4n$ sind, während x nur die positiven unter diesen Zahlen beschreibt.

Ist hingegen $q \equiv 3$ *mod.* 4, *also* $\left(\frac{-1}{q}\right) = -1$, *so lässt sich für jedes P die Bedingung* (11) *erfüllen, wenn man nur das Vorzeichen in passender Weise wählt. In diesem Falle werden also die quadratischen Formen mit dem Charakter* $\left(\frac{P}{q}\right) = +1$ *sich nicht von jenen Formen*

trennen, für welche jener Charakter $= -1$ *ist.* Dagegen wird von zwei Formen, die nur durch das Vorzeichen von $\varkappa$ von einander verschieden sind, nur immer die eine auftreten, welche dem geeignet gewählten Vorzeichen von (11) entspricht. Ausgeschlossen sind wieder die Formen $P \equiv Q \equiv R \equiv 0 \bmod. q$. *Also ergiebt sich die Abzählung:*

$$g \sum \left[\left(H'\left(4n - \varkappa_{2\sqrt{n}}^2\right)\right) - H'\left(\frac{4n - \varkappa_{2\sqrt{n}}^2}{q^2}\right)\right].$$

Hier ist $\varkappa_{2\sqrt{n}}$ hinzuerstrecken über alle positiven Zahlen $\varkappa_{2\sqrt{n}} \equiv \pm 2\sqrt{n}$, deren Quadrat $< 4n$ ist, wenn man $H'(m)$ immer gleich 0 setzt, so oft m keine ganze Zahl ist.

II. Fall. $\Delta = 4n - b^2 \gtrless 0 \bmod. q$.

Es ist hier klar, dass die Congruenz (8) immer Lösungen hat, wenn $b \equiv c \equiv 0 \bmod. q$ ist. Ist aber eine dieser Grössen, etwa c, von 0 mod. q verschieden, so schreiben wir die Correspondenz (8) in die Gestalt:

$$(12) \qquad \pm P \cdot c \equiv \left(c\delta - \frac{d-a}{2}\gamma\right)^2 + \frac{\Delta}{4} \cdot \gamma^2 \bmod. q.$$

Diese Congruenz hat, da $\pm P$ *immer* > 0 *mod. q angenommen werden kann, unter allen Umständen Lösungen.* Wenn wir nämlich von einem quadratischen Reste R mod. q ausgehen, und die Reihe der Zahlen:

$$(13) \quad z_0 = R,\ z_1 = R \mp Pc,\ z_2 = R \mp 2 \cdot Pc, \cdots, z_{q-1} = R \mp (q-1)Pc$$

bilden, wo entweder die oberen oder unteren Vorzeichen gelten, so erhalten wir q Zahlen z, welche in einer gewissen Reihenfolge zu $0, 1, 2, \cdots, q-1$ mod. q congruent sind. Ist nun $-\Delta =$ quadratischer Nichtrest mod. q, so gehen wir in der Zahlenreihe (13) so weit fort, bis wir auf den ersten quadratischen Nichtrest $z_{\nu+1}$ kommen. Dann erhalten wir die folgende Lösung der Congruenz (12):

$$(13) \qquad \gamma = \sqrt{\frac{4z_{\nu+1}}{-\Delta}}, \quad \delta = \frac{1}{c}\left(z_\nu + \frac{d-a}{2}\gamma\right).$$

Ist aber $-\Delta$ quadratischer Rest modulo q, so lässt sich die Gleichung (12) in die Form schreiben:

$$\pm Pc = \left[\left(c\delta - \frac{d-a}{2}\gamma\right) + \sqrt{-\Delta} \cdot \frac{\gamma}{2}\right] \cdot \left[\left(c\delta - \frac{d-a}{2}\gamma\right) - \sqrt{-\Delta} \cdot \frac{\gamma}{2}\right],$$

welche augenblicklich die Lösbarkeit anzeigt.

Also kommt als Anzahl der den endlichen Punkten $J' = J$ *entsprechenden Coincidenzen die Summe*

$$g \sum H'(4n - l_i^2),$$

wobei l_i alle positiven und negativen ganzen Zahlen beschreibt, welche $\equiv \pm i \equiv \pm (a + d) \bmod. q$ sind und deren absoluter Werth $< \sqrt{4n}$ ist. Ist $i = 0$, so ist auch der Werth $l_0 = 0$ in Betracht zu ziehen. Ferner ist $g = \frac{q+1}{2}$ oder $\frac{q-1}{2}$, je nachdem $-\Delta = l_i^2 - 4n$ quadratischer Nichtrest oder Rest mod. q ist, wenn $i \gtrless 0 \bmod. q$ ist. Ist $i \equiv 0 \bmod. q$, so wird g beziehungsweise gleich $q + 1$ oder $q - 1$ zu setzen sein.

§ 11.

Zusammenstellung der linken Seiten der Klassenzahlrelationen der q^{ten} Stufe.

Wir gehen jetzt von den Klassenzahlsummen für $\mathsf{H}'(m)$, *welche aus den irreductiblen Correspondenzen der* q^{ten} *Stufe entspringen, über zu den Formeln für die Klassenzahl* $\mathsf{H}(m)$ *selbst. Desgleichen führen wir statt der Klassenzahlen* $\mathsf{H}'_{+1}(m)$ *und* $\mathsf{H}'_{-1}(m)$ *die Klassenzahlen* $\mathsf{H}_{+1}(m)$ *und* $\mathsf{H}_{-1}(m)$ *ein. Dieselben sollen die Zahlen aller Klassen quadratischer Formen* $P\omega^2 + Q\omega + R$ *der Determinante* $Q^2 - 4PR = -m \equiv 0$ *mod.* q *bedeuten, welche den quadratischen Charakter* $\left(\frac{P}{q}\right) = +1$ *bez.* $\left(\frac{P}{q}\right) = -1$ *haben. Die Formen* $P \equiv Q \equiv R \equiv 0$ *mod.* q *sind natürlich ausgeschlossen. Ausserdem erweist sich die Festsetzung* $\mathsf{H}_{+1}(0) = \mathsf{H}_{-1}(0) = 0$ *als zweckmässig, analog wie dies für* $q = 5$ *der Fall ist.*

Zu diesem Zwecke bilden wir gleichzeitig alle Modularcorrespondenzen q^{ter} *Stufe der Transformationsgrade* $\frac{n}{\tau^2}$, *wo* τ *jeden Theiler von* n, 1 *eingeschlossen, für welchen* $\frac{n}{\tau^2}$ *eine ganze Zahl ist,* (und im Falle eines reinen Quadrates n auch die Grösse $\sqrt{n}$) *beschreibt.* Die diesen Correspondenzen entsprechenden Coincidenzzahlen werden zu folgenden Summen zusammengefasst:

$$g \sum_{\tau} \sum_{\frac{l_i}{\tau}} \mathsf{H}'\left(\frac{4n}{\tau^2} - l_{\frac{i}{\tau}}^2\right) = g \cdot \sum \mathsf{H}(4n - l_i^2) \text{ etc.}$$

Es ergeben sich dann folgende Resultate:

I. Formeln, die für jedes n gelten und $\Delta = 4n - \varkappa_i^2 \gtrless 0 \bmod. q$ voraussetzen.

$$(1) \qquad z_0 = \left[q - \left(\frac{-\Delta}{q}\right)\right] \cdot \sum \mathsf{H}(4n - \varkappa_0^2),$$

$$(2) \qquad z_i = \left[q - \left(\frac{-\Delta}{q}\right)\right] \cdot \sum \mathsf{H}(4n - \varkappa_i^2).$$

Hiebei beschreibt $\varkappa_0$ ausser Null alle positiven und negativen Zahlen, für welche $4n - \varkappa_0^2$ nicht negativ wird. Ferner beschreibt $\varkappa_i$ alle positiven Zahlen, welche $\equiv +i$ oder $-i$ modulo q sind und nicht grösser als $2\sqrt{n}$ sind, wobei i eine Constante $\gtrless 0$ mod. q bedeutet. $\left(\frac{-\Delta}{q}\right)$ stellt das Legendre'sche Zeichen dar.

II. Formeln, die nur für quadratische Reste n modulo q gelten. Für sie ist $\Delta \equiv 0$ mod. q.

1) $$z_\infty = q(q^2-1)\sum H\left(\frac{4n-\varkappa_{2\sqrt{n}}}{q^2}\right),$$

2) a)
$$\begin{cases} z_\infty^{(+1)} = 2q\sum H_{+1}\left(4n-\varkappa_{2\sqrt{n}}^2\right) \\ z_\infty^{(-1)} = 2q\sum H_{-1}\left(4n-\varkappa_{2\sqrt{n}}^2\right) \end{cases} \text{(wenn } q \equiv 1 \text{ mod. 4 ist),}$$

b) $$z'_\infty = q\sum\left(H\left(4n-\varkappa_{2\sqrt{n}}^2\right) - H\left(\frac{4n-\varkappa_{2\sqrt{n}}^2}{q^2}\right)\right)$$
(wenn $q \equiv -1$ mod. 4 ist).

In diesen Summen beschreibt $\varkappa_{2\sqrt{n}}$ alle positiven ganzen Zahlen, welche $\equiv \pm 2\sqrt{n}$ und nicht grösser als $2\sqrt{n}$ sind mit dem Bemerken, dass immer $H\left(\frac{4n-\varkappa_{2\sqrt{n}}^2}{q^2}\right) = 0$ zu setzen ist, so oft $\frac{4n-\varkappa_{2\sqrt{n}}^2}{q^2}$ keine ganze Zahl ist.

Durch diese Zahlen z sind die Anzahlen der Coincidenzen aller irreductiblen Modularcorrespondenzen q^{ter} Stufe, welche den Transformationsgraden $\frac{n}{\tau^2}$ entsprechen, ausgedrückt. Die Zahl z_i entspricht der Modularcorrespondenz, welche durch die Congruenz

$$\left.\begin{array}{l} \omega' \equiv \frac{a\omega + b}{c\omega + d} \\ (a+d) \equiv i \\ 4n - \varkappa_i^2 \gtrless 0 \end{array}\right\} \text{mod. } q$$

dargestellt ist. Ferner gehört z_∞ zu der durch

$$\omega' \equiv \frac{\sqrt{n}\,\omega}{\sqrt{n}} \text{ mod. } q$$

dargestellten Correspondenz. Die Zahlen $z_\infty^{\pm 1}$, oder z'_∞ treten auf, wenn $4n - \varkappa_i^2 \equiv 0$ mod. q, und eine der beiden Grössen b oder c nicht congruent 0 mod. q ist. Ist dann $q \equiv 3$ mod. 4, so hat man z'_∞, ist aber $q \equiv 1$ mod. 4, so kommt z_∞^{+1} oder z_∞^{-1}, je nachdem $\left(\frac{c}{q}\right) = +1$ oder $= -1$ ist.

§ 12.

Gewisse Coincidenzen, welche den Punkten a entsprechen.

Die in § 11 aufgestellten Ausdrücke z werden zweckmässig noch ergänzt durch gewisse Anzahlen von Coincidenzen, welche den $\frac{q^2-1}{2}$ Ecken $\left[\begin{smallmatrix}\alpha\\ \gamma\end{smallmatrix}\right]$ des Fundamentalpolygons (und $J=\infty$) entsprechen. Dabei bleibt es dahingestellt, ob für eine Stufe q, deren Fundamentalpolygon ein Geschlecht $p>0$ hat, die angegebenen Coincidenzenzahlen hinreichend sind. Aber für $p=0$ — und dieser Fall wird allein hier benutzt — ist die Abzählung nach § 5 strenge richtig.

Wir nehmen an, es seien die Moduln des vollen Systems der ausgezeichneten Congruenzmoduln der q^{ten} Stufe so gewählt, dass sie alle für die Ecke $\left[\begin{smallmatrix}1\\ 0\end{smallmatrix}\right]$ unendlich werden. Dies kann immer erreicht werden, da man statt μ immer eine lineare Function von μ einführen darf. Alle diese Moduln lassen sich dann nach Potenzen von $q=e^{i\pi\omega}$ entwickeln und für $\omega=i\infty$ erhält man eine Entwicklung für die Nähe der Ecke $\left[\begin{smallmatrix}1\\ 0\end{smallmatrix}\right]$ von folgender Gestalt:

$$\mu(\omega)=c\cdot q^{-\alpha}=c\cdot e^{-\alpha i\pi\omega}, \tag{1}$$

wo α eine positive Zahl und c irgend eine Constante bedeutet. Wendet man jetzt auf das System der Moduln μ geeignete Substitutionen der Gruppe Γ an, setzt hernach für die Grössen μ ihre Werthe aus (1) ein, welche für $\omega=i\infty$ der Ecke $\left(\begin{smallmatrix}1\\ 0\end{smallmatrix}\right)$ entsprechen, so erhält man Entwicklungen der Grössen μ in allen Ecken $\left[\frac{\tau}{\varrho}\right]$ von der Gestalt:

$$\mu(\omega)-a=C\cdot q^{\varepsilon}=C\cdot q^{\varepsilon\cdot i\pi\omega}, \tag{2}$$

wo ε positiv und C eine gewisse von Null verschiedene endliche Constante ist. Aus diesen Entwicklungen (1) und (2) leitet man fernerhin Relationen zwischen den Functionen $\mu(\omega)$ und $\mu'(\omega)=\mu[S(\Omega_{AB})]$ ab, welche einer gegebenen Ecke $\left[\frac{\tau}{\varrho}\right]$ von $\mu(\omega)$ entsprechen.

Nun bemerke man, dass der Ecke $\left[\frac{\tau}{\varrho}\right]$ von $\mu(\omega)$ für die durch

$$\omega'\equiv\frac{a\omega+b}{c\omega+d} \text{ mod. } q$$

dargestellte Modularcorrespondenz für eine gegebene Zerlegung $n=A\cdot D$ die Ecke*)

*) Abschnitt I, § 4, Gleichungen (7).

$$\left[\frac{\tau'}{\varrho'}\right] = \left[\begin{array}{c}\frac{a\tau+b\varrho}{A}\\ \hline \frac{c\tau+d\varrho}{A}\end{array}\right]$$

entspricht. Es werden daher dann und nur dann Coincidenzen der μ und μ' für die Ecke $\left[\frac{\tau}{\varrho}\right]$ stattfinden, wenn die beiden Bedingungen:

$$\begin{cases}\tau' \equiv \pm\tau \\ \varrho' \equiv \pm\varrho\end{cases} \text{ mod. } q, \tag{3}$$

oder

$$\begin{cases}\tau(a \mp A) + b\varrho \equiv 0 \\ c\tau + (d \mp A)\varrho \equiv 0\end{cases} \text{ mod. } q \tag{4}$$

stattfinden, wobei die oberen und unteren Vorzeichen zusammengehören. Dazu ist nothwendig, dass die Determinante:

$$(a \mp A)(d \mp A) - b \cdot c \equiv 0 \text{ mod. } q,$$

oder dass:

$$i = d + a \equiv \pm(A + D) \text{ mod. } q$$

ist. Da ferner $A \cdot D = n$ ist, so erhält man schliesslich die Bedingung:

$$\begin{cases}\pm A \equiv \frac{i}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{-\Delta} \\ \pm D \equiv \frac{i}{2} \mp \frac{1}{2}\sqrt{-\Delta}\end{cases} \text{ mod. } q. \tag{5}$$

Hat A einen der ihm in (5) vorgeschriebenen Werthe, so finden im Falle $a \equiv d \equiv \pm A \equiv \sqrt{n} \equiv \pm D$ und $b \equiv c \equiv 0$ mod. q in allen $\frac{q^2-1}{2}$ Punkten a ohne Ausnahme Coincidenzen der μ und μ' statt. Diese $\frac{q^2-1}{2}$ Ecken a gehen durch die g besonderen Substitutionen der Modularcorrespondenz in sich über.

Ist $\Delta \equiv 0$ aber $b \equiv 0$, $c > 0$ mod. q,
(oder $b > 0$, $c \equiv 0$ mod. q),
so erhält man für $\frac{q-1}{2}$ Ecken $\left[\begin{smallmatrix}0\\ \varrho\end{smallmatrix}\right]$ $\left(\text{oder } \left[\begin{smallmatrix}\tau\\ 0\end{smallmatrix}\right]\right)$, wo ϱ, τ alle Werthe von $1, 2, \cdots \frac{q-1}{2}$ beschreiben, Coincidenzen der μ und μ', aber wieder nur für Theiler $A \equiv D \equiv \pm\sqrt{n}$ mod. q.

Ist $-\Delta$ quadratischer Nichtrest von q, so haben die Congruenzen (4) und (5) keine Lösungen.

Ist endlich $-\Delta$ quadratischer Rest von q, so erhält man 2 durch das Vorzeichen von $\sqrt{-\Delta}$ unterschiedene Systeme von $\frac{q-1}{2}$ Ecken $\left[\frac{\tau'}{\varrho'}\right] = \left[\frac{\tau}{\varrho}\right]$, nämlich

$$\left[\frac{-b\varrho}{\left(\frac{a-d}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{-\Delta}\right)\varrho}\right] \quad \text{oder} \quad \left[\frac{\left(\frac{a-d}{2}\mp\frac{1}{2}\sqrt{-\Delta}\right)\varrho}{c\varrho}\right],$$

wobei ϱ die Werthe 1, 2, 3, $\cdots$ $\frac{q-1}{2}$ beschreibt. In ihnen finden Coincidenzen statt, wenn

$$\begin{cases} \pm A \equiv \frac{i}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-\Delta}, \\ \pm D \equiv \frac{i}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{-\Delta}, \end{cases} \quad \text{bez.} \quad \begin{cases} \pm A \equiv \frac{i}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{-\Delta}, \\ \pm D \equiv \frac{i}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-\Delta} \end{cases}$$

ist. Ist dabei $\varkappa > 0 \bmod. q$, so gehen die $\frac{q-1}{2}$ Ecken der ersten, so wie jene der 2. Art durch die $\frac{q-1}{2}$ besonderen Substitutionen der bezüglichen Modularcorrespondenz aus je einer hervor. Bei $\varkappa \equiv 0 \bmod. q$ aber gehen alle $q-1$ Ecken durch jene besonderen Substitutionen aus einer hervor, deren Zahl in diesem Falle auch durch $q-1$ dargestellt ist.

Für eine solche Ecke $\left[\frac{\tau}{\varrho}\right] = \left[\frac{\tau'}{\varrho'}\right]$ *ergeben sich jetzt aus* (1) *und* (2) *die Entwicklungen zwischen* μ' *und* μ *in der Nähe dieser Ecke* (vergl. § 3.)

$$(\mu' - a)^{\frac{D}{T}} = \text{Const.}\,(\mu - a)^{\frac{A}{T}}, \tag{6}$$

oder

$$\mu'^{\frac{D}{T}} = \text{Const.}\,\mu^{\frac{A}{T}}$$

und zwar werden immer $\varphi(T)$ solche Entwicklungen kommen aus jeder Zerlegung $n = A \cdot D$, wie in § 3. Jeder Entwicklung aber entsprechen $\frac{a}{T}$ Coincidenzen, wenn a die kleinere der Zahlen A und D ist, und eine Coincidenz, wenn $\frac{A}{T} = \frac{D}{T} = 1$ ist. Bemerkt muss hierbei werden, dass die in (6) auftretende Constante eine primitive T^{te} Einheitswurzel ist (§ 3.). Die Zahl aller der Ecke $\left[\frac{\tau}{\varrho}\right]$ entsprechenden Coincidenzen ist daher für die irreductible Modularcorrespondenz der n^{ten} Ordnung durch die Zahl

$$\sum \frac{a}{T}\varphi(T)$$

dargestellt, wenn die Summation über alle geeigneten Zerlegungen $n = a \cdot d$, $a < \sqrt{n}$ hinerstreckt wird. *Betrachtet man jetzt wieder zugleich alle irreductiblen Correspondenzen der Transformationsgrade*

$\frac{n}{\tau^2}$, *so erhält man als Zahl der einer gegebenen Ecke* $\left[\frac{\tau}{\varrho}\right] = \left[\frac{\tau'}{\varrho'}\right]$ *entsprechenden Coincidenzen die Summe:*

$$\sum a = U_{\frac{i}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{-\Delta}} + U_{\frac{i}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{-\Delta}}.$$

Bezeichnet man jetzt die Anzahlen aller Coincidenzen der μ *und* μ' *inclusive der eben eingeführten Coincidenzen, welche den Punkten a entsprechen mit* $\sigma_\infty, \cdots$, *so erhält man folgende Resultate:*

I. $\Delta \equiv 0 \bmod. q.$

$$\sigma_\infty = z_\infty + (q^2-1)\, U_{\sqrt{n}},$$
$$\sigma_\infty^{\pm 1} = z_\infty^{\pm 1} + (q-1)\, U_{\sqrt{n}},$$
$$\sigma'_\infty = z'_\infty + (q-1)\, U_{\sqrt{n}}.$$

II. $\left(\frac{-\Delta}{q}\right) = -1,$

$$\sigma_i = z_i.$$

III. $\left(\frac{-\Delta}{q}\right) = 1,$

$$\sigma_i = z_i + (q-1)\cdot U_{\frac{1}{2}\sqrt{-\Delta}+\frac{i}{2}} + (q-1)\cdot U_{\frac{1}{2}\sqrt{-\Delta}-\frac{i}{2}}.$$

Diese letzteren 2 Formeln gelten auch für $i \equiv 0$, wenn man die beiden letzten Summanden zu $2(q-1)\, U_{\frac{1}{2}\sqrt{-\Delta}}$ vereinigt. *Hierbei bedeutet* U_i *die Summe aller Theiler von n, die kleiner als* $\sqrt{n}$ *und* $\equiv \pm i$ *mod. q sind, mit dem Bemerken, dass, wenn n ein reines Quadrat ist und* $\sqrt{n}$ *ebenfalls die Bedingung* $\sqrt{n} \equiv \pm i$ *mod. q erfüllt, zu jener Summe noch* $\frac{1}{2}\sqrt{n}$ *hinzugenommen werden muss.*

§ 13.

Die fertigen Klassenzahlformeln der dritten und fünften Stufe.

Wir können nunmehr für die dritte und fünfte Stufe sogleich die sämmtlichen Klassenzahlrelationen hinschreiben, *da für diese 2 Stufen die ausgezeichnete Congruenzgruppe das Geschlecht Null hat. Also gilt das Chasles'sche Correspondenzprincip nach* (§ 5.) *in voller Strenge.* Nur bemerke man, dass die *reductiblen* Modularcorrespondenzen, wie sie in § 11. und § 12. aufgestellt wurden, und welche

aus einer gewissen Reihe von irreductiblen Correspondenzen bestehen, $\Phi(n) - \Phi(n)$ deutig sind (vergl. § 4.). *Folglich sind die rechten Seiten alle einfach durch* $2\Phi(n)$ *dargestellt.*

Die Formeln der 3. *Stufe sind:*

$$\sigma_\infty = \sigma'_\infty = \sigma_{\pm 1} = \sigma_0 = 2\Phi(n).$$

Anders angeschrieben lauten diese Formeln:

I. $n \equiv 1 \bmod. (3).$

1) $12 \cdot \sum H\left(\frac{4n - x_1^2}{9}\right) = 2\Psi(n) - \Phi(n),$

2) $4 \cdot \sum H(4n - x_1^2) = \Phi(n) + 2\Psi(n),$
$x_1 = 1, 2, 4, 5, \cdots$

3) $2 \cdot \sum H(4n - x_0^2) = \Phi(n),$
$x_0 = 0, \pm 3, \pm 6, \cdots$

II. $n \equiv -1 \bmod. (3).$

1) $\sum H(4n - x_0^2) = \Psi(n),$
$x_0 = 0, \pm 3, \pm 6, \cdots$

2) $2 \cdot \sum H(4n - x_1^2) = \Phi(n).$

Die für die Grössen x_1 und x_0 angedeuteten Zahlenreihen sind soweit fortzusetzen, als $4n - x^2$ nicht negativ wird. Es ist selbstverständlich, dass die Relation der ersten Stufe eine lineare Combination der Formeln 3. Stufe ist.

Ganz ebenso einfach ergeben sich die Formeln der fünften Stufe. Sie sind:

I. *n quadr. Rest mod.* 5.

$$\sigma_\infty = \sigma_\infty^{+1} = \sigma_\infty^{-1} = \sigma_0 = 2\Phi(n),$$
$$\begin{cases} \sigma_1 = 2\Phi(n) \text{ wenn } n \equiv 1 \bmod. 5, \\ \sigma_2 = 2\Phi(n) \quad \text{„} \quad n \equiv -1 \bmod. 5. \end{cases}$$

II. n quadr. Nichtrest mod. 5.

$$\sigma_0 = \sigma_1 = \sigma_2 = 2 \cdot \Phi(n).$$

Setzt man in diese Formeln die Werthe für die Grössen σ aus § 11. und 12. ein, so erhält man die folgenden Resultate:

I. n quadr. Rest mod. 5.

1) $2 \cdot \sum H(4n - x_0^2) = \Phi(n) - 4\,U_{2\sqrt{n}}$,

2) $60 \cdot \sum H\left(\frac{4n - x^2_{2\sqrt{n}}}{25}\right) = \Phi(n) - 12\,U_{\sqrt{n}}$,

3) $5 \cdot \sum H_{+1}\left(4n - x^2_{2\sqrt{n}}\right) = 5 \cdot \sum H_{-1}\left(4n - x^2_{2\sqrt{n}}\right) = \Phi(n) - 2\,U_{\sqrt{n}}$,

4) $3 \cdot \sum H\left(4n - x^2_{\sqrt{n}}\right) = \Phi(n)$.

II. n quadr. Nichtrest mod. 5.

1) $3 \cdot \sum H(4n - x_0^2) = \Phi(n)$,

2) $2 \cdot \sum H\left(4n - x^2_{\sqrt{2n}}\right) = \Psi(n)$,

3) $3 \cdot \sum H\left(4n - x^2_{2\sqrt{2n}}\right) = \Phi(n)$.

Die Bedeutung der vorkommenden Zeichen siehe in § 11. und 12.

Diese Formeln gehen ohne Weiteres in die alten Formeln (Göttinger Nachrichten vom 4. Juni 1879, sowie Math. Annalen, t. 17, pag. 72) über. Dort sind nur die Functionen

$$\Psi_{+1}(n) = \Phi(n) - 2\,U_2,$$
$$\Psi_{-1}(n) = \Phi(n) - 2\,U_1$$

eingeführt.

Die Formeln $\sigma_\infty^{-1} = \sigma_\infty^{+1} = 2 \cdot \Phi(n)$ liefern eine *Fundamentalrelation* im Sinne Kronecker's.

Diese Formeln reichen nämlich zur vollständigen Definition der Klassenzahlen $H_{-1}(m)$ und $H_{+1}(m)$ vollkommen aus. Da aber beide Formeln übereinstimmen und $H_{+1}(0) = H_{-1}(0)$ist, *so ergiebt sich aus der Theorie der elliptischen Modulfunctionen für die 5. Stufe die Fundamentalrelation:*

$$H_{+1}(m) = H_{-1}(m).$$

Bamberg, im Juni 1882.

Ueber unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten.

Von

GEORG CANTOR in Halle a. d. Saale.

(Fortsetzung des Artikels in Bd. XX, pag. 113.)

4.

Es sollen jetzt im Anschluss an die vorangegangenen Entwickelungen verschiedene neue Sätze aufgestellt und bewiesen werden, die sowohl an sich von Interesse, wie auch in der Functionentheorie von Nutzen sind. Dabei bedienen wir uns der folgenden Bezeichnungen.

Sind mehrere Punktmengen $P_1, P_2, P_3,$ paarweise ohne Zusammenhang, so wollen wir, wenn P die aus ihrer Zusammenfassung hervorgehende Menge ist, an Stelle einer früher gebrauchten Formulirung (Bd. XVII, pag. 355) die bequemere wählen:

$$P \equiv P_1 + P_2 + P_3 + \cdots.$$

Und im Einklange hiermit möge, wenn Q eine in P enthaltene Menge und R diejenige Menge ist, welche übrig bleibt, wenn man Q von P entfernt, geschrieben werden:

$$R \equiv P - Q.$$

Eine Punktmenge Q, die wir uns in einem n-dimensionalen stetigen Raume liegend denken, kann so beschaffen sein, dass *kein* zu ihr gehöriger Punkt zugleich Grenzpunkt derselben ist; eine solche Menge, für welche also

$$\mathfrak{D}(Q, Q') \equiv 0,$$

nennen wir eine *isolirte* Punktmenge. Hat man *irgend* eine Punktmenge P, die *nicht* isolirt ist, so geht aus ihr eine *isolirte* Q dadurch hervor, dass man von ihr die Menge $\mathfrak{D}(P, P')$ entfernt.

Hier ist also:

$$Q \equiv P - \mathfrak{D}(P, P')$$

und folglich:

$$P \equiv Q + \mathfrak{D}(P, P').$$

Jede Punktmenge kann also zusammengesetzt werden aus einer isolirten Menge Q und aus einer andern R, welche Divisor der Ab-

leitung P' ist. Beachten wir ferner, worauf wiederholt aufmerksam gemacht worden ist, dass jede höhere Ableitung einer P in der vorhergehenden Ableitung enthalten ist, so folgt, dass:

$$P' - P'', \; P'' - P''', \; \cdots, \; P^{(\nu)} - P^{(\nu+1)}, \; \cdots$$

lauter *isolirte* Mengen sind.

Man hat aber die für das folgende wichtigen Zerlegungen:

$$P' \equiv (P' - P'') + (P'' - P''') + \cdots + (P^{(n-1)} - P^{(n)}) + P^{(n)}$$

und:

$$P' \equiv (P' - P'') + (P'' - P''') + \cdots + (P^{(\nu-1)} - P^{(\nu)}) + \text{in infinitum} + P^{(\infty)}.$$

Von isolirten Punktmengen gilt nun der folgende Satz:

Theorem I. *Jede isolirte Punktmenge ist abzählbar, gehört also zur ersten Classe.*

Beweis. Q sei irgend eine innerhalb eines n-dimensionalen Raumes gelegene *isolirte* Punktmenge, q sei ein Punkt derselben, $q', q'', q''', \cdots$ seien die übrigen Punkte von Q.

Die Entfernungen $\overline{qq'}, \overline{qq''}, \overline{qq'''}, \cdots$ haben eine *untere Grenze*, welche mit ϱ bezeichnet werde.

Ebenso sei ϱ' die untere Grenze der Entfernungen $\overline{q'q}, \overline{q'q''}, \overline{q'q'''}, \cdots$, ϱ'' die untere Grenze der Entfernungen $\overline{q''q}, \overline{q''q'}, \overline{q''q'''}, \cdots$ u. s. w.

Alle diese Grössen $\varrho, \varrho', \varrho'', \cdots$ *sind von Null verschieden*, weil Q eine *isolirte* Menge ist.

Man beschreibe mit q als Mittelpunkt dasjenige $(n-1)$-dimensionale Gebilde, dessen Punkte von q die Entfernung $\frac{\varrho}{2}$ haben; dieses Gebilde begrenzt eine n-dimensionale Vollkugel, welche wir mit K bezeichnen wollen. Ganz ebenso bilde man eine zum Punkte q' als Mittelpunkt gehörige Vollkugel K' mit dem Radius $\frac{\varrho'}{2}$, eine zum Punkte q'' als Mittelpunkt gehörige Vollkugel K'' mit dem Radius $\frac{\varrho''}{2}$ u. s. w.

Es ist nun wesentlich, dass irgend zwei dieser Vollkugeln, z. B. K und K' sich höchstens berühren können, sonst aber ganz ausser einander liegen.

Dies hängt damit zusammen, dass, wie aus der Definition der Grössen ϱ und ϱ' folgt, beide kleiner oder gleich $\overline{qq'}$, also die Radien $\frac{\varrho}{2}, \frac{\varrho'}{2}$ der beiden Kugeln K und K' nicht grösser sind als die Hälfte der Centrallinie $\overline{qq'}$.

Somit bilden die Vollkugeln $K, K', \cdots$ einen Inbegriff von ausser einander liegenden n-dimensionalen Theilgebieten des zu Grunde ge-

legten n-dimensionalen Raumes; ein derartiger Inbegriff ist aber, wie im XX. Bd. pag. 117 bewiesen worden ist, immer *abzählbar*. Folglich bilden auch die Mittelpunkte $q, q', q'', \cdots$ eine abzählbare Menge, d. h. Q ist abzählbar.

Wir sind nun im Stande die folgenden Sätze zu bringen.

Theorem II. *Ist die Ableitung P' einer Punktmenge P abzählbar, so ist P gleichfalls abzählbar.*

Beweis. Man bezeichne den grössten gemeinsamen Divisor von P und P' mit R, so dass:

$$R \equiv \mathfrak{D}(P, P')$$

und setze:

$$P - R \equiv Q.$$

Q ist alsdann, wie wir schon oben gesehen haben, eine *isolirte* Menge, also abzählbar nach Th. I.

R ist abzählbar, weil es ein Bestandtheil der als abzählbar vorausgesetzten Menge P' ist.

Die Zusammenfassung zweier abzählbaren Mengen ergiebt aber stets wieder eine abzählbare Menge; daher ist $P \equiv Q + R$ abzählbar.

Theorem III. *Jede Punktmenge der ersten Gattung und n^{ter} Art ist abzählbar.*

1^{ter} Beweis. Für Punktmengen 0^{ter} Art ist der Satz einleuchtend, weil solche offenbar *isolirte* Punktmengen sind. Wir wollen nun eine vollständige Induction ausführen, indem wir annehmen, es sei der Satz für Punktmengen 0^{ter}, 1^{ter}, $2^{ter} \cdots (n-1)^{ter}$ Art richtig und wollen unter dieser Voraussetzung zeigen, dass er auch richtig ist für Punktmengen der n^{ten} Art.

Ist P eine Pm. der n^{ten} Art, so ist P' von der $(n-1)^{ten}$ Art; P' ist also abzählbar der Voraussetzung nach, folglich auch P abzählbar nach Th. II.

2^{ter} Beweis. Ist P eine Punktmenge n^{ter} Art, so ist $P^{(n)}$ von der 0^{ten} Art, also eine isolirte Pm.

Man hat nun:

$$P' \equiv (P' - P'') + (P'' - P''') + \cdots + (P^{(n-1)} - P^{(n)}) + P^{(n)}.$$

Hier sind alle Bestandtheile auf der rechten Seite $(P' - P'')$, $(P'' - P''')$, $\cdots$, $(P^{(n-1)} - P^{(n)})$ und $P^{(n)}$ *isolirte* Mengen, also nach Th. I sämmtlich abzählbar, folglich ist auch die aus ihrer Zusammenfassung entstehende Menge P' abzählbar, daher nach Th. II auch P abzählbar.

Theorem IV. *Jede Punktmenge P der zweiten Gattung, für welche $P^{(\infty)}$ abzählbar, ist selbst abzählbar.*

Der Beweis dieses Satzes ergiebt sich aus der Zerlegung:

$$P' \equiv (P' - P'') + \cdots + (P^{(\nu-1)} - P^{(\nu)}) + \cdots \text{ in infinitum } + P^{(\infty)}.$$

Da nämlich alle Bestandtheile der rechten Seite abzählbar sind und die *Anzahl* dieser Bestandtheile eine *abzählbar unendliche* ist, so folgt daraus die Abzählbarkeit von P' und nach Th. II diejenige von P.

Versteht man unter α irgend eines der in Bd. XVII pag. 357 eingeführten *Unendlichkeitssymbole*, so hat man den umfassenderen Satz:

Theorem V. *Jede Punktmenge P zweiter Gattung, für welche $P^{(\alpha)}$ abzählbar, ist selbst abzählbar.*

Der Beweis dieses Satzes wird mit Hülfe vollständiger Induction ebenso geführt wie die Beweise der Theoreme III und IV.

Die letzten Sätze kann man auch in folgender Weise formuliren:

Ist P eine nicht abzählbare Punktmenge, so ist auch $P^{(\alpha)}$ nicht abzählbar, sowohl wenn α eine endliche ganze Zahl, wie auch wenn es eines der Unendlichkeitssymbole ist. —

Bei Untersuchungen, welche die Herren du Bois-Reymond und Harnack über gewisse Verallgemeinerungen von Sätzen der Integralrechnung angestellt haben, werden lineare Punktmengen gebraucht, welche die Beschaffenheit haben, dass sie sich in eine endliche Anzahl von Intervallen einschliessen lassen, *so dass die Summe aller Intervalle kleiner ist, als eine beliebig vorgegebene Grösse.*

Damit eine lineare Punktmenge die hierdurch ausgedrückte Eigenschaft besitze, ist es offenbar nothwendig, dass sie in keinem noch so kleinen Intervalle überalldicht sei; doch scheint diese letztere Bedingung nicht auszureichen um einer Punktmenge die erwähnte Beschaffenheit zu verleihen. Dagegen sind wir im Stande den folgenden Satz zu beweisen.

Theorem VI. *Ist eine in einem Intervalle (a, b) enthaltene lineare Punktmenge P so beschaffen, dass ihre Ableitung P' abzählbar ist, so ist es immer möglich P in eine endliche Anzahl von Intervallen mit beliebig kleiner Intervallsumme einzuschliessen.*

Bei dem gleich folgenden Beweise werden hülfsweise die folgenden Sätze gebraucht, von denen der erste eine bekannte Eigenschaft stetiger Functionen ausspricht, die beiden anderen von unseren früheren Betrachtungen her bekannt sind.

Hülfssatz I. Eine in einem Intervalle (c, d) der stetigen Veränderlichen x gegebene, stetige Function $\varphi(x)$, welche an den Grenzen *ungleiche* Werthe $\varphi(c)$ und $\varphi(d)$ hat, nimmt irgend einen in den Grenzen $\varphi(c)$ und $\varphi(d)$ liegenden Werth y zum Mindesten einmal an.

Hülfssatz II. Eine in einer unendlichen Graden liegende unendliche Anzahl von Intervallen, die ausser einander liegen, höchstens an ihren Grenzen zusammenstossen, ist immer abzählbar.

Hülfssatz III. Hat man eine abzählbar unendliche Menge von Grössen:

$$\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_\nu, \cdots,$$

so lässt sich in jedem vorgegebenen Intervalle eine Grösse η finden, welche unter jenen Grössen nicht vorkommt.

Beweis von Theorem VI. Das Intervall (a, b), in welchem P liegt, nehmen wir zur Vereinfachung so an, dass $a = 0$, $b = 1$, auf welchen Fall sich der allgemeine durch Transformation leicht zurückführen lässt. P liegt also im Intervall $(0, 1)$, das Gleiche gilt offenbar von P' und von derjenigen Menge, welche aus der Zusammenfassung der Punkte von P und P' hervorgeht und die wir mit Q bezeichnen wollen.

Es ist:

$$Q \equiv \mathfrak{M}(P, P').$$

Wir bezeichnen ferner mit R diejenige Pm. im Intervalle $(0, 1)$, welche von letzterem nach Abzug der Menge Q übrig bleibt, so dass:

$$(0, 1) \equiv Q + R. \tag{1}$$

Mit der vorausgesetzten Abzählbarkeit der Menge P' hängt zunächst folgendes zusammen:

1. Es ist auch P abzählbar nach Th. II, *daher ist auch Q abzählbar.*

2. Es ist P und daher auch P' in keinem Intervalle überalldicht; wäre nämlich P überalldicht im Intervalle (i, k), so würden alle Punkte des letzteren zu P' gehören und es könnte P' nicht abzählbar sein, nach Hülfssatz III. *Daher ist auch Q in keinem Intervalle überalldicht.* Die Coordinatenwerthe, welche den Punkten der abzählbaren Menge Q entsprechen, mögen sein:

$$u_1, u_2, \cdots, u_\nu, \cdots \cdot \tag{2}$$

Betrachten wir nunmehr die Menge R, so lässt sich zeigen, dass die ihren Punkten entsprechenden Coordinatenwerthe übereinstimmen mit sämmtlichen *inneren* Werthen einer unendlichen Reihe von Intervallen:

$$(c_1, d_1), (c_2, d_2), \cdots, (c_\nu, d_\nu), \cdots, \tag{3}$$

welche ausser einander liegen und natürlich im Intervalle $(0, 1)$ enthalten sind. Da nur die *inneren* Werthe dieser Intervalle zu Punkten der Menge R gehören, so folgt aus der Relation (1) sofort, dass die Grenzen c_ν und d_ν dieser Intervalle Punkten der Menge Q entsprechen, also in der Reihe (2) vorkommen.

In der That sei r ein Punkt von R, so können Punkte von Q nicht unendlich nahe an r herantreten, weil sonst r ein Grenzpunkt von P wäre, folglich zu Q gehören würde. Es muss nun links von r ein Punkt c und rechts von r ein Punkt d liegen, so dass im Innern

des Intervalles (c, d) kein Punkt von Q liegt, dagegen ausserhalb dieses Intervalles Punkte von Q in beliebiger Nähe von c und d vorkommen; weil aber jeder Grenzpunkt von Q zu Q mitgehört, so sind c und d selbst zu Q gehörige Punkte. Die unendlich vielen Intervalle (c, d), welche auf solche Weise entstehen, liegen alle offenbar ausser einander und bilden daher nach Hülfssatz II eine abzählbare Menge (3), wie zu beweisen war. —

Die Grösse des Intervalles (c_ν, d_ν) ist, da wir $c_\nu < d_\nu$ voraussetzen:

$$= d_\nu - c_\nu.$$

Die Summe aller dieser Intervallgrössen wollen wir σ nennen, so dass:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} (d_\nu - c_\nu) = \sigma. \tag{4}$$

Von vornherein sieht man, dass $\sigma \leqq 1$, weil die Intervalle alle ausser einander liegen und im Intervalle $(0, 1)$ enthalten sind. Wären wir nun im Stande zu zeigen, dass $\sigma = 1$, also die Möglichkeit $\sigma < 1$ ausgeschlossen ist, so würde damit, wie eine höchst einfache an die Bedeutung der Intervalle (c_ν, d_ν) anknüpfende Betrachtung zeigt, unser Theorem VI bewiesen sein.

Es geht also unser Beweis darauf aus zu zeigen, dass die Annahme $\sigma < 1$ zu einem Widerspruche führt. —

Zu dem Ende definiren wir für $0 < x \leqq 1$ eine Function $f(x)$ wie folgt: Man summire die Grössen aller Intervalle (c_ν, d_ν), soweit die letzteren in das Innere des Intervalles $(0, x)$ hineinfallen und setze diese Summe $= f(x)$. (Dabei soll von einem Intervalle (c_ν, d_ν), welches theilweise ausserhalb $(0, x)$ liegt, nur der entsprechende in das Innere von $(0, x)$ fallende Theil in diese Summe aufgenommen werden.)

Man hat offenbar:

$$f(1) = \sigma.$$

Setzt man ausserdem fest, dass $f(0) = 0$ sei, so folgt leicht, dass $f(x)$ eine *stetige* Function von x ist für $0 \leqq x \leqq 1$.

Aus der Definition von $f(x)$ folgt nämlich unmittelbar, dass wenn x und $x + h$ zwei verschiedene Werthe des Intervalles $(0, 1)$ sind, man für positive Werthe von h hat:

$$f(x + h) - f(x) \gtreqless \frac{0}{h}.$$

Hieraus folgert man die Stetigkeit von $f(x)$.

Es zeigt sich ferner sofort, wenn man auf die Definition von $f(x)$ zurückgeht, dass *wenn x und $x + h$ zwei verschiedene Werthe eines und desselben Theilintervalles (c_ν, d_ν) sind, man hat:*

$$f(x + h) - f(x) = h,$$

also auch:

$$(x + h) - f(x + h) = x - f(x).$$

Führt man daher die Function

$$\varphi(x) = x - f(x),$$

ein, so ist auch $\varphi(x)$ eine *stetige* Function von x, welche, wenn x von 0 bis 1 wächst, sich ohne Abnahme von 0 bis $1 - \sigma$ ändert. *Diese Aenderung geschieht so, dass innerhalb eines der Theilintervalle* (c_ν, d_ν) *die stetige Function* $\varphi(x)$ *einen constanten Werth behält.*

Daraus folgt für die Function $\varphi(x)$ die Eigenthümlichkeit, dass *alle von ihr angenommenen Werthe durch die Werthreihe:*

$$\varphi(u_1),\ \varphi(u_2),\ \cdots,\ \varphi(u_\nu),\ \cdots \tag{5}$$

erschöpft werden.

In der That kann x entweder einem der Werthe u_ν gleich sein, in diesem Falle haben wir:

$$\varphi(x) = \varphi(u_\nu).$$

Oder es ist x ein Werth im Innern eines der Intervalle (c_ν, d_ν); in diesem Falle haben wir wegen der Constanz von $\varphi(x)$ innerhalb eines solchen Intervalles:

$$\varphi(x) = \varphi(c_\nu) = \varphi(d_\nu).$$

Nun gehören aber, wie wir oben gesehen, die Werthe c_ν und d_ν gleichfalls zu der Reihe (2), es ist etwa:

$$c_\nu = u_\lambda.$$

Folglich hat man auch in diesem Falle:

$$\varphi(x) = \varphi(u_\lambda).$$

In der Reihe (5) sind also alle Werthe enthalten, welche $\varphi(x)$ überhaupt annehmen kann.

Die Werthmenge, welche die stetige Function $\varphi(x)$ annehmen kann, ist somit *abzählbar.*

Wäre nun $\sigma < 1$, also $1 - \sigma$ von Null verschieden, so würde nach Hülfssatz I die stetige Function $\varphi(x)$ jeden Werth y zwischen 0 und $1 - \sigma$ mindestens einmal annehmen. Folglich würden in der Reihe (5), welche, wie soeben gezeigt worden ist, alle von der Function $\varphi(x)$ angenommenen Werthe erschöpft, alle möglichen Zahlen des Intervalles $(0,\ 1 - \sigma)$ vorkommen, was dem Hülfssatze III entgegen steht. Somit bleibt nur die Annahme $\sigma = 1$ übrig, was zu beweisen war.

Zum Schlusse möchte ich eine in der vorigen Nummer dieser Abhandlung (Bd. XX pag. 118) enthaltene Constantenangabe berich-

tigen, wenn auch für die dortigen Zwecke auf deren Genauigkeit nichts ankommt. Der n-dimensionale Rauminhalt des mit B bezeichneten Gebildes findet sich bei genauerer Untersuchung:

$$= \frac{2\pi^{\frac{n+1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)},$$

eine Zahl, die nur in den Fällen $n = 1$ und $n = 2$ mit $2^n\pi$ zusammenfällt, sonst aber kleiner als $2^n\pi$ ist.

Harzburg, 1. September 1882.

Ueber eindeutige Functionen mit mehreren, nicht vertauschbaren Perioden. II.

Von

Otto Rausenberger in Frankfurt a. M.

In dem ersten Theile der vorliegenden Abhandlung (Annalen XX, pag. 187) liess ich die Behandlung der Gruppen

$$y = x + 1, \quad y = -\frac{a}{x+b}$$

für $0 < a \leqq \frac{1}{4}$, b von Null verschieden, unausgeführt, da dieselbe auf ausserordentliche Complicationen zu stossen schien. Eine erneute Inangriffnahme des Gegenstandes zeigte indessen, dass die vorhandenen scheinbaren Schwierigkeiten sich leicht überwinden und die fraglichen Gruppen sich in allgemeinster Form darstellen lassen. Durch die folgenden Entwicklungen wird die Untersuchung für reelle, positive a und reelle b vollständig abgeschlossen, während gleichzeitig auch gewisse Fälle complexer a und b in Betracht gezogen werden. Die früher gefundenen Gruppen der erweiterten und der parametrischen Modulfunctionen werden als Specialfälle — die sich allerdings scharf von den übrigen abheben — der Gruppen erscheinen, die uns im Folgenden beschäftigen sollen.

§ 1.

Eintheilung in 3 Hauptfälle.

1) Ist in der reellen Gruppe

$$(1) \qquad y = x + 1, \quad y = \varphi_1(x) = -\frac{a}{x+b}$$

$0 < a \leqq \frac{1}{4}$, $-\frac{1}{2} \leqq b \leqq \frac{1}{2}$ (was immer zu bewerkstelligen ist), so stellt $\varphi_1(x)$ (vgl. I, pag. 193) eine rational oder irrational cyklische Periode dar, wenn $b^2 - 4a < 0$ ist; das Gleiche gilt für $\varphi_1(x \pm 1) = -\frac{a}{x+b\pm 1}$, wenn $(b \pm 1)^2 - 4a < 0$ wird; das Zeichen $\pm$ ist

so zu wählen, dass mod. $(b \pm 1) < 1$ wird. Hiernach erhalten wir 3 Hauptfälle:

a) $\varphi_1(x)$ und $\varphi_1(x \pm 1)$ sind beide cyklisch; alsdann werden die Bedingungen aufzustellen sein, unter denen beide *rational* cyklisch sind, und diese werden sich unter einer gewissen Beschränkung als hinreichend für die Zulässigkeit der Gruppen erweisen.

b) $\varphi_1(x)$ ist cyklisch, $\varphi_1(x \pm 1)$ ist hyperbolisch oder im Grenzfall parabolisch; alsdann ist nur eine Bedingung zu befriedigen, und in den zugehörigen Functionen wird *ein* variabler Parameter auftreten.

c) $\varphi_1(x)$ und $\varphi_1(x \pm 1)$ sind beide hyperbolisch oder parabolisch; dann sind gar keine weiteren Bedingungen zu erfüllen und die zugehörigen Functionen enthalten *zwei* Parameter. — In den beiden letzten Fällen wird eine Ausdehnung auf complexe Gruppen möglich sein.

2) Für $16 < a$ ist immer $b^2 - 4a < 0$, und die Gruppe gehört der ersten oder zweiten Classe an; für $0 < a \leqq 16$ dagegen gehört sie zur zweiten oder dritten Classe, da alsdann jedenfalls $(b \pm 1)^2 - 4a > 0$ ist.

§ 2.

Erster Hauptfall.

1. Damit $\varphi_1(x)$ eine rational cyklische Periode sei, muss es (s. I, pag. 199) die Form annehmen:

$$\varphi_1(x) = -\frac{\dfrac{c^2}{4\sin^2\dfrac{\varphi}{2}}}{x + c\operatorname{cotang}\dfrac{\varphi}{2}}, \tag{1}$$

worin φ vorläufig nur ein *rationaler* Bruchtheil von 2π zu sein braucht. Indessen lässt es sich leicht darthun, dass wir uns auf den Fall $\varphi = \frac{2\pi}{n}$ beschränken dürfen; denn dieselbe Betrachtung, wie in I, pag. 199 zeigt, dass andernfalls ein $\varphi_\varkappa(x)$ eine grössere Determinante wie $\varphi_1(x)$ besitzen würde; in Folge dessen könnte entweder $\varphi_1(x)$ unmöglich sein (wenn die Determinante von $\varphi_\varkappa(x)$ die Einheit übersteigen würde, ein Fall der übrigens nicht eintreten kann, wenn c hinlänglich klein gewählt wird), oder wir würden auf eine erweiterte Modulgruppe geführt, oder $\varphi_\varkappa(x)$ würde demselben Gebiet wie $\varphi_1(x)$ angehören. Jedenfalls leuchtet ein, dass man auch $\varphi_1(x)$ als Iterirung von $\varphi_\varkappa(x)$ betrachten kann und dass sich daher $\varphi_\varkappa(x)$ ebensogut zur Erzeugung der Gruppe verwenden lässt wie $\varphi_1(x)$. — Die Constante c bestimmt sich durch die Bedingung, dass auch $\varphi_1(x \pm 1) = -\frac{a}{x+b\pm 1}$ rational cyklisch sein soll. Wir müssen nämlich setzen

$$(2) \qquad \varphi_1(x \pm 1) = -\frac{\frac{C^2}{4\sin^2\frac{\psi}{2}}}{x + C\,\mathrm{cotang}\,\frac{\psi}{2}},$$

woraus durch Vergleich mit (1) folgt

$$(3) \qquad \frac{c^2}{4\sin^2\frac{\varphi}{2}} = \frac{C^2}{4\sin^2\frac{\psi}{2}}$$

und

$$(4) \qquad c\,\mathrm{cotang}\,\frac{\varphi}{2} \pm 1 = C\,\mathrm{cotang}\,\frac{\psi}{2},$$

woraus wir unter Berücksichtigung, dass c und C entgegengesetzte Zeichen haben, nach Elimination von C erhalten:

$$(5) \qquad c = \pm \frac{\sin\frac{\varphi}{2}}{\cos\frac{\varphi}{2} + \cos\frac{\psi}{2}},$$

$$(6) \qquad \varphi_1(x) = -\frac{\frac{1}{4\left(\cos\frac{\varphi}{2} + \cos\frac{\psi}{2}\right)^2}}{x \pm \frac{\cos\frac{\varphi}{2}}{\cos\frac{\varphi}{2} + \cos\frac{\psi}{2}}}$$

und

$$(7) \qquad \varphi_1(x \pm 1) = -\frac{\frac{1}{4\left(\cos\frac{\varphi}{2} + \cos\frac{\psi}{2}\right)^2}}{x \mp \frac{\cos\frac{\psi}{2}}{\cos\frac{\varphi}{2} + \cos\frac{\psi}{2}}}.$$

Auch bei ψ dürfen wir uns auf $\psi = \frac{2\pi}{n}$ beschränken; ferner müssen wir, da mod. $b \leqq \frac{1}{2}$ sein soll, $\cos\frac{\psi}{2} < \cos\frac{\varphi}{2}$, also $\varphi > \psi$ nehmen. Bemerkenswerth ist es, dass sich bei dieser Classe keine *complexen* Gruppen ergeben.

2. Um die wirkliche Existenzberechtigung der soeben gefundenen, doppelt unendlichen Gruppenreihe nachzuweisen, führen wir die zugehörige Eintheilung der Ebene in Parcellen durch, bei der ein wesentlich neues Moment im Vergleich zu den früher behandelten Gruppen auftritt. Zur Herstellung eines in's Unendliche reichenden Fundamentalpolygons für die Gruppe

$$y = x + 1, \quad y = -\frac{a}{x}$$

brauchen wir 2 parallele Gerade, deren auf der Abscissenaxe gemessener Abstand 1, deren Richtung und Lage im Uebrigen aber willkürlich ist, sowie einen um den Nullpunkt beschriebenen Kreis mit dem Radius mod. $a^{\frac{1}{2}}$ oder eine Abbildung desselben durch $y = x \pm k$. Dieser Kreis, den ich als *Fundamentalkreis* bezeichnen will, wird durch die Periode $y = -\frac{a}{x}$ in sich selbst abgebildet, während ein ausserhalb des Kreises gelegener Punkt in einen inneren transformirt wird und umgekehrt. Auch für die zur Gruppe

$$y = x + 1, \quad y = \varphi_1(x) = -\frac{a}{x+b}$$

gehörige Eintheilung brauchen wir dieselben Geraden und denselben *primären Fundamentalkreis* mit dem Nullpunkt als Mittelpunkt und mod. $a^{\frac{1}{2}}$ als Radius; allein es tritt noch ein *secundärer Fundamentalkreis* hinzu, der dem primären congruent ist und dessen Mittelpunkt im Punkte $-b$ liegt; aus diesen beiden Fundamentalkreisen geht durch Abbildung mittelst $y = x \pm k$ ein Kreissystem hervor, dessen benachbarte Individuen sich in unserem ersten Hauptfall schneiden. Die Bedeutung des primären und des secundären Fundamentalkreises ist leicht zu erkennen. Durch die Substitution $y = \varphi_1(x)$ wird der secundäre Kreis in den primären transformirt; ein Punkt ausserhalb des ersteren geht in einen solchen innerhalb des letzteren, ein Punkt innerhalb des ersteren in einen solchen ausserhalb des letzteren über. Für die Substitution $y = \varphi_1(x \pm 1)$ spielen der primäre Kreis einer-

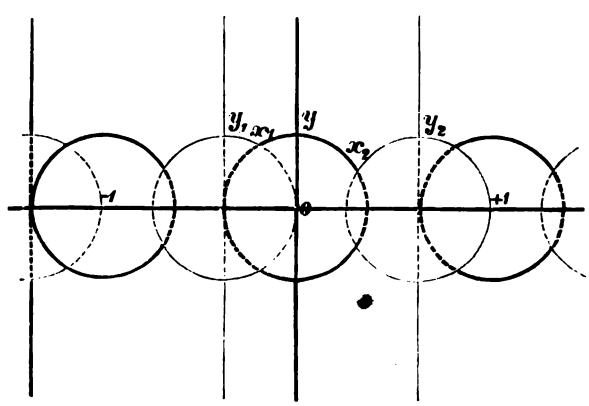


Fig. I.

seits und die Abbildung des secundären durch $y = x \mp 1$ andrerseits dieselbe Rolle.

Hiernach verfahren wir in unserem Falle folgendermassen (s. Fig. I).

Die beiden Fundamentalkreise, deren Mittelpunkt resp. der Nullpunkt und der Punkt

$$\mp \frac{\cos\frac{\varphi}{2}}{\cos\frac{\varphi}{2}+\cos\frac{\psi}{2}}$$

sind, beschreiben wir mit dem Radius $\frac{1}{2\left(\cos\frac{\varphi}{2}+\cos\frac{\psi}{2}\right)}$; beide vervielfältigen wir durch die Transformationen $y = x \pm k$. Die parallelen Geraden legen wir am Besten durch die Mittelpunkte des secundären Fundamentalkreises und seiner erwähnten Abbildungen und zwar senkrecht zur Abscissenaxe. So entstehen oberhalb und unterhalb der letzteren unendlich viele unendliche Fundamentalpolygone, die von 2 Geraden und Theilen von 3 Kreisen begrenzt werden. Der obere Schnittpunkt des primären Kreises mit dem secundären ist

$$x_1 = \frac{\mp\cos\frac{\varphi}{2}+i\sin\frac{\varphi}{2}}{2\left(\cos\frac{\varphi}{2}+\cos\frac{\psi}{2}\right)},$$

der entsprechende des primären Kreises mit der ihn schneidenden Abbildung des secundären ist

$$x_2 = \frac{\pm\cos\frac{\psi}{2}+i\sin\frac{\psi}{2}}{2\left(\cos\frac{\varphi}{2}+\cos\frac{\psi}{2}\right)}.$$

In x_1 und x_2 entstehen resp. die Winkel φ und ψ. Ferner findet man leicht, dass x_1 und x_2 durch (6) resp. (7) in sich selbst transformirt werden, also Centren der durch diese Substitutionen gebildeten Cyklen sind. Das Fundamentalpolygon hat also die Winkel φ und ψ, sowie einen von 0^0 und zwei andere, welche im Allgemeinen supplementär (bei unserer Wahl der Geraden rechte) sind. Dass nun die Gruppe wirklich zulässig ist, erkennen wir daraus, dass sämmtliche Polygone, welche an das Fundamentalpolygon anstossen (wir wollen jetzt als solches speciell dasjenige unendliche Vieleck betrachten, welches oberhalb, resp. unterhalb des Nullpunktes gelegen ist), dasselbe nicht überdecken. Es ist dies für die angrenzenden unendlichen Polygone und die um x_1 und x_2 gelagerten (in der Figur nicht ausgeführten) unmittelbar ersichtlich, und wir müssen nur nachweisen, dass die Polygone der beiden Cyklen, die sich an die krummlinige Begrenzung des Fundamentalpolygons anlegen, dieselbe auch vollständig in Anspruch nehmen und keinen Theil derselben frei lassen. Dieser Nachweis ergiebt sich daraus, dass die beiden Punkte

$$y_1 = \frac{\mp 2\cos\frac{\varphi}{2} + i}{2\left(\cos\frac{\varphi}{2} + \cos\frac{\psi}{2}\right)}$$

und

$$y_1 = \frac{\pm 2\cos\frac{\psi}{2} + i}{2\left(\cos\frac{\varphi}{2} + \cos\frac{\psi}{2}\right)}$$

durch (6) resp. (7) in denselben Punkt

$$y = \frac{i}{2\left(\cos\frac{\varphi}{2} + \cos\frac{\psi}{2}\right)}$$

transformirt werden und dieser durch die inversen Substitutionen wieder in y_1 und y_2 übergeführt wird.

3. Es erübrigt noch, aus der behandelten Gruppe einige Specialfälle herauszugreifen. Nehmen wir $\varphi = 180^0$, so finden wir

$$y = x + 1, \quad y = -\frac{\frac{1}{4\cos^2\frac{\psi}{2}}}{x},$$

also die Gruppe der *erweiterten Modulfunctionen;* der secundäre Fundamentalkreis fällt hier mit dem primären zusammen. Immerhin charakterisirt sich dieser Specialfall als bedeutend von den übrigen verschieden durch den Umstand, dass hier die Abbildungen des primären Kreises sich einander schneiden.

Für $\varphi = \psi$ ergiebt sich

$$y = x + 1, \quad y = -\frac{\frac{1}{16\cos^2\frac{\varphi}{2}}}{x + \frac{1}{2}}.$$

Für $a = \frac{1}{4}$ finden wir nur

$$y = x + 1, \quad y = -\frac{\frac{1}{4}}{x}$$

und

$$y = x + 1, \quad y = -\frac{\frac{1}{4}}{x + \frac{1}{2}}.$$

§ 3.

Zweiter Hauptfall.

1. Im zweiten Hauptfall schliessen wir wieder, dass die Gruppe die Form

$$(1) \qquad y = x + 1, \quad y = \varphi_1(x) = -\frac{\frac{c^2}{4 \sin^2 \frac{\varphi}{2}}}{x + c \operatorname{cotang} \frac{\varphi}{2}},$$

$\varphi = \frac{2\pi}{n}$, haben muss; c braucht hier keine Bedingungsgleichung zu erfüllen, sondern muss lediglich der Ungleichheit, die aus

$$(b \pm 1)^2 - 4a \geq 0$$

resultirt, nämlich

$$(2) \qquad 1 - \text{mod. } c \operatorname{cotang} \frac{\varphi}{2} - c^2 \geq 0$$

genügen. Für den Grenzfall finden wir

$$\text{mod. } c = -\operatorname{cotang} \frac{\varphi}{2} \pm \frac{1}{\sin \frac{\varphi}{2}},$$

also, da wir nur das obere Zeichen wählen können, um für mod. c eine positive Grösse zu erhalten:

$$\text{mod. } c = \operatorname{tang} \frac{\varphi}{4}.$$

Die Ungleichheit lautet daher

$$(3) \qquad \text{mod. } c \leq \operatorname{tang} \frac{\varphi}{4}.$$

2. Dass die soeben gefundenen Bedingungen auch hinreichend für die Existenzberechtigung der Gruppe sind, folgt wieder aus der Herstellung des Periodicitätsnetzes, das wir genau in derselben Weise wie für den vorigen Fall construiren (s. Fig. II).

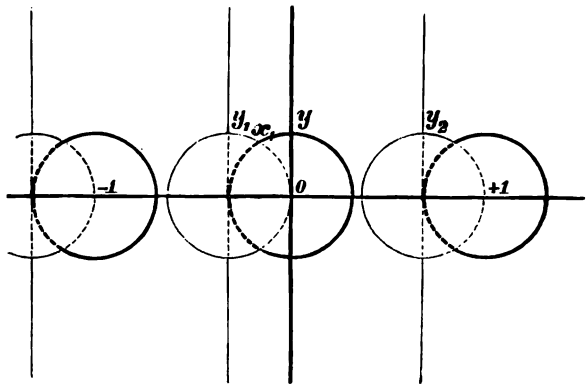


Fig. II.

Auch hier schneiden sich der secundäre und der primäre Fundamentalkreis unter dem Winkel φ; dagegen wird der primäre Kreis von der nächstgelegenen Abbildung des secundären nicht geschnitten, da die Centraldistanz beider $1 - \text{mod. } c \text{ cotang } \frac{\varphi}{2}$, ihr Radius aber $\frac{\text{mod. } c}{2 \sin \frac{\varphi}{2}}$ ist. Die Bedingung nämlich dafür, dass die Centraldistanz nicht kleiner als der Durchmesser ist, drückt sich durch

$$1 - \text{mod. } c \text{ cotang } \frac{\varphi}{2} \geq \frac{\text{mod. } c}{\sin \frac{\varphi}{2}}$$

oder

$$\text{mod. } c \leq \text{tang } \frac{\varphi}{4}$$

aus, was mit (3) übereinstimmt.

Wir brauchen nun wieder lediglich die Abbildungen des Fundamentalraums ins Auge zu fassen, welche sich um letzteren lagern. In x_1, sowie bei den Punkten y_1, y_2 und y haben wir dasselbe Verhalten wie im vorigen Fall, und man sieht weiter, dass sich durch $\varphi_1(x \pm 1)$ die in Betracht kommende Abbildung des secundären Kreises in den primären verwandelt u. s. w. Eine Ueberdeckung kommt auch hier nicht vor.

3. Wir können jetzt die bisher festgehaltene Voraussetzung fallen lassen, dass c reell sei, und complexe c innerhalb einer gewissen, noch später festzusetzenden Ausdehnung zulassen. In dem Netze bleibt alsdann der Fundamentalkreis derselbe wie für ein c von dem gleichen absoluten Betrage; der Mittelpunkt des secundären Kreises wird dagegen von der Abscissenaxe wegverlegt, da er um die complexe Grösse $-c \text{ cotang } \frac{\varphi}{2}$ vom Nullpunkt entfernt ist. Die Centraldistanz — und hiermit die Winkel, unter denen beide Kreise sich schneiden — unterscheidet sich nicht von derjenigen, die die nämlichen Kreise für ein reelles c von demselben absoluten Werth besitzen. Man erkennt sofort, dass die Verhältnisse vollständig die gleichen bleiben wie bei reellen c, falls nur der secundäre Fundamentalkreis die benachbarte Abbildung des primären nicht schneidet. Die Bedingungen hierfür ergeben sich aus Figur III (siehe folgende Seite). Setzen wir nämlich $c = \gamma + \delta i$, so ist der Radius der Kreise gleich

$$\frac{\sqrt{\gamma^2 + \delta^2}}{2 \sin \frac{\varphi}{2}}, \quad AC = \sqrt{\gamma^2 + \delta^2} \cdot \text{cotang } \frac{\varphi}{2},$$

$$B = 1, \quad AD = \text{mod. } \gamma \cdot \text{cotang } \frac{\varphi}{2}, \quad CD = \text{mod. } \delta \cdot \text{cotang } \frac{\varphi}{2},$$

und da BC mindestens gleich dem Durchmesser der Kreise sein muss,

$$\left(1 - \text{mod. } \gamma \cdot \text{cotang } \frac{\varphi}{2}\right)^2 + \delta^2 \text{ cotang}^2 \frac{\varphi}{2} \geqq \frac{\gamma^2 + \delta^2}{\sin^2 \frac{\varphi}{2}}$$

oder

$$1 \geqq \gamma^2 + \delta^2 + 2 \text{ mod. } \gamma \cdot \text{cotang } \frac{\varphi}{2}$$

oder

$$\left(\text{mod. } \gamma + \text{cotang } \frac{\varphi}{2}\right)^2 + \delta^2 \leqq \frac{1}{\sin^2 \frac{\varphi}{2}}.$$

Der Convergenzbezirk für c ist das gemeinsame Stück zweier Kreise, deren Radius $\frac{1}{\sin \frac{\varphi}{2}}$ *ist und deren Mittelpunkte um* cotang $\frac{\varphi}{2}$ *nach rechts und links vom Nullpunkt entfernt sind.*

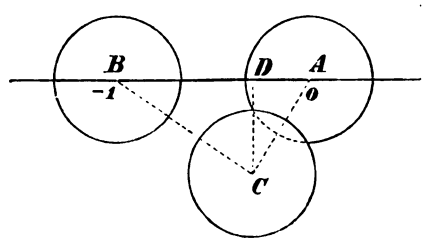


Fig. III.

4. *Die früher gefundene parametrische Modulgruppe* ist ein Specialfall der eben behandelten.

§ 4.

Dritter Hauptfall.

1. Besteht bei positivem a und reellem b die Ungleichheit $b^2 - 4a \geqq 0$, so sind weder $y = -\frac{1}{x+b}$ noch $y = -\frac{a}{x+b\pm 1}$ cyklisch; ausser jener Ungleichheit sind dann keine Bedingungen zu erfüllen.

Die Parcellirung stellen wir ebenso her wie in den beiden vorigen Fällen; ein Schneiden der Kreise findet hier überhaupt nicht statt. Die Zulässigkeit der Gruppe liesse sich für diesen Fall ganz ähnlich wie für den vorhergehenden darthun; doch ziehe ich es vor, die Existenz eines Gebietes direct nachzuweisen, innerhalb dessen keine 2 Punkte durch Periodicität verbunden sind. Wir bezeichnen (siehe folgende Seite Fig. IV) mit I die gesammte Ebene mit Ausschluss der beiden Fundamentalkreise und ihrer Abbildungen durch $y = x \pm k$, mit II den Inhalt des primären, mit III den des secundären Fundamentalkreises; ferner mit IV und V die erwähnten Abbildungen der

beiden letzteren. Alle Perioden der Gruppe lassen sich aus 3 Elementen zusammensetzen:

(1) $$y = x \pm k,$$

(2) $$y = -\frac{a}{x+b} = \varphi_1(x),$$

(3) $$y = \varphi_{-1}(x).$$

Gehen wir nun von einem Punkte in einem der Parallelstreifen des Gebietes I aus, so bleiben wir durch Anwendung von (1) in I; lassen wir jetzt (2) folgen, so wissen wir, dass hierdurch jeder Punkt ausserhalb III — und das ist hier der Fall — innerhalb II abgebildet wird; auch bei wiederholter Anwendung von (2) bleiben wir in II. Folgt hierauf

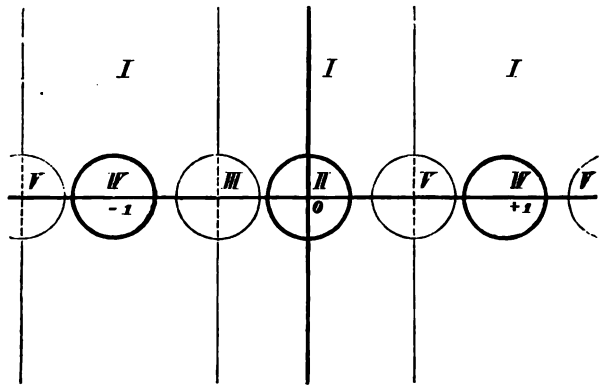


Fig. IV.

wieder (1), so gelangen wir nach IV, hieraus durch (2) nach II u. s. w. Schliessen wir daher die ganze Folge von Substitutionen, in denen (3) noch nicht vorkommt, mit (1) ab, so sind wir in I oder IV. Nun lassen wir auch (3) ein oder mehrmals eintreten, wodurch wir nach III versetzt werden, wie sich dies aus Früherem ergiebt. Durch (1) gelangen wir dann nach V, durch (2) wieder nach II oder durch (3) nach III u. s. w. Es ist klar, dass wenn man nicht denselben Weg wieder zurückgeht, also u. A. (2) und (3) auf einander folgen lässt, man niemals nach I zurückgelangt, falls man diesen Raum einmal verlassen hat. *Jeder Parallelstreifen von* I *stellt daher einen Fundamentalraum dar.* Zugleich erkennt man, dass in der ganzen Gruppe keine cyklische Periode vorkommt.

2. Auch hier ist eine Ausdehnung auf complexe Gruppen sofort zulässig. Die gemachten Schlüsse bleiben ungeändert bestehen, so lange die beiden Fundamentalkreise und deren Abbildungen durch (1) sich einander nicht schneiden. Aus einer Figur, welche Fig. III ähnlich ist, ergeben sich die Bedingungen hierfür ohne Schwierigkeit. Zunächst haben wir a der Ungleichheit

(4) $$\text{mod. } a \leq \frac{1}{4}$$

zu unterwerfen, damit der primäre Kreis von seinen benachbarten Abbildungen nicht geschnitten wird. Setzen wir $a = \alpha + \beta i$, $b = \gamma + \delta i$, so ergiebt sich als Bedingung dafür, dass der secundäre Fundamentalkreis mit keiner Abbildung des primären in Collision geräth, die Ungleichheit

(5) $$(\gamma + k)^2 + \delta^2 \geq 4(\alpha^2 + \beta^2) \geq 4 \text{ mod. } a^2,$$

die für beliebige ganzzahlige, positive und negative k befriedigt sein muss. Während wir daher für a einen Convergenzkreis haben, der durch die Ungleichheit (4) bestimmt ist, dürfen wir b über die ganze Ebene der complexen Zahlen ausdehnen mit Ausschluss unendlich vieler Kreise, deren Gleichungen

$$(\gamma + k)^2 + \delta^2 = 4 \text{ mod. } a^2$$

lauten, die also den Radius 2 mod. a besitzen und deren Centren die Punkte $0, \pm 1, \pm 2$ u. s. w. sind.

Die hauptsächlichsten der bis jetzt als möglich erkannten Gruppen sind demnach die folgenden.

1. *Die Gruppe*

$$y = x + 1, \quad y = -\frac{1}{x \pm \frac{\cos\frac{\pi}{m}}{4\left(\cos\frac{\pi}{m} + \cos\frac{\pi}{n}\right)^2}}; \qquad \cos\frac{\pi}{m} + \cos\frac{\pi}{n}$$

die in derselben enthaltenen cyklischen Perioden führen alle nach einer m-fachen oder n-fachen Iterirung zum Anfangswerth zurück.

2. *Die einen Parameter enthaltende Gruppe*

$$y = x + 1, \quad y = -\frac{\frac{c^2}{4\sin^2\frac{\pi}{m}}}{x + c\,\text{cotang}\frac{\pi}{m}},$$

worin $c = \gamma + \delta i$ *der Bedingung*

$$\left(\text{mod. } \gamma + \text{cotang}\frac{\pi}{m}\right)^2 + \delta^2 \leq \frac{1}{\sin^2\frac{\pi}{m}}$$

unterworfen ist. In dieser Gruppe kommen nur solche cyklische Perioden vor, die nach m-maliger Iterirung wieder den Anfangswerth liefern.

3. *Die zwei Parameter enthaltende Gruppe:*

$$y = x + 1,\ y = -\frac{a}{x+b},$$

worin a *und* $b = \gamma + \delta i$ *den Ungleichheiten*

$$\text{mod. } a \leqq \tfrac{1}{4}$$

und

$$(k+\gamma)^2 + \delta^2 \geqq \text{mod. } a$$

genügen müssen. Cyklische Perioden kommen in dieser Gruppe überhaupt nicht vor.

Die Einführung specieller Benennungen für die gefundenen Gruppen und die zugehörigen Transcendenten verschiebe ich auf eine spätere Gelegenheit.

Frankfurt a. M., den 15. August 1882.

Ueber die Hesse'sche Covariante einer binären algebraischen Form fünfter Ordnung.

Von

F. Lindemann in Freiburg i. Br.

Während man den Invarianten und Covarianten der binären Formen zweiter, dritter und vierter Ordnung seit lange rege Aufmerksamkeit schenkt, weiss man noch sehr wenig über die speciellen Eigenschaften der Covarianten höherer Formen. Es schien mir deshalb eine eingehendere Untersuchung der einfachsten Covariante einer Form fünfter Ordnung, ihrer Hesse'schen Determinante, von Interesse zu sein, wenn auch die gewonnenen und im Folgenden entwickelten Resultate von geringerer Einfachheit und Uebersichtlichkeit sind als bei den Formen niedrigerer Ordnung.

Zunächst drängt sich natürlich die Frage auf, wodurch die erwähnte (nur von fünf Constanten abhängende) Covariante sechster Ordnung (H) vor anderen Formen gleicher Ordnung ausgezeichnet ist. Dieselbe wird durch Berechnung der quadratischen Covarianten und Invarianten von H und Aufstellung der zwischen letzteren bestehenden Relation beantwortet (§§ 1—5); die geometrische Bedeutung dieser Relation wird am Schlusse (§ 15) erörtert. Es werden sodann für die specielle Form H alle diejenigen Fragen besprochen, auf welche Clebsch bei den allgemeinen Formen sechster Ordnung durch ihre typische Darstellung mittelst quadratischer Covarianten geführt wurde, und es werden die analogen typischen Darstellungen von H entwickelt (§§ 6—9; in § 10 wird gelegentlich eine typische Darstellung der Grundform durch lineare Covarianten gegeben, die bei Clebsch nicht ausgeführt war).

Es folgt sodann eine genauere Untersuchung derjenigen Fälle, in welchen eine solche Darstellung nicht möglich oder besonders einfach ist (§§ 11—13). In § 14 endlich werden die in den ersten Paragraphen aufgestellten Formeln benutzt, um umgekehrt eine Form fünfter Ordnung zu bestimmen, wenn ihre Hesse'sche Covariante gegeben ist; es zeigt sich, dass diese Aufgabe immer nur eine Lösung zulässt,

ausgenommen den Fall, wo die gegebene Form sechster Ordnung ein vollständiger Cubus einer quadratischen Form ist, wo dann unendlich viele Lösungen möglich sind. Hiermit ist bekanntlich zugleich die Aufgabe gelöst, diejenigen ganzen Functionen von x zu bestimmen (falls es solche giebt), welche einer Differentialgleichung von der Form

$$y\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{4}{5}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = X$$

genügen, wo X eine ganze Function sechsten Grades von x bezeichnet; die Frage, wann diese Differentialgleichung durch eine rationale ganze Function befriedigt werden kann, ist in § 5 durch Aufstellung der Relation beantwortet, welcher die Invarianten der (bis auf einen constanten Factor mit H identischen) ganzen Function X zu genügen haben.

§ 1.

Covarianten und Invarianten einer Form fünfter Ordnung.

Das vollständige System einer binären Form fünfter Ordnung (in Gordan's Sinne) besteht aus 23 Bildungen. Wir bezeichnen dieselben im Folgenden stets ebenso, wie es in Clebsch's „Theorie der binären algebraischen Formen" geschieht; gleichwohl wird es nützlich sein, wenn wir eine kurze Zusammenstellung der von uns zu benutzenden Bildungen hier geben:

Die Grundform selbst ist

$$f = a_x^5 = b_x^5 = c_x^5 = \cdots$$

Von ihren Covarianten werden wir die folgenden nöthig haben:

$$H = (f,f)_2 = (ab)^2 a_x^3 b_x^3 = H_x^6 = H_x'^6 = H_x''^6 = \cdots,$$

$$i = (f,f)_4 = (ab)^4 a_x b_x = i_x^2 = i_x'^2 = i_x''^2 = \cdots,$$

$$T = (f,H)_1 = (aH)a_x^4 H_x^5 = (ab)^2(ca)\,a_x^2 b_x^3 c_x^4,$$

$$j = -(i,f)_2 = -(ai)^2 a_x^3 = -(ab)^4(ac)(bc)c_x^3 = (ab)^2(bc)^2(ca)^2 a_x b_x c_x,$$
$$= j_x^3 = j_x'^3 = j_x''^3 = \cdots,$$

$$\tau = (j,j)_2 = (jj')^2 j_x j_x' = (ab)^2(ai)^2(bi')^2 a_x b_x = \tau_x^2,$$

$$\vartheta = (i,\tau)_1 = (i\tau) i_x \tau_x = -(ab)^2(ai)^2(bi')^2(ai'')\,b_x i_x'' = \vartheta_x^2,$$

$$\alpha = (i^2,f)_4 = -(i,j)_2 = -(ij)^2 j_x = -(ai)^2(ai')^2(ai'')i_x'' = \alpha_x,$$

$$\beta = (i^3,f)_5 = (i,\alpha)_1 = (i\alpha) i_x = \beta_x,$$

$$\gamma = (\tau,\alpha)_1 = (\tau\alpha)\tau_x = (jj')^2(j\alpha)j_x' = \gamma_x,$$

$$\delta = (\vartheta,\alpha)_1 = (\vartheta\alpha)\vartheta_x = \delta_x,$$

$$\varepsilon = (i^2,f)_3 = -(ai)^2(ai')a_x^2 i_x' = (j,i)_1 = \varepsilon_x^3,$$

$$Q = (j, \tau)_1 = (j\tau) j_x^2 \tau_x = (jj')^2 (j'' j') j_x j_x'''^2 = Q_x^3,$$

$$k = (i, H)_2 = (iH)^2 H_x^4 = k_x^4,$$

$$q = (f, i)_1 = (ai) i_x a_x^4 = -(ab)^4 (ac) b_x c_x^4 = q_x^5.$$

Hierzu kommen die drei von einander unabhängigen Invarianten:

$$A = (i, i)_2 = (ii')^2 = (ab)^4 (cd)^4 (ac) (bd),$$

$$B = (i, \tau)_2 = (i\tau)^2 = (jj')^2 (ji) (j'i) = (ab)^2 (ai)^2 (bi')^2 (ai'') (bi''),$$

$$C = (\tau, \tau)_2 = (\tau\tau')^2 = (jj')^2 (j''j''')^2 (jj'') (j'j''').$$

Für zwei häufig vorkommende Verbindungen derselben führen wir mit Clebsch besondere Buchstaben M, N ein, indem wir setzen:

$$M = 2AB - 3C$$
$$= (\beta\alpha) = (i\alpha)^2 = (ji)^2 (j'i')^2 (ji'') (j'i''),$$

$$N = \tfrac{1}{2} (AC - B^2)$$
$$= (\vartheta\vartheta')^2 = (\tau\alpha)^2 = (\gamma\alpha) = (ij)^2 (i'j')^2 (\tau j) (\tau j').$$

Endlich haben wir die Hermite'sche Invariante ungeraden Grades anzuführen:

$$R = (\delta\alpha) = (\beta\gamma) = -(\tau\alpha)(\tau\beta) = (\vartheta\alpha)^2 = (i\tau)(i\alpha)(\tau\alpha),$$

deren Quadrat sich durch A, B, C ausdrücken lässt mittelst der Formel:

$$R^2 = -\tfrac{1}{2} (AN^2 - 2BMN + CM^2).$$

In dem erwähnten Werke von Clebsch findet man gelegentlich eine grosse Anzahl von invarianten Bildungen auf die hier angegebenen zurückgeführt; die betreffenden Formeln werden wir im Folgenden mehrfach benutzen müssen. Weitere Zurückführungen der Art hat Herr d'Ovidio in einem Aufsatze*) gegeben, auf welchen wir ebenfalls wiederholt werden verweisen müssen. Es sei bemerkt, dass sich Herr d'Ovidio derselben Bezeichnungsweise wie wir bedient; nur unser q ist bei ihm mit $-l$ bezeichnet, während der Buchstabe q für die Ueberschiebung $(j, H)_1$ benutzt wird.

§ 2.

Die quadratische Covariante l der Hesse'schen Form H.

Unter den quadratischen Covarianten einer Form sechster Ordnung sind drei besonders ausgezeichnet, die wir mit Clebsch durch

$$(1) \qquad l = l_x^2 = l_x'^2, \quad m = m_x^2 = m_x'^2, \quad n = n_x^2$$

*) Nota sulle forme binarie del 5° ordine; Atti della Reale Accademia delle Scienze di Torino, vol. XV, 1880.

bezeichnen. Nimmt man als Grundform sechster Ordnung die Hesse'sche Form $H = H_x^6$ einer Form fünfter Ordnung an, so sind dieselben durch folgende Bildungen definirt:

$$\begin{aligned} l &= (g, H)_4 = (gH)^4 H_x^2, \\ m &= (g, l)_2 = (gl)^2 g_x^2, \\ n &= (g, m)_2 = (gm)^2 g_x^2, \end{aligned} \tag{2}$$

wo $g = g_x^4$ die vierte Ueberschiebung von H mit sich selbst bedeutet. Wir stellen uns die Aufgabe, l, m, n durch die quadratischen und linearen Covarianten von $f = a_x^5$ auszudrücken, d. h. durch die in § 1 eingeführten Formen $i, \tau, \vartheta, \alpha, \beta, \gamma$.

Herr d'Ovidio hat bereits gezeigt, dass g sich aus $i = (f, f)_4$ und $k = (i, H)_2$ zusammensetzen lässt; man hat nach ihm

$$\begin{aligned} g = (H, H)_4 &= (HH')^4 H_x^2 H_x'^2 \\ &= \tfrac{4}{25} i^2 + \tfrac{2}{5} k. \end{aligned} \tag{3}$$

Aus (2) folgt also

$$l = (g, H)_4 = \tfrac{4}{25} (i^2, H)_4 + \tfrac{2}{5} (k, H)_4. \tag{4}$$

Um die rechts vorkommenden Ueberschiebungen zu berechnen, gehen wir von der Identität aus:

$$H_y^4 H_x^2 = \tfrac{1}{5} i_y^2 (xy)^2 + (ab)^2 a_y^2 b_y^2 a_x b_x, \tag{5}$$

welche man leicht aus den allgemeinen Formeln für die Entwicklung einer binären Form mit zwei Reihen von Veränderlichen ableitet (Clebsch, op. cit. p. 23). Aus ihr folgt durch Polarenbildung, wenn zur Abkürzung $(ab)^2 a_y^2 b_y^2 a_x b_x = \varphi_y^4 \psi_x^2$ gesetzt wird,

$$\begin{aligned} 12 H_x^2 H_y^2 H_z^2 = 12 \psi_x^2 \varphi_y^2 \varphi_z^2 &= \tfrac{8}{5} (yx)(zx) i_y i_z \\ &\quad + \tfrac{2}{5} (yx)^2 i_z^2 + \tfrac{2}{5} (zx)^2 i_y^2 \\ &= 12 \psi_x^2 \varphi_y^2 \varphi_z^2 + \tfrac{6}{5} (yx)^2 i_z^2 + \tfrac{6}{5} (zx)^2 i_y^2 - \tfrac{4}{5} (yz)^2 i_x^2. \end{aligned}$$

Fasst man ferner den Ausdruck $(ab)^2 a_y^2 b_z^2 a_x b_x$ als Function von y und z auf, so hat man die Identität

$$(ab)^2 a_y^2 b_z^2 a_x b_x = \varphi_y^2 \varphi_z^2 \psi_x^2 + \tfrac{1}{3} (yz)^2 i_x^2,$$

also durch Combination mit der vorhergehenden Gleichung:

(6) $H_x^2 H_y^2 H_z^2 = (ab)^2 a_y^2 b_z^2 a_x b_x - \frac{2}{5}(yz)^2 i_x^2 + \frac{1}{10}(xy)^2 i_z^2 + \frac{1}{10}(zx)^2 i_y^2$ *).

Diese Identität giebt uns

$$\begin{aligned}(H, i^2)_4 &= (Hi)^2 (Hi')^2 H_x^2 \\ &= (ab)^2 (ai)^2 (bi')^2 a_x b_x - \frac{2}{5} Ai + \frac{1}{5} Ai \\ &= (jj')^2 j_x j_x' - \frac{1}{5} Ai\end{aligned}$$

oder endlich, wie auch Herr d'Ovidio findet:

(7) $$(H, i^2)_4 = \tau - \frac{1}{5} Ai.$$

Es bleibt nur noch die vierte Ueberschiebung von k über H zu berechnen. Zu dem Zwecke gehen wir von der Identität (5) aus. Dieselbe giebt unmittelbar

$$\begin{aligned}(k, H)_4 &= \frac{1}{5}(iH)^2 (i'H)^2 H_x^2 + (ab)^2 (aH)^2 (bH)^2 (iH)^2 a_x b_x \\ &= \frac{1}{5}(i^2, H)_4 + P.\end{aligned}$$

Hier ist identisch

$$\begin{aligned}P &= (ab)^2 (aH)^3 (bH) (iH)^2 b_x^2 - \frac{1}{2}(ab)^4 (aH)(bH)(iH)^2 H_x^2 \\ &= P_0 - \frac{1}{2}(i^2, H)_4.\end{aligned}$$

Auf P_0 wenden wir die Identität an:

$$(ab)^2 a_x b_x b_y^2 = H_x^4 H_y^2 + \frac{3}{10} i_x^2 (xy)^2;$$

es kommt dann:

$$P_0 = (HH')^4 (Hi)^2 (H'x)^2 + \frac{3}{10}(Hi')^2 (Hi)^2 H_x^2.$$

Weiter ist identisch (Clebsch, p. 23)

$$(HH')^4 H_y^2 H_x'^2 = g_x^2 g_y^2 + \frac{1}{3}(xy)^2 (HH')^6$$

und nach Herrn d'Ovidio

$$(HH')^6 = \frac{1}{10} A.$$ **)

*) Vertauscht man x, y, z unter einander und addirt die drei dadurch erhaltenen Gleichungen, so entsteht die von Herrn d'Ovidio a. a. O. mehrfach benutzte Identität:

$$\begin{aligned}H_x^2 H_y^2 H_z^2 = \frac{1}{3}(ab)^2 [a_x^2 b_y^2 a_z b_z + a_z^2 b_x^2 a_y b_y + a_y^2 b_z^2 a_x b_x] \\ - \frac{1}{15}[(xy)^2 i_z^2 + (yz)^2 i_x^2 + (zx)^2 i_y^2].\end{aligned}$$

**) Vergl. auch Salmon, Lessons introductory to the modern higher algebra, third edition (Dublin 1876), art. 225.

Also

$$P_0 = (g, i)_2 + \tfrac{1}{30} Ai + \tfrac{3}{10} (i^2, H)_4,$$

$$(k, H)_4 = (g, i)_2 + \tfrac{1}{30} Ai. \tag{8}$$

Die Form $(g, i)_2$ berechnet sich aus (3); es wird

$$(g, i)_2 = \tfrac{4}{25} (i^2, i)_2 + \tfrac{2}{5} (k, i)_2.$$

Macht man $u_x^4 = i^2$, so ist

$$3 u_x^2 u_y^2 = i_x^2 i_y'^2 + 2 i_x i_y i_x' i_y', \tag{8a}$$

also, da $A = (ii')^2$,

$$\begin{aligned}(i^2, i)_2 &= \tfrac{1}{3} A i_x^2 + \tfrac{2}{3} (ii'')(i' i'') i_x i_x' \\ &= \tfrac{2}{3} Ai.\end{aligned}$$

Ferner ist $(k, i)_2 = (Hi)^2 (Hi')^2 H_x^2$ aus (7) bekannt, und somit

$$(g, i)_2 = \tfrac{2}{75} Ai + \tfrac{2}{5} \tau, \tag{8b}$$

$$(k, H)_4 = \tfrac{3}{50} Ai + \tfrac{2}{5} \tau. \tag{8c}$$

Die Gleichungen (4), (7) und (8c) ergeben endlich

$$l = \tfrac{1}{5^3} (40\tau - Ai). \tag{9}$$

§ 3.

Die quadratische Covariante m von H.

Um m zu behandeln, genügt es nach (2) und (9), die Ueberschiebung $(g, \tau)_2$ in's Auge zu fassen, denn $(g, i)_2$ ist aus (8b) bekannt. Man hat nach (3) und (8a)

$$\begin{aligned}(g, \tau)_2 &= \tfrac{4}{25} \left[\tfrac{1}{3} (i, \tau)_2 i_x^2 + \tfrac{2}{3} (i\tau)(i'\tau) i_x i_x' \right] + \tfrac{2}{5} (k, \tau)_2 \\ &= \tfrac{4}{25} \left[Bi - \tfrac{1}{3} A\tau \right] + \tfrac{2}{5} (k, \tau)_2.\end{aligned} \tag{10}$$

Zur Berechnung von $(k, \tau)_2$ dient uns wieder die Identität (6); es wird

$$\begin{aligned}(k, \tau)_2 &= (Hi)^2 (H\tau)^2 H_x^2 \\ &= (ab)^2 (ai)^2 (b\tau)^2 a_x b_x - \tfrac{2}{5} (i\tau)^2 i_x'^2 + \tfrac{1}{10} i_x^2 (i'\tau)^2 + \tfrac{1}{10} \tau_x^2 (i' i)^2 \\ &= -(jb)^2 (b\tau)^2 j_x b_x - \tfrac{3}{10} Bi + \tfrac{1}{10} A\tau.\end{aligned}$$

Zur Umformung der ersten Glieder der rechten Seite benutzen wir die Relation (vgl. Clebsch, p. 282)

$$(11) \qquad (f, \tau)_2 = (b\tau)^2 b_x^3 = -\frac{2}{3} Aj - \alpha i$$

und weiter die Identitäten (ib. p. 280 und 281);

$$(11a) \qquad (i, \vartheta)_1 = \frac{1}{2} Bi - \frac{1}{2} A\tau,$$

$$(11b) \qquad (j, \alpha)_1 = -\vartheta.$$

Aus diesen Gleichungen folgt unmittelbar

$$\begin{aligned} -(b\tau)^2(bj)^2 j_x b_x &= \frac{2}{3} A\tau + \frac{1}{3} \alpha_x (ij)^2 j_x + \frac{2}{3} (\alpha j)(ij) i_x j_x \\ &= \frac{2}{3} A\tau - \frac{1}{3} \alpha^2 + \frac{2}{3} (i, \vartheta)_1 \\ &= \frac{1}{3} (A\tau + Bi - \alpha^2), \end{aligned}$$

und durch Einsetzen:

$$(12) \qquad (k, \tau)_2 = \frac{1}{30} Bi + \frac{13}{30} A\tau - \frac{1}{3} \alpha^2.$$

Jetzt können wir auch m durch $i\tau$ und α^2 ausdrücken; man hat nach (2) und (9)

$$m = (g, l)_2 = \frac{1}{5^3} [40(g, \tau)_2 - A(g, i)_2],$$

ferner nach (10) unter Berücksichtigung von (12):

$$(13) \qquad (g, \tau)_2 = \frac{13}{75} Bi + \frac{3}{25} A\tau - \frac{2}{15} \alpha^2;$$

also schliesslich nach (8b):

$$(14) \qquad m = \frac{2}{3 \cdot 5^3} [(260B - A^2) i + 165 A\tau - 200\alpha^2].$$

§ 4.

Die quadratische Covariante n von H.

Die Berechnung der dritten quadratischen Covariante n kann ausgeführt werden, sobald $(g, \alpha^2)_2$ bekannt ist, und letztere Bildung erfordert nach (3) die Kenntniss von $(k, \alpha^2)_2$. Wir beschäftigen uns daher zunächst mit dieser Ueberschiebung. Da $k = (iH)^2 H_x^4$, so haben wir aus (6)

$$\begin{aligned} (k, \alpha^2)_2 &= (Hi)^2 (H\alpha)^2 H_x^2 \\ &= (ab)^2 (ai)^2 (b\alpha)^2 a_x b_x - \frac{2}{5} (i\alpha)^2 i_x^2 + \frac{1}{10} i_x^2 (i'\alpha)^2 + \frac{1}{10} \alpha_x^2 (ii')^2 \\ &= -(jb)^2 (b\alpha)^2 b_x j_x - \frac{3}{10} Mi + \frac{1}{10} A\alpha^2. \end{aligned}$$

Auf das erste Glied der rechten Seite wenden wir die Identität $(b\alpha)j_x = (bj)\alpha_x + (j\alpha)b_x$ an und berücksichtigen, dass $(bj)^3 b_x^2$ identisch verschwindet (Clebsch, p. 281) und dass $(j\alpha)j_x^2$ nach (11b) gleich $-\vartheta$ ist; es entsteht dann die Relation

$$-(bj)^2(b\alpha)^2 b_x j_x = (b\vartheta)^2(b\alpha)b_x^2.$$

Nun hat man (Clebsch, p. 375).

$$(15) \qquad (b\vartheta)^2 b_x^3 = Q + \tfrac{1}{3} i\beta - \tfrac{2}{3} A\varepsilon.$$

Die erste Ueberschiebung der rechten Seite mit α haben wir zu bilden. Es ist

$$(Q\alpha)Q_x^2 = \tfrac{2}{3}(j\tau)(j\alpha)j_x\tau_x + \tfrac{1}{3}(j\tau)(\tau\alpha)j_x^2$$

$$(16) \qquad = -\tfrac{2}{3}(\vartheta, \tau)_1 + \tfrac{1}{3}(j\tau)(j\alpha)j_x\tau_x$$

$$= -(\vartheta,\tau)_1 = -\tfrac{1}{2} B\tau + \tfrac{1}{2} Ci.$$

Hierbei ist berücksichtigt, dass $(j, \tau)_2$ nach der Theorie der cubischen Formen identisch Null ist, und es ist der von Clebsch (p. 280) gegebene Werth für $(\vartheta, \tau)_1$ benutzt.

Ferner wird

$$(i\beta, \alpha)_1 = \tfrac{2}{3}(i\alpha)i_x\beta_x + \tfrac{1}{3} i_x^2(\beta\alpha)$$

$$= \tfrac{2}{3}\beta^2 + \tfrac{1}{3} Mi.$$

Nach Herrn d'Ovidio ist aber $2\beta^2 = 2Mi - A\alpha^2$, und sonach

$$(17) \qquad (i\beta, \alpha)_1 = Mi - \tfrac{1}{3} A\alpha^2.$$

Endlich findet man

$$(\varepsilon, \alpha)_1 = \tfrac{2}{3}(ji)(j\alpha)j_x i_x + \tfrac{1}{3}(ji)(i\alpha)j_x^2$$

$$(18) \qquad = -\tfrac{2}{3}(\vartheta, i)_1 + \tfrac{1}{3}(ji)(j\alpha)i_x j_x - \tfrac{1}{3}(ji)^2 j_x\alpha_x$$

$$= -(\vartheta, i)_1 + \tfrac{1}{3}\alpha^2 = \tfrac{1}{2} Bi - \tfrac{1}{2} A\tau + \tfrac{1}{3}\alpha^2.$$

In Folge von (16), (17) und (18) kann man jetzt die linke Seite von (15) einmal über α schieben und findet

$$(18a) \quad (b\vartheta)^2(b\alpha)b_x^2 = \left(\tfrac{1}{2}C + \tfrac{1}{3}M - \tfrac{1}{3}AB\right)i + \left(\tfrac{1}{3}A^2 - \tfrac{1}{2}B\right)\tau - \tfrac{1}{3}A\alpha^2$$

$$= \tfrac{1}{6}Mi + \left(\tfrac{1}{3}A^2 - \tfrac{1}{2}B\right)\tau - \tfrac{1}{3}A\alpha^2;$$

und hieraus durch Einsetzen in die erste Gleichung dieses Paragraphen:

$$(19) \qquad (k, \alpha^2)_2 = -\frac{2}{15} Mi + \frac{1}{6}(2A^2 - 3B)\tau - \frac{7}{30} A\alpha^2.$$

Diese Formel liefert uns den Schlüssel zur Berechnung von n. Zunächst wird nach (1) und (14)

$$n = (m, g)_2 = \frac{2}{3 \cdot 5^5}[(260B - A^2)(i, g)_2 + 165A(\tau, g)_2 - 200(\alpha^2, g)_2],$$

ferner nach (3)

$$(g, \alpha^2)_2 = \frac{4}{25}(i^2, \alpha^2)_2 + \frac{2}{5}(\alpha^2, k)_2$$

wo nach (8a)

$$(i^2, \alpha^2)_2 = \frac{1}{3}(i\alpha)^2 i_x'^2 + \frac{2}{3}(i\alpha)(i'\alpha) i_x i_x'$$

$$= Mi - \frac{1}{3} A\alpha^2 = (2AB - 3C)i - \frac{1}{3} A\alpha^2.$$

Mittelst (19) erhalten wir also

$$(g, \alpha^2)_2 = \frac{8}{75} Mi + \frac{1}{15}(2A^2 - 3B)\tau - \frac{11}{75} A\alpha^2.$$

Dies führen wir in n ein und entnehmen gleichzeitig $(i, g)_2$ aus (8b), $(\tau, g)_2$ aus (13); so entsteht

$$(20) \qquad n = \frac{2}{3^2 \cdot 5^7}\left[\begin{array}{l}(4800C - 535AB - 2A^3)i \\ +(10800B - 545A^2)\tau + 550A\alpha^2\end{array}\right].$$

Die drei ersten quadratischen Covarianten von H lassen sich also als ganze lineare Functionen von i, τ und α^2 darstellen.

§ 5.

Die Invarianten von H.

Eine binäre Form sechster Ordnung hat nach Clebsch vier von einander unabhängige Invarianten A, B, C, D, die wir, zur Unterscheidung von den Invarianten der Grundform f, für H mit den entsprechenden griechischen Buchstaben bezeichnen wollen; sie sind durch folgende Gleichungen definirt (Clebsch, p. 283 und 298):

$$(21) \qquad \left\{\begin{array}{l}\mathsf{A} = (H, H)_6 = (HH')^6, \\ \mathsf{B} = (g, g)_4 = (gg')^4, \\ \Gamma = (gg')^2 (g'g'')^2 (g''g)^2, \\ \Delta = (nl)^2 = (mm')^2,\end{array}\right.$$

wo wieder $g_x^4 = (H, H)_4$, während l, m, n durch (9), (14) und (20) gegeben sind. Durch diese vier lässt sich das Quadrat einer fünften Invariante

$$(22) \qquad \mathsf{P} = -(lm)(mn)(nl)$$

ausdrücken, welche Combinante der quadratischen Covarianten l, m, n ist (vgl. Clebsch, p. 299).

Wir stellen uns die Aufgabe, die angegebenen sechs Bildungen auf die Invarianten der Form fünfter Ordnung f zurückzuführen.

Für die erste Invariante A hat Herr d'Ovidio dies a. a. O. bereits gethan. Man hat nach ihm die schon in § 2 benutzte Relation:

$$\mathsf{A} = \tfrac{1}{10} A. \tag{23}$$

Auch die zweite Invariante erledigt sich einfach. Es ist nach (3)

$$\mathsf{B} = (g, g)_4 = \tfrac{4}{25} (i, g)_4 + \tfrac{2}{5} (k, g)_4; \tag{24}$$

hierin ebenfalls nach (3)

$$(i^2, g)_4 = \tfrac{4}{25} (i^2, i^2)_4 + \tfrac{2}{5} (i^2, k)_4;$$

ferner nach (8a)

$$(i^2, i^2)_4 = \tfrac{1}{3} (ii'')^2 (i'i''')^2 + \tfrac{2}{3} (ii'') (ii''') (i'i'') (i'i''')$$
$$= \tfrac{2}{3} A^2$$

und wegen (7)

$$(i^2, k)_4 = (iH)^2 (i'H)^2 (i''H)^2 \tag{24a}$$
$$= \left(\tau - \tfrac{1}{5} Ai, i\right)_2 = B - \tfrac{1}{5} A^2,$$

wie ebenfalls Herr d'Ovidio angiebt; also

$$(i^2, g)_4 = \tfrac{2}{75} A^2 + \tfrac{2}{5} B. \tag{24b}$$

Es ergiebt sich $(k, g)_4$ aus (2) und (9):

$$(k, g)_4 = (Hi)^2 (Hg)^4 = (l, i)_2 \tag{24c}$$
$$= \tfrac{1}{5^3} [40(\tau, i)_2^2 - A(i, i)_2] = \tfrac{1}{5^3} (40B - A^2).$$

Alles in B eingesetzt führt zu dem Resultate

$$\mathsf{B} = \tfrac{2}{3 \cdot 5^4} (A^2 + 180B). \tag{25}$$

Um die dritte Invariante zu berechnen, gehen wir von folgender Relation aus, welche zwischen ihr und der Invariante der quadratischen Covariante l besteht (Clebsch, p. 299):

$$\Gamma = \tfrac{1}{2} (ll')^2 - \tfrac{1}{6} \mathsf{AB}.$$

Die Invariante von l ist nach (9)

$$(ll')^2 = \tfrac{1}{5^6} (40^2 C - 80AB + A^3); \tag{25a}$$

A und B sind aus (23) und (25) bekannt, folglich:

$$(26) \qquad \Gamma = \frac{2}{3^2 \cdot 5^6}(3600C - 405AB + A^3).$$

Die vierte Invariante endlich ist ihrer Definition nach aus (14) leicht zu bilden. Da $(i\alpha)^2 = M$, $(\tau\alpha)^2 = N$, so findet man*)

$$(27) \quad \Delta = \frac{2^2}{3^2 \cdot 5^{10}}(A^5 - 50A^3B - 21600AB^2 - 6975A^2C + 312000BC).$$

Hierin kann man A, B, C als ganze Functionen von A, B, Γ ausdrücken. *Die vierte Invariante von H ist also eine ganze Function der drei ersten;* um sie als solche darzustellen, lösen wir (23), (25), (26) nach A, B, C auf, wodurch sich ergiebt:

$$(27a) \quad \begin{cases} A = 10\mathsf{A}, \\ 2^3 \cdot 3^2 B = 3 \cdot 5^3\mathsf{B} - 2^3 \cdot 5\mathsf{A}^2, \\ 2^6 \cdot 3^2 C = 2 \cdot 3^2 \cdot 5^4\Gamma + 3^3 \cdot 5^3\mathsf{AB} - 2^3 \cdot 5 \cdot 13\mathsf{A}^3, \end{cases}$$

und setzen die so gefundenen Werthe in (27) ein; dann folgt

$$(27b) \quad 2^2 \cdot 3^5 \cdot 5^5\Delta = 2^3 \cdot 11^4 \cdot \mathsf{A}^5 - 3 \cdot 5^3 \cdot 11^2 \cdot 17\mathsf{A}^3\mathsf{B} - 2 \cdot 3^2 \cdot 5^4 \cdot 11 \cdot 19\mathsf{A}^2\Gamma + 2 \cdot 3^1 \cdot 5^5\mathsf{AB}^2 + 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^5 \cdot 13\mathsf{B}\Gamma.$$

Aus den aufgestellten Formeln geht hervor, dass die Invarianten A, B, Γ in demselben Grade von einander unabhängig sind, wie die Invarianten A, B, C; es ist folglich (27b) auch die *einzige* Relation zwischen den vier Invarianten von H, und wir können den Satz aussprechen:

Die Gleichung (27b) *ist die nothwendige und hinreichende Bedingung, welche zwischen den vier Invarianten einer binären Form sechster Ordnung bestehen muss, damit dieselbe als Hesse'sche Covariante einer binären Form fünfter Ordnung aufgefasst werden könne.*

Betrachten wir endlich die fünfte Invariante, welche durch (22) definirt war. Man kann sie bekanntlich so schreiben (Clebsch p. 203):

$$\mathsf{P} = \begin{vmatrix} l_1^2 & l_1 l_2 & l_2^2 \\ m_1^2 & m_1 m_2 & m_2^2 \\ n_1^2 & n_1 n_2 & n_2^2 \end{vmatrix}.$$

Nach (9), (14), (20) sind die Coefficienten von l, m, n lineare Functionen derjenigen von i, τ, α^2. Bezeichnen wir also mit $\mathfrak{R}$ die Determinante der in jenen linearen Gleichungen auftretenden Substitutionscoefficienten, so wird

$$(28) \qquad \mathsf{P} = -\mathfrak{R} \cdot (i\tau)(\tau\alpha)(\alpha i) = \mathfrak{R} \cdot R;$$

und die Rechnung ergiebt:

*) Die Relation $(ln)^2 = (mm')^2$ giebt eine Controlle für die Richtigkeit der Zahlenfactoren.

(28a) $$\mathfrak{R} = \frac{2^3}{3^2 \cdot 5^{10}} [3A(A^2 - 64B) - 2^{11}C].$$

Man bemerkt, dass das erste Glied der rechten Seite aus A und der Discriminante von f besteht.

Die Discriminante von H lässt sich sehr einfach durch die Invarianten A, B, C ausdrücken. Dieselbe ist vom Grade 10 in den Coefficienten von H, also vom Grade 20 in denen von f; jedenfalls enthält sie die Discriminante von f als Factor, denn H hat einen doppelten linearen Factor, sobald f einen solchen enthält. Der andere Factor muss eine Invariante 12ten Grades sein; wir bestimmen letzteren, indem wir umgekehrt zeigen, dass, wenn eine gewisse Invariante 12ten Grades (und zwar C) verschwindet, H einen Doppelfactor hat. In der That, ist $C = 0$, so geht f mittels der Substitution (Clebsch, p. 386)

(29) $$\xi = \delta - B\alpha, \quad \eta = \delta + \tfrac{1}{2} B\alpha$$

über in

(29a) $$R^4 f = \tfrac{2}{3} A^2 \xi^5 - \tfrac{5}{6} B \xi \eta^4 - \tfrac{1}{6} B \eta^5;$$

also wird, da sich H um das Quadrat der Substitutionsdeterminante ändert, da letztere gleich $\frac{3}{2} B(\delta\alpha) = \frac{3}{2} BR$ ist und da jetzt $8R^2 = -9\dot{A}B^4$,

$$\left(\tfrac{9}{8}\right)^4 A^3 B^{13} H = \eta^2 \left(\tfrac{1}{3} A^2 \xi^4 + \tfrac{1}{9} A^2 \xi^3 \eta + \tfrac{1}{36} B\eta^4\right).$$

In der That erscheint hier η als Doppelfactor.

Die Discriminante von H ist daher gleich

(29b) $$C(A^2 - 64B).$$

§ 6.

Typische Darstellung von H durch ϑ, $\alpha\beta$ und $\alpha\gamma$, falls R von Null verschieden ist.

Eine binäre Form sechster Ordnung, multiplicirt mit einer passenden Invariante, lässt sich bekanntlich als ganze cubische Function ihrer drei quadratischen Covarianten darstellen; die Coefficienten der letzteren sind dabei Invarianten, deren Berechnung Clebsch und Gordan ausgeführt haben (vgl. op. cit. p. 437ff). Die Resultate dieser Rechnung könnten wir auch hier für die Form H benutzen und dann statt l, m, n die Formen i, τ, α^2 mittelst (9), (14) und (20) einführen. Man kommt indessen schneller zu fertigen Schlussformeln, wenn man die betreffenden Rechnungen hier für i, τ, α^2 direct ausführt. Dies soll im Folgenden geschehen. Zunächst benutzen wir die Functionaldeterminanten dieser drei Formen zur typischen Darstellung, nämlich:

$$\alpha\gamma = (\tau\alpha)\,\tau_x\alpha_x,$$
$$-\beta\alpha = (\alpha i)\,i_x\alpha_x,$$
$$\vartheta = (i\tau)\,i_x\tau_x.$$

Man hat dann (Clebsch, p. 451):

$$(30)\quad R^3 H = a_{111}\alpha^3\gamma^3 - 3a_{112}\alpha^3\gamma^2\beta + 3a_{113}\alpha^3\gamma^2\vartheta + 3a_{122}\alpha^3\beta^2\gamma - 6a_{123}\alpha^2\beta\gamma\vartheta + 3a_{133}\alpha\gamma\vartheta^2 - a_{222}\alpha^3\beta^3 + 3a_{223}\alpha^2\beta^2\vartheta - 3a_{233}\alpha\beta\vartheta^2 + a_{333}\vartheta^3,$$

wenn die Coefficienten a_{ikl} durch folgende Gleichungen definirt werden:

$$a_{111} = (Hi)^2\,(Hi')^2\,(Hi'')^2, \qquad a_{222} = (H\tau)^2\,(H\tau')^2\,(H\tau'')^2,$$
$$a_{112} = (Hi)^2\,(Hi')^2\,(H\tau)^2, \qquad a_{223} = (H\tau)^2\,(H\tau')^2\,(H\alpha)^2,$$
$$a_{113} = (Hi)^2\,(Hi')^2\,(H\alpha)^2, \qquad a_{221} = (H\tau)^2\,(H\tau')^2\,(Hi)^2,$$
$$a_{333} = (H\alpha)^6, \quad a_{331} = (H\alpha)^4\,(Hi)^2, \quad a_{332} = (H\alpha)^4(H\tau)^2,$$
$$a_{123} = (Hi)^2\,(H\tau)^2\,(H\alpha)^2.$$

Diese Grössen müssen wir jetzt auf A, B, C, R zurückführen. Zunächst ist nach (5)

$$(Hi)^2\,(Hi')^2\,H_x^2 = \tau - \tfrac{1}{5}Ai.$$

Hieraus erhält man unmittelbar

$$(31)\quad \begin{cases} a_{111} = B - \frac{1}{5}A^2, \\ a_{112} = C - \frac{1}{5}AB, \\ a_{113} = N - \frac{1}{5}AM = \frac{11}{10}AC - \frac{1}{2}B^2 - \frac{2}{5}A^2B, \end{cases}$$

von welchen Gleichungen die erste mit (24a) übereinstimmt. Ferner ist nach (12)

$$(Hi)^2(H\tau)^2\,H_x^2 = (k,\tau)_2 = \tfrac{13}{30}A\tau + \tfrac{1}{30}Bi - \tfrac{1}{3}\alpha^2.$$

Hieraus folgt zunächst wieder der bereits angegebene Werth von a_{121}, und weiter:

$$(32)\quad \begin{cases} a_{122} = \frac{13}{30}AC + \frac{1}{30}B^2 - \frac{1}{3}N, \\ \qquad = \frac{4}{15}AC + \frac{1}{5}B^2, \\ a_{123} = \frac{13}{30}AN + \frac{1}{30}BM, \\ \qquad = \frac{13}{60}A^2C - \frac{3}{20}AB^2 - \frac{1}{10}BC. \end{cases}$$

Für a_{133} gehen wir aus von (19), d. i.

(32a) $(Hi)^2(H\alpha)^2 H_x^2 = -\frac{2}{15} Mi + \frac{1}{6}(2A^2 - 3B)\tau - \frac{7}{30} A\alpha^2,$

und verificiren mittelst dieser Relation wieder die für a_{131} und a_{132} gefundenen Werthe; ausserdem ergiebt sich

(33) $$a_{133} = -\frac{2}{15} M^2 + \frac{1}{6}(2A - 3B)N$$
$$= \frac{1}{6} A^3 C - \frac{7}{10} A^2 B^2 + \frac{27}{20} ABC + \frac{1}{4} B^3 - \frac{6}{5} C^2.$$

Um die quadratische Covariante $(H, \tau^2)_4$ zu berechnen, benutzen wir die Identität (6). Dieselbe giebt

(34) $$(H\tau)^2(H\tau')^2 H_x^2 = (ab)^2(a\tau)^2(b\tau')^2 a_x b_x - \frac{2}{5}(\tau\tau')^2 i_x^2 + \frac{1}{5}(i\tau)^2 \tau_x'^2$$
$$= L - \frac{2}{5} Ci + \frac{1}{5} B\tau.$$

Das erste Glied der rechten Seite ist

$$L = (ab)^2(a\tau)^2(b\tau')^2 a_x b_x = \big((f, \tau)_2, (f, \tau_2)\big)_2,$$

also nach (11)

$$= \frac{4}{9} A^2 (j, j)_2 + \frac{4}{3} A(j, \alpha i)_2 + (\alpha i, \alpha i)_2,$$

und hierin

(34a) $$(j, \alpha i)_2 = \frac{1}{3} \alpha_x (j, i)_2 + \frac{2}{3}(\alpha j)(ij) i_x j_x$$
$$= -\frac{1}{3} \alpha^2 - \frac{2}{3}(\vartheta i)\vartheta_x i_x$$
$$= -\frac{1}{3} \alpha^2 + \frac{1}{3} Bi - \frac{1}{3} A\tau.$$

Ferner ist

(34b) $$(\alpha i, \alpha i)_2 = \frac{1}{9}\alpha^2 (i, i)_2 + \frac{4}{9}(ii')(\alpha i')\, i_x \alpha_x - \frac{2}{9}(\alpha i')(\alpha i) i_x i_x'$$
$$= \frac{1}{3}\alpha^2 A - \frac{2}{9}(i\alpha)^2 i_x'^2 + \frac{1}{9}(ii')^2 \alpha_x^2$$
$$= \frac{4}{9} A\alpha^2 - \frac{2}{9} Mi.$$

Durch Einsetzen ergiebt sich also:

(34c) $$L = \frac{4}{9} ABi - \frac{2}{9} Mi = \frac{2}{3} Ci,$$

und somit aus (34) das einfache Resultat

(34d) $$(H\tau)^2(H\tau')^2 H_x^2 = \frac{4}{15} Ci + \frac{1}{5} B\tau.$$

Zunächst erhält man hieraus wieder den in (32) angegebenen Werth von a_{122}, und überdies:

$$(35)\qquad \begin{cases} a_{222} = \frac{4}{15} CB + \frac{1}{5} BC = \frac{7}{15} BC, \\ a_{223} = \frac{4}{15} CM + \frac{1}{5} BN \\ \qquad = \frac{19}{30} ABC - \frac{1}{10} B^3 - \frac{4}{5} C^2. \end{cases}$$

Weiter berechnen wir die quadratische Covariante $(H\tau)^2(H\alpha)^2 H_x^2$. Aus (6) folgt:

$$(H\tau)^2 (H\alpha)^2 H_x^2 = K - \tfrac{2}{5} Ni + \tfrac{1}{10} M\tau + \tfrac{1}{10} B\alpha^2,$$

wo

$$\begin{aligned} K &= (ab)^2(a\tau)^2(b\alpha)^2 a_x b_x \\ &= (ab)^2(a\alpha)(b\alpha)(a\tau)^2 b_x^2 - \tfrac{1}{2}(ab)^4(a\alpha)(b\alpha)\tau_x^2 + \tfrac{1}{2}(ab)^4 a_x b_x (\alpha\tau)^2 \\ &= \Big(\big((f,\tau)_2,\ \alpha\big)_1,\ (f,\alpha)_1\Big)_2 - \tfrac{1}{2} M\tau + \tfrac{1}{2} Ni. \end{aligned}$$

Nun ist nach (11)

$$\begin{aligned} \big((f,\tau)_2, \alpha\big)_1 &= -\tfrac{2}{3} A(j,\alpha)_1 - \tfrac{1}{3}\alpha(i,\alpha)_1 \\ &= \tfrac{2}{3} A\vartheta - \tfrac{2}{3}\alpha\beta. \end{aligned}$$

Bezeichnet man die zweite Ueberschiebung dieser Form mit $(f,\alpha)_1$ durch K', so wird also

$$K' = \tfrac{2}{3} A(\vartheta a)^2 (a\alpha) a_x^2 + \tfrac{2}{3}(\beta a)(a\alpha)^2 a_x^2$$

und nach (18a)

$$K' = \tfrac{2}{3}\Big[\big(\tfrac{1}{3} AB - \tfrac{1}{2} C\big) i + \big(\tfrac{1}{3} A^2 - \tfrac{1}{2} B\big)\tau - \tfrac{1}{3} A\alpha^2\Big] A + \tfrac{2}{3} K'',$$

wo jetzt [vgl. Clebsch, p. 376, Gl. (9)]:

$$\begin{aligned} K'' &= (i\alpha)(ia)(a\alpha)^2 a_x^2 \\ &= (ia)^2(a\alpha)^2 a_x\alpha_x - (a\alpha)^3(ai) a_x i_x \\ &= -(j\alpha)^2 j_x \cdot \alpha_x - \big(\tfrac{2}{3} A^2 - B\big)(\vartheta, i)_1 - (\alpha\gamma, i)_1 + \tfrac{2}{3} A(\alpha\beta, i)_1 \end{aligned}$$

Nun hat man

$$\begin{aligned} 2(\alpha\gamma, i)_1 &= (\alpha i)_1 \gamma + (\gamma i)_1 \alpha \\ &= -\beta\gamma + (\tau\alpha)(\tau i) i_x \cdot \alpha_x \\ &= -\beta\gamma + \alpha^2 B + (i\alpha)(\tau i)\tau_x \alpha_x \\ &= -\beta\gamma + \tfrac{1}{2}\alpha^2 B + \tfrac{1}{2}(\tau i)\left[(i\alpha)\tau_x + (\tau\alpha) i_x\right]\alpha_x \\ &= -\beta\gamma + \tfrac{1}{2} B\alpha^2 - (\vartheta\alpha)\vartheta_x \alpha_x \\ &= -\beta\gamma + \tfrac{1}{2} B\alpha^2 - \alpha\delta, \end{aligned}$$

ferner [Clebsch, p. 281]:

$$2(\alpha\beta, i)_1 = (\alpha, i)_1\beta + (\beta, i)_1\alpha$$
$$= -\beta^2 + \tfrac{1}{2}A\alpha^2,$$
$$-(j\alpha)^2 j_x = (\vartheta\alpha)\vartheta_x = \delta,$$

und somit:

$$(35a)\quad K'' = -\left(\tfrac{1}{8}A^2 - \tfrac{1}{2}B\right)\left(A\tau - Bi - \tfrac{1}{2}\alpha^2\right) + \tfrac{3}{2}\alpha\delta + \tfrac{1}{2}\beta\gamma - \tfrac{1}{3}\beta^2 A.$$

Die rechte Seite formen wir weiter um mittelst der Relationen

$$(35b)\qquad \beta\gamma = (i\alpha)(\tau\alpha)\, i_x\tau_x$$
$$= \tfrac{1}{2}(M\tau + Ni - B\alpha^2),$$

$$(35c)\qquad \begin{cases} \alpha\delta = \tfrac{1}{2}(M\tau - Ni), & \text{[Clebsch, p. 369]} \\ \beta^2 = -\tfrac{1}{2}A\alpha^2 + Mi, & \text{[d'Ovidio, l. c.].} \end{cases}$$

Es wird

$$(35d)\quad K'' = i\left(\tfrac{1}{2}N - \tfrac{1}{6}AM\right) + \tau\left(M + \tfrac{1}{2}AB - \tfrac{1}{3}A^3\right) + \alpha^2\left(\tfrac{1}{3}A^2 - \tfrac{1}{2}B\right)$$

und folglich:

$$K' = \tfrac{2}{3}\left[\tfrac{1}{2}Ni + M\tau - \tfrac{1}{2}B\alpha^2\right],$$
$$K = \tfrac{5}{6}Ni + \tfrac{1}{6}M\tau - \tfrac{1}{3}\alpha^2 B,$$

$$(36)\qquad (H\tau)^2(H\alpha)^2 H_x^2 = \tfrac{13}{30}Ni + \tfrac{4}{15}M\tau - \tfrac{7}{30}B\alpha^2.$$

Hieraus findet man wieder die Werthe von a_{123} und a_{223}, und weiter:

$$(37)\qquad a_{233} = \tfrac{7}{15}MN.$$

Endlich beschäftigen wir uns mit der Form $(H\alpha)^4 H_x^2$. Zunächst folgt aus (5)

$$(H\alpha)^4 H_x^2 = \tfrac{1}{5}(i\alpha)^2\alpha_x^2 + (ab)^2(a\alpha)^2(b\alpha)^2 a_x b_x$$
$$= \tfrac{1}{5}M\alpha^2 + \tfrac{1}{2}(ab)^2(a\alpha)(b\alpha)\left[(a\alpha)^2 b_x^2 + (b\alpha)^2 a_x^2 - (ab)^2\alpha_x^2\right]$$
$$= -\tfrac{3}{10}M\alpha^2 + (ab)^2(a\alpha)^3(b\alpha)b_x^2.$$

Das zweite Glied der rechten Seite nennen wir zur Abkürzung S, so dass nach Clebsch, p. 376, Gl. (9):

$$(37\,a)\quad S = \big((f, \alpha^3)_3, (f, \alpha)_1\big)_2$$

$$= \big(\tfrac{2}{3}A^2 - B\big)(\vartheta a)^2(a\alpha)\,a_x^2 + (\alpha a)(\gamma a)(a\alpha)\,a_x^2 - \tfrac{2}{3}A(\alpha a)(\beta a)(a\alpha)a_x^2$$

$$= \big(\tfrac{2}{3}A^2 - B\big)(\vartheta a)^2(a\alpha)a_x^2 + (a\alpha)^2(a\gamma)a_x^2 - \tfrac{2}{3}A(a\alpha)^2(a\beta)a_x^2.$$

Das zweite Glied der rechten Seite finden wir durch folgende Umformungen [Clebsch, p. 282, Gl. (10) und p. 376, Gl. (9)]

$$(a\alpha)^2(a\gamma)a_x^2 = (a\alpha)^2(a\tau)(\tau\alpha)a_x^2$$

$$= -(a\alpha)^2(a\tau)^2 a_x\alpha_x + (a\alpha)^3(a\tau)\,a_x\tau_x$$

$$= \tfrac{2}{3}A(j\alpha)^2 j_x\alpha_x + \tfrac{1}{3}(i\alpha)^2\alpha_x^2 + \big(\tfrac{2}{3}A^2 - B\big)(\vartheta\tau)\vartheta_x\tau_x$$

$$+ \tfrac{1}{2}\alpha_x(\gamma\tau)\tau_x + \tfrac{1}{2}\gamma_x(\alpha\tau)\tau_x - \tfrac{1}{3}A\alpha_x(\beta\tau)\tau_x - \tfrac{1}{3}A\beta_x(\alpha\tau)\tau_x.$$

Nun ist

$$(\gamma\tau)\tau_x = (\tau'\alpha)(\tau'\tau)\tau_x = \tfrac{1}{2}(\tau'\tau)^2\alpha_x = \tfrac{1}{2}C\alpha,$$

$$(\beta\tau)\tau_x = (i\tau)(i\alpha)\tau_x = (i\tau)^2\alpha_x + (i\tau)(\tau\alpha)i_x$$

$$= \tfrac{1}{2}B\alpha + \tfrac{1}{2}(i\tau)\,[(i\alpha)\tau_x + (\tau\alpha)\,i_x]$$

$$= \tfrac{1}{2}B\alpha + (\vartheta\alpha)\,\vartheta_x = \tfrac{1}{2}B\alpha + \delta,$$

$$(\alpha\tau)\tau_x = -\gamma_x,$$

$$(j\alpha)^2 j_x = -\big((\alpha, j)_1, \alpha\big)_1 = -(\vartheta, \alpha)_1 = -\delta, \qquad \text{[Clebsch, p. 281]}$$

$$(\vartheta\tau)\vartheta_x\tau_x = \tfrac{1}{2}(B\tau - Ci); \qquad \text{[„ p. 280]}$$

folglich:

$$(a\alpha)^2(a\gamma)a_x^2 = -A\alpha\delta + \big(\tfrac{1}{3}A^2 - \tfrac{1}{2}B\big)(B\tau - Ci) - \tfrac{1}{2}\gamma^2$$

$$+ \tfrac{1}{3}A\beta\gamma + \alpha^2\big(\tfrac{1}{4}C - \tfrac{1}{6}AB + \tfrac{1}{3}M\big).$$

Mittelst der Formeln (35b), (35c) und der von Herrn d'Ovidio gegebenen Relation

$$\gamma^2 = -\tfrac{1}{2}C\alpha^2 + N\tau$$

drückt sich rechts alles durch i, τ und α^2 aus. Es wird nämlich:

$$(a\alpha)^2(a\gamma)a_x^2 = -\tfrac{1}{6}BMi + \Big[B\big(\tfrac{1}{3}A^2 - \tfrac{1}{2}B\big) - \tfrac{1}{3}AM - \tfrac{1}{2}N\Big]\tau + \tfrac{1}{6}M\alpha^2.$$

Diesen Werth setzen wir in (37a) ein und entnehmen den Ausdruck $(\vartheta a)^2(a\alpha)a_x^2$ aus (18a), den Ausdruck $(a\alpha)^2(a\beta)a_x^2 = -K''$ aus (35a); so kommt

$$S=\tfrac{1}{3}(AN-BM)i+\left(\tfrac{1}{3}AM-\tfrac{1}{2}N\right)\tau+\tfrac{1}{6}M\alpha^2,$$

$$(38)\quad (H\alpha)^4H_x^2=\tfrac{1}{3}(AN-BM)i+\left(\tfrac{1}{3}AM-\tfrac{1}{2}N\right)\tau-\tfrac{2}{15}M\alpha^2.$$

Hieraus folgen wieder die schon bekannten Werthe von a_{331} und a_{332}, und ausserdem

$$(39)\qquad a_{333}=(H\alpha)^6=\tfrac{2}{3}AMN-\tfrac{1}{3}BM^2-\tfrac{1}{2}N^2.$$

Damit sind alle Coefficienten berechnet, welche in der typischen Darstellung (30) vorkamen. Insbesondere können wir folgenden Satz aussprechen:

Wenn die Invariante $4AMN-2BM^2-3N^2$ *verschwindet, so ist* α_x *ein Factor von* H.

Nun ist nach der Theorie der associirten Formen [Clebsch, p. 338]

$$(40)\quad f^4\cdot f(y)=\xi^5+5H\xi^3\eta^2+10T\xi^2\eta^3+5\left(\tfrac{i}{2}f^2-\tfrac{3}{4}H^2\right)\xi\eta^4+(qf^2-HT)\eta^5,$$

wenn

$$\xi=a_x^4a_y,\qquad \eta=(xy).$$

Setzt man hierin $x_1=\alpha_2$, $x_2=-\alpha_1$, so wird [Clebsch, p. 377, Gl. (10)]

$$(40\,a)\quad \xi=\left(\tfrac{2}{3}A^2-B\right)\delta_y+\left(\tfrac{1}{2}N-\tfrac{1}{3}AM\right)\alpha_y,\quad \eta=\alpha_y,$$

$$(40\,b)\qquad f=(a\alpha)^5=\left(\tfrac{2}{3}A^2-B\right)R.$$

Verschwindet also die Invariante a_{333}, *und ist weder* $R=0$ *noch* $2A^2=3B$, *so geht die Gleichung* $f=0$ *mittelst der linearen Substitution* (40a) *über in die Form*

$$\xi^5+10T\xi^2\eta^3+\tfrac{5}{2}if^2\xi\eta^4+qf^2\eta^5=0,$$

wo zwei Glieder fehlen.

Diese Gleichung kann nach den Untersuchungen der Herren Brioschi und Klein*) direct gelöst werden.

§ 7.

Typische Darstellung von H durch i, τ und α^2, falls R von Null verschieden ist.

Die im vorhergehenden Paragraphen berechneten quadratischen Covarianten liefern uns ohne weiteres die typische Darstellung von H durch i, τ und α^2. Es ist nämlich, immer unter der Voraussetzung, dass R nicht verschwindet (vgl. *op. cit.* p. 455):

*) Mathematische Annalen Bd. XII und XIII.

$$(41)\quad R^2 f = \varphi_{11}\alpha^2\gamma^2 + \varphi_{22}\alpha^2\beta^2 + \varphi_{33}\vartheta^2 - 2\varphi_{12}\alpha^2\beta\gamma - 2\varphi_{23}\alpha\beta\vartheta + 2\varphi_{31}\alpha\gamma\vartheta,$$

wenn man mit φ_{ik} die erwähnten Covarianten bezeichnet, nämlich:

$$\varphi_{11} = (Hi)^2(Hi')^2 H_x^2 = \tau - \tfrac{1}{5} Ai,$$

$$\varphi_{22} = (H\tau)^2(H\tau')^2 H_x^2 = \tfrac{4}{15} Ci + \tfrac{1}{5} B\tau,$$

$$\varphi_{33} = (H\alpha)^4 H_x^2 = \tfrac{1}{3}(AN - BM)i + \left(\tfrac{1}{3} AM - \tfrac{1}{2} N\right)\tau - \tfrac{2}{15} M\alpha^2,$$

$$\varphi_{12} = (Hi)^2(H\tau)^2 H_x^2 = \tfrac{1}{30} Bi + \tfrac{13}{30} A\tau - \tfrac{1}{8}\alpha^2,$$

$$\varphi_{23} = (H\tau)^2(H\alpha)^2 H_x^2 = \tfrac{13}{30} Ni + \tfrac{4}{15} M\tau - \tfrac{7}{30} B\alpha^2,$$

$$\varphi_{31} = (H\alpha)^2(Hi)^2 H_x^2 = -\tfrac{2}{15} Mi + \left(\tfrac{1}{3} A^2 - \tfrac{1}{2} B\right)\tau - \tfrac{7}{30} A\alpha^2.$$

Die Quadrate und Producte der Formen $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, ϑ lassen sich durch i, τ, α^2 nach der Theorie der quadratischen Formen ausdrücken (Clebsch, p. 203). Es wird

$$\gamma^2 = -\tfrac{1}{2} C\alpha^2 + N\tau,$$

$$\beta^2 = -\tfrac{1}{2} A\alpha^2 + Mi, \qquad \text{[vgl. auch d'Ovidio, l. c.]}$$

$$\vartheta^2 = -\tfrac{1}{2} Ci^2 + Bi\tau - \tfrac{1}{2} A\tau^2,$$

$$-2\beta\gamma = -Ni - M\tau + B\alpha^2,$$

$$-2\alpha\beta\vartheta = \begin{vmatrix} M & A & i \\ N & B & \tau \\ \alpha^2 & i & 0 \end{vmatrix} = Ni^2 - Mi\tau - Bi\alpha^2 + A\tau\alpha^2,$$

$$2\alpha\gamma\vartheta = \begin{vmatrix} B & M & i \\ C & N & \tau \\ \tau & \alpha^2 & 0 \end{vmatrix} = -Ni\tau + M\tau^2 + Ci\alpha^2 - B\tau\alpha^2.$$

Das Einsetzen dieser Werthe in (41) führt schliesslich zu folgendem Resultate

$$(42)\quad R^2 f = \left[\tfrac{13}{30} N^2 - \tfrac{1}{6} C(AN - BM)\right] i^3 + \left[\tfrac{1}{4}(AN - BM) + \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{3} A^2 - \tfrac{1}{2} B\right) M\right] \tau^3 + \left[\tfrac{1}{2} B(AN - BM) - \tfrac{9}{20} MN\right] i^2\tau + \left[\tfrac{1}{2} ABM - \tfrac{1}{2} A^2 N - \tfrac{2}{5} M^2\right] i\tau^2 \qquad \text{[verte!]}$$

$$+\left[\tfrac{1}{5}MC-\tfrac{7}{10}NB\right]i^2\alpha^2$$
$$+\left[\tfrac{3}{10}BM+\tfrac{7}{10}AN\right]i\tau\alpha^2$$
$$-\tfrac{1}{2}AM\tau^2\alpha^2-\tfrac{1}{5}\alpha^4 iN+\tfrac{1}{2}\alpha^4\tau M-\tfrac{1}{3}\alpha^6 B.$$

§ 8.

Behandlung des Falles, wo R verschwindet.

Wenn $R=0$ ist, so ist auch $P=0$. Nach der allgemeinen Theorie der Formen sechster Ordnung lässt sich daher H als cubische Function von l und m darstellen. Wir können dann mittelst (9) und (14) i, τ, α^2 einführen, und da in Folge von $R=0$ zwischen letzteren Bildungen eine lineare Identität besteht, wird f auch eine ganze Function dritten Grades von i und τ sein müssen. Um die Berechnung der Coefficienten auszuführen, machen wir nicht von den Formeln der Theorie der Formen sechster Ordnung Gebrauch, sondern gehen direct vor.

Es sei also $R=0$, aber die Resultante von i und τ, d. i. die Invariante N, von Null verschieden. Für die typische Darstellung benutzen wir dann die drei Formen i, τ, ϑ; es wird nach Clebsch, p. 420, Gl. (3):

$$(43)\quad (2N)^3 H=[(Hi)^2(Ci-B\tau)+(H\tau)^2(A\tau-Bi)+2(H\vartheta)^2\vartheta]$$
$$\cdot[(Hi')^2(Ci-B\tau)+(H\tau')^2(A\tau-Bi)+2(H\vartheta')^2\vartheta]$$
$$\cdot[(Hi'')^2(Ci-B\tau)+(H\tau'')^2(A\tau-Bi)+2(H\vartheta'')^2\vartheta].$$

Hierin kommen die in § 6 berechneten Invarianten a_{111}, a_{112}, a_{122}, a_{222} vor, ausserdem noch andere, welche die Symbole ϑ enthalten und zu deren Berechnung wir noch die quadratische Covariante $(H\vartheta)^2(H\vartheta')^2H_x^2$ kennen müssen. Es ist nach (6), da $(i\vartheta)^2=0$,

$$(H\vartheta)^2(H\vartheta')^2H_x^2=(ab)^2(a\vartheta)^2(b\vartheta')^2a_xb_x-\tfrac{2}{5}(\vartheta\vartheta')^2i_x^2$$
$$=(ab)^2(a\vartheta)^2(b\vartheta')^2a_xb_x-\tfrac{2}{5}Ni;$$

ferner nach Clebsch, p. 203:

$$2\vartheta_x^2\vartheta_y^2=\begin{vmatrix} A & B & i_x^2\\ B & C & \tau_x^2\\ i_y^2 & \tau_y^2 & (xy)^2\end{vmatrix}=i_x^2(B\tau_y^2-Ci_y^2)+\tau_x^2(Bi_y^2-A\tau_y^2)$$
$$+(xy)^2(AC-B^2),$$

also:

$$2(ab)^2(a\vartheta)^2(b\vartheta')^2 a_x b_x = 2B(ab)^2(a\tau)^2(bi)^2 a_x b_x - C(ab)^2(ai)^2(bi')^2 a_x b_x$$
$$- A(ab)^2(a\tau)^2(b\tau')^2 a_x b_x + 2Ni,$$

oder nach (11) und (34c) und da

$$(ab)^2(ai)^2(bi')^2 a_x b_x = (jj')^2 j_x j_x' = \tau_x^2:$$

$$2(ab)^2(a\vartheta)^2(b\vartheta')^2 a_x b_x = \tfrac{1}{3} M\tau + \tfrac{2}{3} Ni - \tfrac{2}{3} B\alpha^2,$$

(43a) $$(H\vartheta)^2 (H\vartheta')^2 H_x^2 = \tfrac{1}{6} M\tau - \tfrac{1}{15} Ni - \tfrac{1}{3} B\alpha^2.$$

Die in § 6 gefundenen und in § 7 zusammengestellten Formeln geben uns jetzt, da $(i\vartheta)^2 = 0$, $(\tau\vartheta)^2 = 0$, $(\vartheta\alpha)^2 = R$, zusammen mit (43a) folgende Invarianten:

$$(Hi)^2 (Hi')^2 (H\vartheta)^2 = (\varphi_{11}, \vartheta)_2 = 0,$$
$$(H\tau)^2 (H\tau')^2 (H\vartheta)^2 = (\varphi_{22}, \vartheta)_2 = 0,$$
$$(Hi)^2 (H\tau)^2 (H\vartheta)^2 = (\varphi_{12}, \vartheta)_2 = -\tfrac{1}{3} R,$$
$$(Hi)^2 (H\vartheta)^2 (H\vartheta')^2 = -\tfrac{1}{6} BM - \tfrac{1}{15} AN,$$
$$(H\tau)^2 (H\vartheta)^2 (H\vartheta')^2 = \tfrac{1}{6} CM - \tfrac{2}{5} BN,$$
$$(H\vartheta)^2 (H\vartheta')^2 (H\vartheta'')^2 = -\tfrac{1}{3} BR.$$

Diesen Relationen fügen wir die folgenden hinzu, welche allerdings nicht weiter benutzt werden:

$$(H\alpha)^4 (H\vartheta)^2 = -\tfrac{2}{15} MR, \quad (H\tau)^2 (H\alpha)^2 (H\vartheta)^2 = -\tfrac{7}{30} BR,$$
$$(Hi)^2 (H\alpha)^2 (H\vartheta)^2 = -\tfrac{7}{30} AR.$$

In Folge dieser Beziehungen fallen auf der rechten Seite von (43) alle ungeraden Potenzen von ϑ aus, sobald $R = 0$, und die geraden lassen sich mittelst der Relation

$$-2\vartheta^2 = A\tau^2 + Ci^2 - 2Bi\tau$$

auf i, τ reduciren. So entsteht das Resultat:

(43b) $$8N^4 H = B\left(N + \tfrac{1}{2} AM\right)(Ci - B\tau)^3$$
$$+ C\left(\tfrac{5}{3} NB - \tfrac{1}{2} MC\right)(A\tau - Bi)^3$$
$$+ \left(3NC + ABN + B^2 M - \tfrac{1}{2} ACM\right)(Ci - B\tau)^2 (A\tau - Bi)$$
$$+ \left(ACN + 3B^2 N - \tfrac{1}{2} BCM\right)(Ci - B\tau)(A\tau - Bi)^2.$$

Ist also $R = 0$ *und* N *von Null verschieden, so geht die Gleichung* $H = 0$ *durch die Substitution*

$$z = \frac{Ci - B\tau}{A\tau - Bi}$$

in eine cubische Gleichung für z *über, ist daher algebraisch lösbar.* Wir erinnern daran, dass in diesem Falle auch $f = 0$ algebraisch lösbar ist, indem α ein Factor von f wird (Clebsch, p. 378). —

Wir betrachten jetzt noch die Fälle, wo neben R eine der Invarianten M, N, A, B, C Null ist, ohne dass M und N gleichzeitig verschwinden. Es sind die folgenden:

1) *Soll* $M = 0$ *sein*, so ergiebt die Identität

$$-2R^2 = AN^2 - 2BMN + CM^2,$$

dass auch $A = 0$, folglich auch $C = 0$; und man findet:

$$8B^2H = \tau(\tau^2 - 24Bi^2). \tag{44}$$

Hier sind τ und i vollständige Quadrate: $i = \xi^2$, $\tau = \eta^2$. *Sind also* C *und* A *Null,* B *von Null verschieden, so kann* H *in die Form gebracht werden*

$$8B^2H = \xi^2(\xi^4 - 24B\eta^4).$$

Wie es nach (29b) sein muss, hat die Gleichung $H = 0$ eine Doppelwurzel.

2) *Sollen* B *und* R *verschwinden*, so folgt

$$A^3 = -36C,$$

denn der Fall $C = 0$ ist auszuschliessen, weil er auch M und N zu Null machen würde. Aus (43b) folgt:

$$A^4 \cdot H = -6\tau[18\tau^2 - A^2i^2 + 6Ai\tau]. \tag{44a}$$

Es wird also τ ein Factor von H.

3) *Sollen* A *und* R *verschwinden*, so muss $C = 0$ sein, ein Fall, der eben besprochen wurde, oder es muss $C^2 = 3B^2$ sein; letztere Annahme giebt kein besonders einfaches Resultat.

Die Covariante i erscheint als Factor von H, wenn auf der rechten Seite von (43b) der Factor von τ^3 verschwindet; τ tritt nicht nur im Falle (44a) als Factor von H auf, denn das Glied i^3 in (43b) enthält neben B noch einen andern Factor.

§ 9.

Behandlung des Falles, wo $\mathfrak{R}$ verschwindet.

Die in § 6 gegebene typische Darstellung von H wird nur ungültig, wenn R verschwindet; sie bleibt daher auch bestehen, wenn $\mathfrak{R}$ Null wird, sobald nur R noch als von Null verschieden angesehen wird. Da nach (28) auch P verschwindet, so lässt sich H als cubische

Function von l und m darstellen, so lange die Resultante von l, m, d. i. die Invariante

$$(ll')^2 (mm')^2 - (lm)^2 (l'm)^2$$

von Null verschieden ist. Letzteres kann immer angenommen werden, denn ein gemeinsamer Factor von l und m muss auch Factor von n sein, und dann müsste H einen vierfachen Factor haben (Clebsch, p. 439); man überzeugt sich auch leicht durch Rechnung, dass beregte Resultante nicht den Factor $\mathfrak{R}$ enthält, somit nicht identisch Null ist.

Da die Determinante der linearen Gleichungen (9), (14), (20) verschwindet, kann man nicht i, τ, α^2 durch l, m, n mittelst dieser Gleichungen berechnen, kann also nicht von (42) ausgehen. Um daher l und m einzuführen, wird man am Besten die allgemeinen Formeln der Theorie der Formen sechster Ordnung benutzen (Clebsch, p. 455); da in ihnen nur die Invarianten von H vorkommen und diese in § 5 berechnet wurden, haben wir nichts mehr hinzuzufügen: *Wenn* $\mathfrak{R}=0$ *ist, so ist* H *eine ganze Function dritten Grades von* l *und* m. Die Gleichung $H = 0$ wird also algebraisch lösbar, und man kann hiervon, wie am Schlusse von § 6 Gebrauch machen, um $f = 0$ auf eine einfachere Form zu bringen.

Insbesondere ist die Bedingung $\mathfrak{R} = 0$ nach (28a) erfüllt, wenn gleichzeitig A und C verschwinden, was auf (44) führt, oder wenn C und die Discriminante verschwinden, ein Fall, den wir unten besprechen (§ 12).

§ 10.

Ueber den Fall $C = 0$.

Schon in § 5 wurde an die einfache Form erinnert, welche H im Falle $C = 0$ annimmt, und welche darauf beruht, dass f mittelst der Substitution (29) in die Form (29a) übergeht. Letztere wird von Clebsch durch einen Grenzübergang aus der Darstellung von f als Summe von drei fünften Potenzen hergeleitet; es ist wohl nicht überflüssig, auch eine directe Begründung dieser Relation hier zu geben. Zu dem Zwecke entwickeln wir die allgemeine typische Darstellung von f durch die linearen Covarianten α und δ, welche bei Clebsch nicht ausgeführt ist.

Die Formeln der typischen Darstellung durch lineare Covarianten sind hier folgende:

$$\xi = \alpha, \quad \eta = (\vartheta\alpha)\vartheta_x, \quad \psi = \vartheta_x^2, \quad D = -(\vartheta\alpha)^2 = -R,$$

$$(45) \qquad -R^5 f = A_5\xi^5 - 5A_4\xi^4\eta + 10A_3\xi^3\eta^2 - 10A_2\xi^2\eta^3 + 5A_1\xi\eta^4 - A_5\eta^5,$$

$$(45a)\qquad \begin{cases} A_0 = \left(\frac{2}{3}A^2 - B\right)\cdot R, \\ A_2 = RB_0 - \frac{1}{2}\Delta A_0, \\ A_3 = RB_1 - \frac{1}{2}\Delta A_1, \\ A_4 = R^2C_0 - R\Delta B_0 + \frac{1}{4}\Delta^2 A_0, \\ A_5 = R^2C_1 - R\Delta B_1 + \frac{1}{4}\Delta^2 A_1, \end{cases}$$

$$\Delta = (\vartheta\vartheta')^2 = N, \qquad A_1 = (a\alpha)^4(a\delta),$$
$$B_0 = (a\vartheta)^2(a\alpha)^3, \qquad B_1 = (a\vartheta)^2(a\alpha)^2(a\delta),$$
$$C_0 = (a\vartheta)^2(a\vartheta')^2(a\alpha), \quad C_1 = (a\vartheta)^2(a\vartheta')^2(a\delta).$$

Aus Gleichung (10), p. 377 bei Clebsch findet man sofort

$$A_1 = \left(\tfrac{1}{2}N - \tfrac{1}{3}MA\right)(a\delta) = -R\left(\tfrac{1}{2}N - \tfrac{1}{3}MA\right).$$

Ferner aus Gleichung (9) ebenda p. 376

$$B_0 = \left(\tfrac{2}{3}A^2 - B\right)(\vartheta\vartheta')^2 + (\vartheta\alpha)(\vartheta\gamma) - \tfrac{2}{3}A(\vartheta\alpha)(\vartheta\beta)$$
$$= \left(\tfrac{2}{3}A^2 - B\right)N + (\delta\gamma) - \tfrac{2}{3}A(\delta\beta).$$

Hierin sind $(\delta\gamma)$ und $(\delta\beta)$ aus den l. c. p. 280 gegebenen Formeln bekannt; es wird

$$B_0 = \left(\tfrac{1}{3}A^2 - \tfrac{1}{2}B\right)N + \tfrac{1}{6}M^2.$$

Weiter haben wir nach Gl. (10) p. 282

$$B_1 = (a\vartheta)^2(a\alpha)^2(a\delta) = (a\tau)(ai)(i\tau)(a\alpha)^2(a\delta)$$
$$= (a\tau)^2(a\alpha)^2(ai)(i\delta) - (ai)^2(a\tau)(a\alpha)^2(\tau\delta)$$
$$= -\tfrac{2}{3}A(j\alpha)^2(ji)(i\delta) - \tfrac{1}{3}(\alpha i)(i''\alpha)^2(i\delta) + (j\tau)(j\alpha)^2(j\delta)$$
$$= -\tfrac{2}{3}(i\delta)^2A + \tfrac{1}{3}M(i\alpha)(i\delta) + (\tau\delta)^2.$$

Hierin ist

$$(i\delta)^2 = (i\vartheta)(i\vartheta')(\vartheta\alpha)(\vartheta'\alpha) = (i\vartheta)^2(\vartheta'\alpha)^2 - \tfrac{1}{2}(\vartheta\vartheta')^2(i\alpha)^2 = -\tfrac{1}{2}MN,$$

$$(\tau\delta)^2 = (\tau\vartheta)(\tau\vartheta')(\vartheta\alpha)(\vartheta'\alpha) = -\tfrac{1}{2}N^2,$$

$$(i\alpha)(i\delta) = (\beta\delta) = -\tfrac{1}{2}(NA - MB),$$

also:

$$B_1 = \tfrac{1}{6}AMN - \tfrac{1}{2}N^2 + \tfrac{1}{6}BM^2.$$

Für C_0 benutzen wir die bekannten Ausdrücke für $(i, \vartheta)_1$ und $(\tau, \vartheta)_1$ sowie den l. c. p. 377 gegebenen Werth von $(a\tau)^2 (a\tau')^2 (a\alpha)$; es kommt

$$\begin{aligned} C_0 &= (a\vartheta)^2 (a\vartheta')^2 (a\alpha) = (ai)(a\tau)(i\tau)(a\vartheta)^2 (a\alpha) \\ &= (ai)(a\alpha)(a\tau)(a\vartheta)[(i\vartheta)(a\tau) + (\vartheta\tau)(ai)] \\ &= -\tfrac{1}{2}[A(a\tau)^2 (a\tau')^2 (a\alpha) - B(a\tau)^2 (ai)^2 (a\alpha)] \\ &+ \tfrac{1}{2}[B(a\tau)^2 (ai)^2 (a\alpha) - C(ai)^2 (ai')^2 (a\alpha)] \\ &= -\tfrac{1}{3} AR. \end{aligned}$$

Durch eine analoge Umformung ergiebt sich

$$C_1 = -\tfrac{1}{2}[A(a\delta)(a\tau)^2 (a\tau')^2 + C(a\delta)(ai')^2 (ai)^2].$$

Hierin ist

$$(ai)^2 (ai')^2 (a\delta) = -(ji)^2 (j\delta) = (\alpha\delta) = -R$$

und, da $(j, \tau)_2$ identisch verschwindet:

$$\begin{aligned} (a\tau)^2 (a\tau')^2 (a\delta) &= -\tfrac{2}{3} A(j\tau)^2 (j\delta) - \tfrac{1}{3}(i\tau)^2 (\alpha\delta) - \tfrac{2}{3}(i\tau)(\alpha\tau)(i\vartheta) \\ &= \tfrac{2}{3} BR, \end{aligned}$$

wo eine bei Aufstellung von (35a) bereits benutzte Umformung von $(i\tau)(\alpha\tau) i_x$ angewandt ist. So findet sich

$$C_1 = \tfrac{1}{2} CR - \tfrac{1}{3} ABR = -\tfrac{1}{6} MR.$$

Die für B_0, B_1, C_0, C_1 gefundenen Werthe führen schliesslich mittelst (45a) zu folgenden Werthen der Coefficienten der typischen Darstellung

$$(45\,b)\quad \begin{cases} A_0 = \left(\tfrac{2}{3} A^2 - B\right) R, \\ A_1 = -\left(\tfrac{1}{2} N - \tfrac{1}{3} AM\right) R, \\ A_2 = \tfrac{1}{6} M^2 R, \\ A_3 = \left(\tfrac{1}{6} BM^2 - \tfrac{1}{4} N^2\right) R, \\ A_4 = -\left[\tfrac{1}{6} M^2 N + \tfrac{1}{2} N^2 \left(\tfrac{1}{3} A^2 - \tfrac{1}{2} B\right) + \tfrac{1}{3} AR^2\right] R, \\ A_5 = \left[\tfrac{3}{8} N^3 - \tfrac{1}{12} AMN^2 - \tfrac{1}{6} BM^2 N - \tfrac{1}{6} MR^2\right] R. \end{cases}$$

Alle haben den Factor R; derselbe hebt sich daher auf beiden Seiten von (45) einmal fort.

Setzt man schliesslich $C = 0$, so kommt man in der That zu der in (29a) gegebenen Darstellung. Die besonderen Eigenschaften der Hesse'schen Form in diesem Falle wurden bereits in § 5 erwähnt.

§ 11.

Ueber die Fälle, wo α identisch verschwindet.

Das identische Verschwinden von α ist nach Clebsch (p. 370) mit dem gleichzeitigen Verschwinden von M und N vollkommen äquivalent; ausserdem wird ϑ identisch Null. Schliesst man vor der Hand die Fälle aus, wo f mehrfache lineare Factoren enthält, so bleiben folgende Möglichkeiten:

1) $\alpha \equiv 0$, τ und A von Null verschieden; es ist

$$i = 2\xi\eta,$$
$$f = 5\xi\eta(b\xi^3 + e\eta^3),$$

also:

$$(46)\quad \tfrac{1}{2}H = \begin{vmatrix} 3b\xi^2\eta & b\xi^3+e\eta^3 \\ b\xi^3+e\eta^3 & 3e\xi\eta^2 \end{vmatrix} = -b^2\xi^6 - e^2\eta^6 + 7be\xi^3\eta^3.$$

H wird eine quadratische Function der Cuben der linearen Factoren von i.

In diesem Falle muss (Clebsch, p. 443) g gleich dem Quadrate von i, und l zu i proportional werden. Letztere Bedingung ist nach (9) erfüllt, da in Folge des Verschwindens von ϑ jetzt i zu τ proportional ist. Beide Bedingungen sind damit äquivalent, dass m zu l proportional wird, ohne dass $g \equiv 0$. Dies tritt in der That ein, da nach (14) auch m zu i proportional ist, sobald $\alpha \equiv 0$ (und folglich $\vartheta \equiv 0$).

Soll umgekehrt l zu m proportional sein, so verschwindet $(l, m)_1$, d. h. man hat

$$(46a)\qquad (260B + 125A^2)\vartheta - 800\alpha\gamma + 200A\alpha\beta \equiv 0$$

und hieraus, da $(\vartheta, \alpha)_1 = \delta\alpha$, $(\gamma\alpha) = N$, $(\beta\alpha) = M$:

$$\alpha[(260B + 125A^2)\delta - 200(4N - AM)\alpha] \equiv 0.$$

Es muss also entweder α identisch verschwinden, oder δ zu α proportional sein; im letzteren Falle würde wegen $(\vartheta\alpha)\vartheta_x = \delta$, ϑ zu α^2 proportional sein müssen, also die Discriminante von ϑ, d. i. N, verschwinden. Man findet weiter

$$(260B + 125A^2)(\vartheta\alpha)^2 = 0,$$

also $R = 0$ oder $260B + 125A^2 = 0$. Ist $R = 0$, so verschwindet wegen $N = 0$ auch M, also wieder α. Ist $52B = -25A^2$ und R von Null verschieden, so ist, da jedenfalls $\mathsf{P} = (lm)(ln)(mn)$ verschwindet, $\mathfrak{R} = 0$; zusammen mit $N = 0$ führt dies zum Verschwinden

der drei Invarianten A, B, C; es würde also f einen 3-fachen Factor enthalten müssen, was wieder das Verschwinden von α nach sich zieht:

Soll H als quadratische Function zweier Cuben darstellbar sein, so muss α identisch verschwinden.

2) $\alpha \equiv 0$, $\tau \equiv 0$, A von Null verschieden. Hier folgt auch $j = 0$ und es wird

$$f = a\xi^5 + b\eta^5,$$
$$\frac{1}{2} H = ab\xi^3\eta^3.$$

Soll umgekehrt H diese Form haben, so muss nach dem vorhergehenden Satze α verschwinden. Ferner muss die Discriminante Null sein, also nach (29b) entweder $C = 0$ sein oder $A^2 = 64B$. Da $N = (\tau\alpha)^2$ verschwindet, muss im ersten Falle auch $B = 0$ sein; da ferner $\vartheta \equiv 0$, sobald $\alpha \equiv 0$, so giebt die Relation zwischen ϑ^2, i^2, τ^2, $i\tau$ auch $\tau \equiv 0$ oder $A = 0$. Im letzteren Falle würde f einen dreifachen linearen Factor enthalten; es bleibt also nur die Möglichkeit $\tau \equiv 0$; auf dieselbe Bedingung führt auch die Annahme $A^2 = 64B$. Also:

Soll H gleich dem Cubus einer quadratischen Form sein, so muss f sich als Summe zweier fünften Potenzen darstellen lassen.

§ 12.

Ueber die Fälle, wo f mehrfache lineare Factoren enthält.

1) *f hat einen doppelten linearen Factor;* es verschwindet die Discriminante $A^2 - 64B$. Nach (29b) verschwindet auch die Discriminante von H, und zwar ebenfalls von der ersten Ordnung: *auch H hat einen doppelten linearen Factor.* Es handelt sich für uns darum diesen Factor zu bestimmen.

Wir behandeln besonders den Fall $C = 0$. Wir machen wieder die Transformation (29), so dass

$$\left(\frac{9}{8}\right)^4 A^3 B^{13} H = \frac{1}{3}\eta^2 \cdot \varphi,$$

wo

$$\varphi = A^2\xi^4 + \frac{1}{3} A^2\xi^3\eta + \frac{1}{12} B\eta^4.$$

Die Invarianten von φ sind

$$i_\varphi = \frac{1}{6} A^2 B, \qquad j_\varphi = -\frac{1}{2^5 \cdot 3^2} A^4 B,$$
$$i_\varphi^3 - 6j_\varphi^2 = \frac{1}{2^9 \cdot 3^3} A^6 B^2 (64B - A^2).$$

Die Discriminante von φ ist also Null. Der Doppelfactor von φ wird auch Doppelfactor von H und von f; ihn haben wir also zu

suchen. Er ist auch als Doppelfactor in der Hesse'schen Form H_φ enthalten, d. h. in

$$H_\varphi = \frac{A^2}{2^3 \cdot 3^2}\,\xi[-A^2\xi^3 + 12B\xi\eta^2 + 2B\eta^3];$$

er muss also auch in der eckigen Klammer der rechten Seite auftreten; in derselben steht eine binäre cubische Form; ihr Doppelfactor ist gegeben durch ihre Hesse'sche Covariante

$$-4B[2A^2\xi^2 + A^2\xi\eta + 8B\eta^2].$$

In Folge der Relation $A^2 = 64B$ wird dieser Ausdruck in der That gleich $-\frac{1}{2}B[4\xi + \eta]^2$. Somit haben wir:

Wenn $C = 0$ und $A^2 = 64B$, so ist f theilbar durch das Quadrat der linearen Form

$$4\xi + \eta = 5\delta - \frac{7}{2}B\alpha. \tag{47}$$

In der That findet man durch Ausführung der Division:

$$6R^4 f = B(4\xi + \eta)^2\,(16\xi^3 - 8\xi^2\eta + 3\xi\eta^2 - \eta^3).$$

Ist C von Null verschieden, so scheint sich die Doppelwurzel nicht mit gleicher Einfachheit bestimmen zu lassen. Die Coordinaten y_1, y_2 derselben findet man dann durch Anwendung des bekannten allgemeinen Verfahrens, nach welchem:

$$y_1^n : y_1^{n-1}y_2 : \cdots : y_2^n = \frac{\partial D}{\partial a_0'} : \frac{\partial D}{\partial a_1'} : \cdots : \frac{\partial D}{\partial a_n'},$$

wo D die Discriminante der Form n^{ter} Ordnung

$$\begin{aligned} f &= a_0'x_1^n + a_1'x_1^{n-1}x_2 + a_2'x_1^{n-2}x_2^2 + \cdots + a_n'x_2^n \\ &= a_0x_1^n + n\,a_1x_1^{n-1}x_2 + \binom{n}{2}a_2x_2^{n-2}x_2^2 + \cdots + a_nx_2^n \end{aligned}$$

bezeichnet. Es sei ϱ ein unbestimmter Factor, so folgt zunächst für $n = 5$

$$\varrho(xy)^5 = x_2^5\frac{\partial D}{\partial a_0} - x_2^4x_1\frac{\partial D}{\partial a_1} + x_2^3x_1^2\frac{\partial D}{\partial a_2} - \cdots - x_1^5\frac{\partial D}{\partial a_5}.$$

Führt man durch das Zeichen ∂ den rechts vorgenommenen Differentiationsprocess ein (so dass $\varrho(xy)^5 = \partial D$), so wird

$$\partial D = \partial(A^2 - 64B)$$

und man findet successive:

$$\partial i_x^2 = -2(xz)\,a_x^4a_z,$$

$$\partial A = \partial(ii')^2 = 4i_xa_x^1(ai) = 4q,$$

$$\partial \tau_x^2 = \partial (ab)^2 (ai)^2 (bi')^2 a_x b_x$$
$$= -2 b_x^2 i_x^2 (bi')^2 b_x (xz) + 4 (ab)^2 (bi')^2 a_x b_x a_x (ca) c_x^4,$$
$$\partial B = \partial (i\tau)^2 = 2\tau_x (a\tau) a_x^4 + 2 b_x^2 i_x^2 (bi')^2 (bi'') i_x''' + 4 (ab)^2 (bi')^2 (ai'') (bi'') (ca) c_x^4 a_x.$$

Das letzte Glied der rechten Seite ist gleich

$$-4 (aj)^2 (ai'') (ji'') (ca) c_x^4 a_x = 4 (aj)^2 (ai) c_x^4 a_x [(jc)(ai) + (aj)(ci)]$$
$$= -4 (j'j)^2 (jc) j_x' c_x^4 = -2 (\tau c) \tau_x c_x^4.$$

Also wird:

$$\partial B = 4 (f, \tau)_1 - 2 \alpha_x i_x^2.$$

Die Doppelwurzel $y_1 : y_2$ bestimmt sich daher aus der Relation:

$$\varrho (xy)^5 = \partial (A^2 - 64 B) = 8 [Aq - 32 (f, \tau)_1 + 16 \alpha i].$$

2) *f hat einen dreifachen linearen Factor;* es verschwindet α identisch und es ist $A = 0$, während i nicht verschwindet (Clebsch, p. 373); auch τ wird identisch Null. Man hat also aus (9), $l \equiv 0$, folglich auch $m \equiv 0$ und $n \equiv 0$, ferner aus § 5. $\mathsf{A} = 0$, $\mathsf{B} = 0$, $\Gamma = 0$; es enthält also g einen dreifachen linearen Factor; dann aber muss g (als Covariante i von H) ein Biquadrat sein (Clebsch, p. 445 f.), und *es hat H einen vierfachen linearen Factor;* die vierte Potenz desselben ist zu g proportional; g selbst wird also proportional zu dem Quadrate von i.

Soll umgekehrt H einen vierfachen Factor enthalten, so muss l identisch verschwinden und g ein Biquadrat sein, also $\mathsf{B} = 0$ und $\Gamma = 0$. Erstere Gleichung giebt nach (25) $A^2 = -180 B$, und da gleichzeitig $A^2 = 64 B$ sein muss, folgt $A = 0$, $B = 0$; dann muss nach (25a) auch $C = 0$ sein, da l verschwinden sollte. Es verschwinden also M, N und somit α, d. h. *es enthält f immer einen dreifachen Factor, wenn H einen vierfachen enthält.*

3) *f enthält einen vierfachen linearen Factor.* Es ist i identisch Null (Clebsch, p. 374); es verschwinden also j, τ und alle Invarianten. Da nach Herrn d'Ovidio die Hesse'sche Form von H gleich $\frac{1}{3} jf - \frac{1}{10} iH$ ist, so verschwindet dieselbe ebenfalls, oder: *H ist sechste Potenz des vierfachen Factors von f.*

Soll umgekehrt H eine sechste Potenz sein, so müssen alle Invarianten verschwinden und $l \equiv 0$ sein; dies giebt $\alpha \equiv 0$ und wegen (9) $\tau \equiv 0$; folglich ist j eine dritte Potenz oder verschwindet ebenfalls. Aus der Bedingung $jf = \frac{3}{10} iH$ folgt dann, dass $j = b\xi^3$, wenn $H = \xi^6$; dann wird f proportional zu $\xi^3 \eta^2$, wo $i = \eta^2$ gesetzt ist.

Nach dem vorigen Falle muss aber f den Factor ξ vierfach enthalten, also $\eta = \xi$ sein; es würde also f eine fünfte Potenz sein und folglich H identisch verschwinden müssen. Somit bleibt nur die Möglichkeit, dass i und j identisch Null sind: *Wenn H eine sechste Potenz einer linearen Form ist, so ist letztere immer vierfacher Factor von f.*

4) *f enthält einen fünffachen Factor.* Es verschwindet H identisch; und umgekehrt.

5) *f enthält zwei doppelte lineare Factoren.* Nach Herrn l'Ovidio bestehen die vier Relationen

$$A^2 - 64B = 0, \quad 3A^3 + 2^9 C = 0, \quad 3AB + 8C = 0, \quad R = 0,$$

von denen irgend zwei Folge der beiden anderen sind.

Setzt man

$$f = 10x_1^2x_2^2(a_2x_1 + a_3x_2) = 10x_1^2x_2^2z,$$
$$z = a_2x_1 + a_3x_2, \quad z' = a_2x_1 - a_3x_2,$$

so ist, wie man a. a. O. findet:

$$i = 2(2z^2 + z'^2),$$
$$j = -3z(z^2 + z'^2) = -6z(a_2^2x_1^2 + a_3^2x_2^2),$$
$$\tau = 8a_2^2a_3^2(3z^2 - z'^2),$$
$$\alpha = 40a_2^2a_3^2z, \quad \beta = 160a_2^3a_3^3z', \quad \gamma = -640a_2^5a_3^5z',$$
$$A = 64a_2^2a_3^2, \quad B = 64a_2^4a_3^4,$$
$$C = -2^9 \cdot 3a_2^6a_3^6, \quad M = 2^9 \cdot 5^2a_2^6a_3^6 = \frac{25}{8}AB, \quad N = -\frac{25}{2}B^2.$$

Es wird also α ein Factor von f, wie es sein muss, sobald R verschwindet. Ausserdem werden noch folgende Relationen a. a. O. angegeben:

$$H = -4x_1^2x_2^2(2z^2 + z'^2), \quad \vartheta = -80a_2^2a_3^2(z^2 + z'^2),$$
$$\delta = -6400a_2^6a_3^6z'.$$

Dieselben sind aber nicht correct, vielmehr zu ersetzen durch:

$$H = -2x_1^2x_2^2(5z^2 + z'^2),$$
$$\vartheta = 160a_2^3a_3^3zz',$$
$$\delta = 6400a_2^6a_3^6z.$$

In der That muss δ wegen der Identität $2\delta^2 = -N\alpha^2 + 2R\vartheta$ zu α proportional werden. Hiernach muss der Ausdruck

$$5z^2 + z'^2 = \frac{Ai + 6\tau}{80a_2^2a_3^2} = \frac{5B}{(AC - B^2)80a_2^2a_3^2}(56\xi - \eta),$$

wo

$$\xi = Ci - B\tau, \quad \eta = A(A\tau - Bi),$$

in H als Factor enthalten sein. Dies wird durch die typische Darstellung (43b) bestätigt. Die in unserem Falle bestehenden Invariantenrelationen erlauben nämlich diese Darstellung in folgender Form zu schreiben:

$$8N^4H = \frac{25B^3}{256}(896\xi^3 + 432\xi^2\eta + 48\xi\eta^2 - \eta^3),$$

$$= \frac{25B^3}{256}(16\xi^2 + 8\xi\eta + \eta^2)(56\xi - \eta),$$

$$= \frac{25B^3}{256}(56\xi - \eta)(4\xi + \eta)^2.$$

Man erkennt gleichzeitig, dass *die linearen Factoren der quadratischen Form* $4\xi + \eta$ *oder*

$$24\tau - Ai$$

die Doppelfactoren von f *und* H *sind.* Darnach sind letztere einfach zu bestimmen.

Soll umgekehrt H zwei doppelte lineare Factoren enthalten, so müssen bekanntlich die partiellen Differentialquotienten der Discriminante von H nach den Coefficienten von H sämmtlich verschwinden. Nach (29b) sind hier folgende Fälle möglich: Erstens kann die Discriminante von f von der zweiten Ordnung Null sein und $C \gtrless 0$; dann hat $f = 0$ zwei Doppelwurzeln. Zweitens kann C und $A^2 - 64B$ verschwinden, dann haben wir den unter 1) besprochenen Fall. Drittens kann $A^2 - 64B \gtrless 0$ sein; dann muss C verschwinden. Nach dem am Schlusse von § 5. gegebenen Werthe von H für diesen Fall müsste also die biquadratische Form

$$12A^2\xi^4 + 4A^2\xi^2\eta^2 + B\eta^4$$

einen zweifachen linearen Factor enthalten. Die Discriminante derselben ist bis auf einen Zahlenfactor gleich

$$A^6B^2(64B - A^2),$$

es müsste also entweder A oder B gleichzeitig mit C Null sein, dann aber ist die in § 5. (29) gegebene typische Darstellung nicht mehr anwendbar; es ist also hieraus nichts zu schliessen. Der Fall $A = 0$, $C = 0$ erledigt sich indessen mit Hülfe von Gleichung (44) und ist schon besprochen. Wenn B und C zugleich verschwinden, so ist auch $M = 0$ und $N = 0$, folglich $\alpha \equiv 0$; dieser Fall ist in § 11. unter 1) erledigt. Wir haben somit das Resultat:

Wenn $H = 0$ *zwei verschiedene Doppelwurzeln hat, so hat entweder* $f = 0$ *ebenfalls dieselben Grössen zu Doppelwurzeln, oder es ist*

nur eine dieser Grössen Doppelwurzel von $f = 0$ und es verschwindet die Invariante C.

6) *f enthält einen doppelten und einen dreifachen linearen Factor.* Nach Herrn d'Ovidio verschwinden alle Invarianten, und es sind die Covarianten τ und α identisch Null; es wird i gleich dem Quadrate des dreifachen Factors; die (a. a. O. mit l bezeichnete) Covariante $q = (f, i)_1$ wird gleich dem Producte aus dem doppelten Factor in den dreifachen Factor. Nach dem unter 1) und 2) Gesagten *enthält H dieselben linearen Factoren bez. doppelt und vierfach;* und dies gilt auch umgekehrt.

§ 13.

Ueber einige andere besondere Fälle.

Im Anschlusse an die typische Darstellung mittelst quadratischer Covarianten haben Clebsch und Gordan eine Reihe von Formen sechster Ordnung untersucht, denen besonders interessante Invarianteneigenschaften zukommen. Es soll im Folgenden, so weit dies nicht schon in Früherem gelegentlich geschehen ist, untersucht werden, ob auch unserer Form H die betr. Eigenschaften zukommen können.

1) Soll H einen dreifachen linearen Factor enthalten, so muss g denselben Factor doppelt, l, m, n müssen ihn einfach enthalten (Clebsch, p. 439). Jedenfalls hat man also:

$$C(A^2 - 64B) = 0, \quad \Gamma^2 - \tfrac{1}{6} B^3 = 0, \quad \mathfrak{R} = 0 \text{ oder } R = 0;$$

nach (25), (26) und (28a) erfordern diese Bedingungen, dass entweder gleichzeitig (entsprechend $\mathfrak{R} = 0$)

$$A = 0, \quad B = 0, \quad C = 0,$$

oder nur (entsprechend $R = 0$):

$$B = 0, \quad C = 0.$$

Im ersten Falle hat f einen dreifachen, folglich nach § 12. 2) H einen vierfachen Factor; im andern Falle verschwindet α identisch, da $M = 0$ und $N = 0$, ein Fall der in § 11. erledigt ist.

Hat H einen linearen dreifachen Factor, so ist derselbe entweder auch dreifacher Factor von f und somit vierfacher von H, oder H enthält einen zweiten dreifachen linearen Factor, und f ist als Summe zweier fünften Potenzen darstellbar.

2) Wenn die Form g identisch verschwindet, so kann H als Covariante T einer biquadratischen Form aufgefasst werden (Clebsch, p. 447). Nach (8b), (2) und (9) hat man gleichzeitig

$$Ai + 15\tau = 0,$$
$$Ai - 40\tau = 0,$$

also entweder $A = 0$ und $\tau = 0$ oder $i = 0$ und $\tau = 0$. In beiden Fällen ist gleichzeitig $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$; f hat also einen dreifachen Factor, im zweiten Falle sogar einen vierfachen.

Die Form H kann nicht Covariante sechster Ordnung einer biquadratischen Form mit verschiedenen Linearfactoren sein.

3) Sollte $H = 0$ durch lineare Transformation übergeführt werden können in die Modulargleichung für die Transformation fünfter Ordnung der elliptischen Functionen, so müsste man haben (Clebsch, p. 458)

$$\mathsf{A} = 0 \quad \text{und} \quad \Gamma = 0,$$

also in Folge von (23) und (26)

$$A = 0 \quad \text{und} \quad C = 0.$$

Dann aber hat H einen Doppelfactor.

Es kann also H niemals linear in die linke Seite der Modulargleichung transformirt werden.

4) Die Form H kann linear in die linke Seite der Multiplicatorgleichung der Transformation fünfter Ordnung übergeführt werden, wenn gleichzeitig

$$7\mathsf{A}^2 = 50\mathsf{B}, \quad 500\Gamma = -9\mathsf{A}^3$$

(vergl. Clebsch, p. 462 ff.). Ist in Folge der benutzten Transformation fünfter Ordnung

$$\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-\lambda^2 y^2)}} = \frac{1}{M}\,\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\varkappa^2 x^2)}},$$

und wird $Mz = 1 - M$ gesetzt, so ist die Multiplicatorgleichung:

$$z^6 - 4z^5 + 256\varkappa^2(1-\varkappa^2)(z+1) = 0. \tag{48}$$

Der Modul $\varkappa$ bestimmt sich aus den Invarianten A, B, Γ, Δ mittelst der Gleichung

$$\varkappa^2(1-\varkappa^2) = \frac{1}{4}\,\frac{\gamma-\beta}{\gamma+\beta}, \tag{49}$$

wo

$$\beta^2 = \frac{\alpha^5}{3} - \frac{\Delta}{32}, \quad \frac{\beta^2-\gamma^2}{4} = -\frac{\alpha^5}{3}, \quad \alpha = \frac{\mathsf{A}}{10},$$

$$\mathsf{P} = 128\beta^2\gamma.$$

Die angegebenen Bedingungsgleichungen für A, B, Γ werden in unserm Falle

$$A^2 = 2^6 \cdot 3^2 B, \quad A^3 = -2^8 \cdot 3^2 C.$$

Aus (27) [oder (27a)] und (28a) folgt dann weiter

$$\Delta = \frac{12581}{2^5 \cdot 3^5 \cdot 5^{10}} A^5,$$

$$\mathfrak{R} = \frac{2^8}{3^4 \cdot 5^{10}} A^3;$$

und es wird

$$\alpha = \frac{A}{2^5 \cdot 5^2}, \quad \beta^2 = -\frac{A^5}{2^8 \cdot 3^5 \cdot 5^5}, \quad \gamma^2 = -\frac{761 A^5}{2^6 \cdot 3^5 \cdot 5^{10}}.$$

Das Vorzeichen von γ ist durch die Relation $\mathsf{P} = 128\beta^2\gamma$ bestimmt. Dass diese Bedingung von unseren Zahlen α, β, γ in der That befriedigt wird, verificirt man mittelst der Gleichung (28) und der Identität:

$$8R^2 = -A^3C^2 - 6A^2B^2C + 9AB(4C^2 - B^3) + 12C(B^3 - 3C^2)$$
$$= -\frac{761}{2^{21} \cdot 3^7} \cdot A^9;$$

so dass $\mathsf{P}^2 = R^2\mathfrak{R}^2 = 128^2\beta^4\gamma^2$; man hat damit eine Controlle für die früheren Rechnungen.

Aus der Gleichung (49) *erhält man zwei bestimmte Zahlenwerthe für denjenigen Modul* $\varkappa$, *zu welchem eine Multiplicatorgleichung* (48) *gehört, deren linke Seite Hesse'sche Form einer Form fünfter Ordnung sein kann.*

Es ist noch zu bemerken, dass eine Aenderung des Vorzeichens von γ auf der rechten Seite von (49) denselben Einfluss hat, wie die Aenderung des unbestimmt bleibenden Vorzeichens von β; eine Aenderung des letzteren Vorzeichens ist nach den bei Clebsch gegebenen Formeln äquivalent mit einer Vertauschung von ε mit ε^{-1}. — Hat man die Gleichung $H = 0$ mittelst elliptischer Functionen gelöst, so kann man die Gleichung $f = 0$ durch *lineare* Transformation in eine solche umformen, in welcher zwei Glieder fehlen, wie am Schlusse von § 6. Eine weitere Vereinfachung der Lösung von $f = 0$ scheint durch die Lösung von $H = 0$ nicht bewirkt werden zu können.

§ 14.

Bestimmung einer Form fünfter Ordnung, deren Hesse'sche Covariante gegeben ist.

In § 5. haben wir die Bedingung aufgestellt, welcher die Invarianten A, B, Γ, Δ einer gegebenen Form sechster Ordnung H genügen müssen, damit diese Form als Hesse'sche Covariante einer Form fünfter Ordnung f aufgefasst werden kann. Ist diese Bedingung erfüllt, so bietet sich die weitere Aufgabe, die Coefficienten der Grund-

form f selbst aus denen von H zu berechnen. Dieselbe kann mit Hülfe der Theorie der typischen Darstellung gelöst werden.

Zunächst nämlich sind nach den Gleichungen (27a) in § 5. die Invarianten A, B, C sofort in ihrer Abhängigkeit von A, B, Γ bekannt; hat man sodann $\mathfrak{R}$ aus (28a) berechnet, so drückt sich R nach (28) durch P und $\mathfrak{R}$ aus. Man wird daher f typisch darstellen können, sobald man noch zwei lineare Covarianten kennt. Bei Berechnung solcher Covarianten hat man folgende Fälle zu unterscheiden:

1) *Es ist $\mathfrak{R}$ von Null verschieden, und es sind die Invarianten M, N, R nicht sämmtlich gleich Null.* Die durch (28a) gegebene Invariante $\mathfrak{R}$ war definirt als Determinante der drei linearen Gleichungen (9), (14) und (20), nämlich:

$$(50)\quad \begin{cases} l = \frac{1}{5^3}\,[\quad -Ai \quad + 40\tau], \\ m = \frac{2}{3\cdot 5^5}\,[\quad (260B - A^2)\,i \quad + 165A\tau - 200\alpha^2], \\ n = \frac{2}{3^2\cdot 5^7}\,[(4800C - 535AB - 2A^3)i + (10800B - 545A^2)\,\tau \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + 550A\alpha^2]. \end{cases}$$

Wenn $\mathfrak{R} \gtrless 0$, liefert daher die Auflösung dieser drei Gleichungen unmittelbar i, τ, α^2 durch l, m, n ausgedrückt; man kennt somit die linearen Covarianten

$$\alpha,\ \beta = (i\alpha)\,i_x.\quad \gamma = (\tau\alpha)\,\tau_x,\quad \delta = (\vartheta\alpha)\,\vartheta_x.$$

Ist M von Null verschieden, so wird man f typisch durch α, β darstellen nach Clebsch § 75.

Ist N von Null verschieden, so kann man α und γ zur typischen Darstellung benutzen, wiederum nach Clebsch § 75.

Ist R von Null verschieden, so ist f durch α und δ typisch darstellbar, vergl. oben § 10.

2) *Es ist $\mathfrak{R} = 0$, M und N nicht gleichzeitig gleich Null.* Da auch $\mathsf{P} = 0$ ist und also zwischen l, m, n eine lineare Relation besteht, muss von den 3 Gleichungen (50) eine die Folge der übrigen sein. Die zweireihigen Determinanten der Coefficienten von i, τ, d. h. die Determinanten des Systems

$$\left\| \begin{matrix} -A & 260B - A^2 & 4800C - 535AB - 2A^3 \\ 40 & 165A & 10800B - 545A^2 \end{matrix} \right\|$$

können nicht sämmtlich gleich Null sein, denn sonst müssten A, B und folglich M, N gleichzeitig verschwinden. Man kann daher stets aus zweien der Gleichungen (50) i, τ berechnen, und zwar ausdrücken durch α^2 und durch zwei der Formen l, m, n. Bildet man dann die drei Invarianten $(i\alpha)^2 = M$, $(\tau\alpha)^2 = N$, $(\vartheta\alpha)^2 = R$, so fallen in den Coefficienten von i, τ, ϑ die von α abhängigen Glieder heraus, und es

bleiben nur die von l, m, n abhängigen stehen. Man kann also α_1^2, $\alpha_1\alpha_2$ und α_2^2 berechnen aus den drei Gleichungen:

$$i_0\alpha_2^2 - 2i_1\alpha_1\alpha_2 + i_2\alpha_1^2 = M,$$
$$\tau_0\alpha_2^2 - 2\tau_1\alpha_1\alpha_2 + \tau_2\alpha_1^2 = N,$$
$$\vartheta_0\alpha_2^2 - 2\vartheta_1\alpha_1\alpha_2 + \vartheta_2\alpha_1^2 = R.$$

Diese Berechnung wird nur unmöglich, wenn die Determinante

$$\begin{vmatrix} i_0 & i_1 & i_2 \\ \tau_0 & \tau_1 & \tau_2 \\ \vartheta_0 & \vartheta_1 & \vartheta_2 \end{vmatrix} = -(i\tau)(\tau\vartheta)(\vartheta i) = (\vartheta\vartheta')^2 = N$$

verschwindet. Dann aber haben i und τ einen gemeinsamen Factor u, so dass etwa

$$i_x^2 = u_x \cdot v_x, \quad \tau_x^2 = u_x \cdot w_x.$$

Da M und N nicht gleichzeitig Null sein sollen, kann nicht $(u\alpha) = 0$ sein; die Bedingung $(\tau\alpha)^2 = N = 0$ giebt also $(w\alpha) = 0$, d. h. α_x ist zu w_x proportional. *Damit ist auch in diesem Falle α berechnet.* Es kann somit f wieder durch die bekannten Formeln der typischen Darstellung gefunden werden.

3) $M = 0$, $N = 0$ (*also auch* $R = 0$ *und* $\alpha \equiv 0$), *A von Null verschieden.*

Es können i und τ aus zweien der Gleichungen (50) berechnet werden.

Ist τ von Null verschieden, so kann H in der Form (46) angenommen werden; und die zugehörige Form $f = 5\xi\eta(b\xi^3 + e\eta^3)$ ist eindeutig bestimmt.

Ist τ identisch gleich Null, so ist nach dem Falle 2) in § 11. die Grundform f gleich $a\xi^5 + b\eta^5$, wenn ξ, η die linearen Factoren von i bezeichnen; es ist also nur das Product ab gegeben, und es giebt eine einfach unendlich lineare Schaar von Formen fünfter Ordnung mit gemeinsamer Hesse'scher Form.

4) Die Fälle, wo H mehrfache Factoren hat, erledigen sich leicht nach dem in §§ 12. und 13. gesagten; als Ausnahmefälle kommen hier übrigens nur noch diejenigen in Betracht, wo mindestens ein dreifacher Factor vorhanden ist; man erkennt leicht an einer kanonischen Form, dass in jedem Falle die Coefficienten von f vollkommen bestimmt sind, ausgenommen wenn H gleich der sechsten Potenz einer linearen Form ist. — Wir können somit folgenden Satz aussprechen:

Wenn eine Form sechster Ordnung Hesse'sche Covariante einer Form fünfter Ordnung sein kann, so ist letztere eindeutig bestimmt; es sei denn, dass die Form sechster Ordnung ein vollständiger Cubus ist, in welchem Falle sie zu unendlich vielen Grundformen als gemeinsame Hesse'sche Covariante gehört.

§ 15.

Geometrische Interpretation auf einem Kegelschnitte.

Diejenige besondere Form sechster Ordnung, welche als Hesse'sche Covariante einer Form fünfter Ordnung aufgefasst werden kann, deren Invarianten somit an die Relation (27 b) gebunden sind, lässt sich geometrisch einfach charakterisiren, wenn man ihre sechs Grundpunkte durch sechs Punkte eines Kegelschnittes darstellt (nach dem sogenannten Hesse'schen Uebertragungsprincipe). Setzt man nämlich $x_3 = -(x_1 + x_2)$, so kann man die allgemeine Form fünfter Ordnung durch lineare Transformation so umformen, dass man hat*)

$$f = a_1 x_1^5 + a_2 x_2^5 + a_3 x_3^5.$$

Es wird dann

$$\frac{1}{2} H = a_2 a_3 x_2^3 x_3^3 + a_3 a_1 x_3^3 x_1^3 + a_1 a_2 x_1^3 x_2^3,$$
$$j = 6 a_1 a_2 a_3 x_1 x_2 x_3.$$

Führt man nun die drei quadratischen Formen

$$\xi = x_2 x_3, \quad \eta = x_3 x_1, \quad \zeta = x_1 x_2$$

ein, so ist identisch

$$\xi\eta + \eta\zeta + \zeta\xi = 0.$$

Diese Gleichung stellt in homogenen Coordinaten ξ, η, ζ einen Kegelschnitt dar, welcher durch die Ecken des Coordinatendreiecks geht; jedem binären Werthsysteme x_1, x_2 entspricht ein Punkt des Kegelschnitts. Es wird ferner

$$\frac{1}{2} H = a_2 a_3 \xi^3 + a_3 a_1 \eta^3 + a_1 a_2 \zeta^3,$$
$$j^2 = 36 a_1^2 a_2^2 a_3^2 \xi\eta\zeta.$$

Die sechs Punkte von $H = 0$ werden also auf dem Kegelschnitte ausgeschnitten durch eine Curve dritter Ordnung, deren Invariante S verschwindet, deren Hesse'sche Curve somit in drei gerade Linien zerfällt; und die Ecken des durch letztere Linien gebildeten Dreiecks liegen auf demselben Kegelschnitte.

Hierdurch sind die speciellen Formen sechster Ordnung H vor den allgemeinen ausgezeichnet. Durch sechs Punkte des Kegelschnittes gehen nämlich noch dreifach unendlich viele Curven dritter Ordnung, also noch zweifach unendlich viele, deren Hesse'sche Curve ein Dreieck ist. Im Allgemeinen kann man somit nur verlangen, dass zwei Ecken eines solchen Dreiecks auf dem Kegelschnitte liegen, wodurch dann eine endliche Anzahl von Curven dritter Ordnung bestimmt ist. Stellen aber die sechs gegebenen Punkte die Hesse'sche Covariante einer Form fünfter Ordnung dar, so giebt es eine Curve,

*) Vergl. Salmon, Higher algebra, third edition, art. 225.

für welche alle drei Ecken des zugehörigen Dreiecks auf dem Kegelschnitte liegen.

Man wird verlangen können, diejenige Relation zwischen den simultanen Invarianten eines Kegelschnittes und einer Curve dritter Ordnung aufzustellen, durch welche die eben besprochene specielle Eigenschaft ihres Schnittpunktsystems bedingt wird. Zur Lösung dieser Aufgabe gelangt man durch Anwendung derjenigen Methode, welche ich bei einer anderen Gelegenheit entwickelt habe*), um einen Zusammenhang zwischen linearen Formen und gewissen speciellen ternären Formen herzustellen. Man hat darnach nur die binären Invarianten A, B, Γ, Δ, welche in (27b) vorkommen, durch die fraglichen simultanen ternären Invarianten auszudrücken; die betreffenden Rechnungen habe ich schon seit längerer Zeit ausgeführt, um zu einem Ausdrucke für die Taktinvariante eines Kegelschnittes und einer Curve dritter Ordnung zu gelangen, und ich denke sie demnächst zu veröffentlichen.

Freiburg i. Br., den 20. August 1882.

Anmerkung. Die vorstehend gegebenen Entwickelungen stehen in gewisser Beziehung zu den neuen Untersuchungen, mit denen sich Herr Brill im XX. Bande dieser Annalen, pag. 330 ff. beschäftigt. Es wird dort nämlich gezeigt, dass eine allgemeine Form sechster Ordnung auf fünf verschiedene Weisen angesehen werden kann als Functionaldeterminante zweier binären biquadratischen Formen. In unserm Falle, wo die Invarianten der Form sechster Ordnung an obige Relation (27b) gebunden sind, ist *eine* Lösung der betreffenden Gleichung fünften Grades rational bekannt, indem das eine System von zwei biquadratischen Formen eben geliefert wird durch irgend zwei erste Polaren derjenigen Form fünfter Ordnung, zu welcher die betrachtete Form sechster Ordnung als Hesse'sche Covariante gehört. Es wird a. a. O. auch bewiesen, dass die Discriminante der Functionaldeterminante zweier biquadratischen Formen sich rational in zwei Factoren zerlegen lässt; dies entspricht dem von uns in Gleichung (29b) erhaltenen Resultate. Allerdings beziehen sich die Untersuchungen des Herrn Brill zunächst auf die Combinante dreier simultanen Formen vierter Ordnung; nach einem von ihm voraufgeschickten allgemeinen Satze kommen indessen der Functionaldeterminante zweier solcher Formen wesentlich dieselben Eigenschaften zu. Die hiermit in Zusammenhang stehenden Arbeiten des Herrn Stephanos (Comptes rendus) sind mir zur Zeit leider nicht zugänglich.

Freiburg i. Br., den 10. Septbr. 1882.

---

*) Sur une représentation géométrique des covariants des formes binaires; Bulletin de la Société Mathématique de France, t. V et VI.

Ueber den Gültigkeitsbereich der Taylor'schen Reihenentwickelung.

Von

Paul du Bois-Reymond in Tübingen.*)

Bedingungen, welche für die Taylor'sche Entwickelbarkeit einer Function genügen, ergeben sich, wenn es sich um Functionen reeller Veränderlichen handelt, aus den bekannten Restausdrücken, während Cauchy's berühmte Regeln Aehnliches leisten für Functionen, welche man von complexen Argumenten abhängen lässt. Von den *nothwendigen* Bedingungen für die Taylor'sche Entwickelung, falls dergleichen vorhanden sind, haben wir aber nicht die geringste Vorstellung; ja ich glaube sogar, dass über den Spielraum, welchen sie gewähren könnten, irrige Ansichten allgemein verbreitet sind.

Gegenstand dieser kleinen Mittheilung sind einige Bemerkungen über die Gültigkeit der Taylor'schen Entwickelung bei Functionen einer reellen Veränderlichen.

1.

Setzen wir

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x + \cdots \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x) + R_n ,$$

so lautet das Restintegral und der Lagrange'sche Rest:

$$R_n = \int_x^{x+h} d\alpha f^{(n)}(\alpha) \frac{(x+h-\alpha)^{n-1}}{(n-1)!} = \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(\xi), \quad x \leq \xi \leq x+h.$$

Damit das Integral mit ins Unbegrenzte wachsendem n der Null sich nähere, würde es zwar nicht nothwendig sein, aber genügen, dass die Function unter dem Integralzeichen verschwindet, eine Bedingung,

*) In der im vorigen Bande dieser Annalen wiederabgedruckten Hankel'schen Abhandlung finden sich (p. 102) einige allgemeine Bemerkungen über Entwickelbarkeit von Functionen in Taylor'sche Reihen, welche in vorliegendem, den Berichten der Kgl. Bayr. Akad. d. Wiss. vom 6. Nov. 1876 entnommenen Aufsatze richtig gestellt werden.

die ihrerseits dadurch wieder zwar noch mehr eingeschränkt, jedoch sehr vereinfacht würde, dass man statt der zwischen Null und h sich bewegenden Grösse $x + h - \alpha$ die Grösse h einführte. Aber wenn wir statt des Integrals den Lagrange'schen Rest zu Grunde legen, so erhalten wir direct eine vortheilhaftere Bedingung, nämlich die, dass

$$\lim_{n=\infty} \frac{h^n f^{(n)}(\alpha)}{n!}$$

verschwinden müsse für jeden Werth α des Intervalls $x \leqq \alpha \leqq x + h$. Diese ausreichende Bedingung wollen wir uns etwas näher ansehen.

2.

Man hat:

$$n! = u \sqrt{2\pi} e^{\left(n+\frac{1}{2}\right) ln - n}$$

wo $\lim_{n=\infty} u = 1$. Demnach lautet die Entwickelbarkeitsbedingung:

$$f^{(n)}(\alpha) \prec e^{n ln + n\left(l\frac{1}{h} - 1\right) + \frac{1}{2} ln}.$$

Ist diese Bedingung erfüllt für $x \leqq \alpha \leqq x + h_1$, so gilt die Taylor'sche Entwickelung für x und $h \leqq h_1$. Ist dagegen, unter Vernachlässigung des Logarithmus im letzten Gliede des Exponenten, die kürzere Bedingung

$$f^{(n)}(\alpha) \prec e^{n ln + n\left(l\frac{1}{h} + 1\right)}$$

für $x \leqq \alpha \leqq x + h_1$ erfüllt, so ist die Gültigkeit der Entwicklung nur für x und $h < h_1$ nachgewiesen. Die sich hieran knüpfende wichtigste Aufgabe wäre, die vorstehende Bedingung für die $n$te Ableitung in Eigenschaften der Function selbst zu übersetzen. Es ist mir jedoch trotz mehrfacher Bemühungen in dieser Richtung Nichts geglückt, was der Rede werth wäre. Doch schon die blosse Aufstellung jener Bedingung veranlasst Ueberlegungen, die hinsichtlich des Gültigkeitsumfangs der Taylor'schen Entwickelung unsere Vorstellungen zu berichtigen geeignet sind.

3.

Wenn die vorstehende Bedingung auch nicht die nothwendige ist, so kann man z. B. soviel aussagen, dass, falls das Unendlich nach n von $f^{(n)}(\alpha)$ für ein ganzes Intervall von α eine gewisse Grösse übersteigt, die Function für Werthe von x und $x + h$, die diesem Intervall angehören, nicht entwickelbar ist. Nun nimmt man gewöhnlich an, dass die Stetigkeit einer Function und ihrer sämmtlichen Ableitungen ihre Taylor'sche Entwickelbarkeit bedinge. Danach müsste also die Stetigkeit der Ableitungen der Function mit dem Unendlich nach n

der $n$ten Ableitungen in unmittelbarem Zusammenhang stehen. Möglich ist das schon, aber ich muss bekennen, dass die Entdeckung einer solchen Beziehung, nach welcher aus der Stetigkeit von $f^{(n)}(x)$ eine Grenze für das Unendlich nach n von $f^{(n)}(x)$ folgte, mich ungemein überraschen würde.

Man steht also einerseits unter dem Einfluss der mit der mathematischen Muttermilch eingesogenen Vorstellung, dass eine in einem Intervall mit allen ihren Ableitungen stetige Function für jeden Werth x jenes Intervalls, höchstens einzelne Punkte ausgenommen, in denen ihr analytischer Sinn undeutlich wird, und für hinreichend kleine Werthe von h sich auf die Taylor'sche Weise convergent entwickeln lassen müsse, andererseits erzeugen die obigen Ueberlegungen den Verdacht, dass die Brauchbarkeit dieser Entwickelungsart durch die Stetigkeit der Ableitungen einer Function nicht nothwendig bedingt werde, sondern auf anderen Functionaleigenschaften beruhe. Dem Schwanken zwischen diesen beiden Standpunkten wird, wie in anderen ähnlichen Fällen, ein Ende gemacht durch sorgfältiges Erwägen der Umstände, unter denen die in Rede stehende Formel versagen kann. So gelangt man denn zu folgender einfachen und entscheidenden Frage:

Giebt es mit ihren sämmtlichen Ableitungen stetige Functionen einer reellen Veränderlichen x, die für keinen besonderen Werth von x einer besonderen Erklärung bedürfen, bei denen gleichwohl in einem Punkte $x = x_1$ die Taylor'sche Entwickelung $f(x_1+h)=f(x_1)+hf'(x_1)+\cdots$ für jeden Werth von h versagt?

Hat man nämlich erst eine Function, welche einen solchen Punkt x_1 besitzt, so giebt es verschiedene Kunstgriffe, um aus dieser Function andere zu bilden, die dergleichen Punkte in jeder kleinsten Strecke der Veränderlichen haben, woraus dann weiter sich schliessen lässt, dass diese neuen Functionen überhaupt nicht nach der Taylor'schen Reihe entwickelbar sind.

Nun, diese Frage einmal gestellt, bieten sich mancherlei Functionen dar, die sie zu bejahen zwingen. Ich werde im Folgenden zwei Functionen besprechen, von denen die erstere, ob sie gleich zusammengesetzter ist, mir doch in Rücksicht auf die hier verfolgten Ziele die entscheidende zu sein scheint, während gegen das Gewicht des zweiten, übrigens bekannten Beispieles schwer zu entkräftende Einwendungen erhoben werden können.

4.

Es sei also erstens vorgelegt die Function:

$$f(x) = \sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{(-1)^{p+1}}{2p!} \frac{x^{2p}}{x^2+a_p^2},$$

in der die Grössen a_p mit unendlich werdendem p gegen Null abnehmen, wie z. B. $a_p = 2^{-p}$.

Die Function $f(x)$ ist 1. *sammt allen ihren Ableitungen stetig,* 2. *nicht nach ganzen Potenzen von x entwickelbar.*

Wir wollen diese Eigenschaften durch Rechnung bestätigen.

Die Reihe ist zunächst gliedweise differenzirbar nach einem Satze, den man sich leicht beweisen kann, und der besagt, dass eine Reihe $\sum_{p=1}^{p=\infty} \varphi_p(x)$ zum Differentialquotienten die Reihe $\sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{d\varphi_p x}{dx}$ hat in jedem Punkte $x = x_1$, für welchen letztere „vollständig convergirt", d. i. für den der Rest $R_m(x) = \sum_{p=m}^{p=\infty} \frac{d\varphi_p x}{dx}$ verschwindet, wie man auch gleichzeitig oder nacheinander m unendlich werden und $x_1 - x$ verschwinden lassen möge.

Um diesen Satz anwenden zu können, müssen wir das Glied der Reihe $f(x)$, also die Grösse $\frac{x^{2p}}{x^2 + a_p^2}$ $n$mal differenziren.

Wir setzen:

$$\frac{x^{2p}}{x^2 + a_p^2} = \frac{x^{2p-1}}{2} \left\{ \frac{1}{x + a_p i} + \frac{1}{x - a_p i} \right\},$$

und wenden auf den Ausdruck $\frac{x^{2p-1}}{x \pm a_p i}$ die Formel

$$\frac{d^n u v}{dx^n} = u v^{(n)} + n u' v^{(n-1)} + \text{etc.}$$

an, indem wir $u = x^{2p-1}$, $v = \frac{1}{x \pm a_p i}$ annehmen.

Man erhält so:

$$\frac{d^n}{dx^n} \frac{x^{2p-1}}{x \pm a_p i} = n! (-1)^n x^{2p-n-1} \left\{ \right\}$$

wo die Klammer $\left\{ \right\}$, wenn $\frac{x}{x \pm a_p i} = \gamma$ gesetzt wird, die Grösse enthält:

$$\gamma^{n+1} - (2p-1)\gamma^n + \frac{(2p-1)(2p-2)}{1 \cdot 2} \gamma^{n-1} - \ldots \pm \frac{(2p-1)(2p-2)\cdots(2p-n)}{1 \cdot 2 \cdots n} \gamma.$$

Es handelt sich darum, eine obere Grenze für den numerischen Werth von $\frac{d^n}{dx^n} \frac{x^{2p}}{x^2 + a_p^2}$ aufzustellen. Wir vereinigen zu dem Zweck die in dem Zeichen $\frac{d^n}{dx^n} \frac{x^{2p-1}}{x \pm a_p i}$ enthaltenen Ausdrücke, indem wir

$$\left(\frac{x}{x+a_p i}\right)^r + \left(\frac{x}{x-a_p i}\right)^r = 2\left(\frac{x^2}{x^2+a_p^2}\right)^{\frac{r}{2}} \cos(r\lambda)$$

setzen, wo $\lambda = \operatorname{arctg}\frac{a_p}{x}$. Die Grösse rechts kann Zwei nicht übersteigen.

Es bleibt also

$$\frac{d^n}{dx^n}\,\frac{x^{2p}}{x^2+a_p^2}$$

weit unter

$$(n+1)!\cdot(2p-1)(2p-2)\cdots(2p-n)\,x^{2p-n-2}$$

und das Glied

$$\frac{(-1)^{p+1}}{2p!}\,\frac{d^n}{dx^n}\,\frac{x^{2p}}{x^2+a_p^2}$$

bleibt daher ebenfalls weit unter

$$\frac{1}{2p}\,\frac{(n+1)!}{(2p-n-1)!}\,x^{2p-n-2},$$

so dass die Reihe, welche durch $n$malige Differentiation unserer vorgelegten Reihe $f(x)$ entsteht, durchweg, also auch im Punkte $x=0$, vollständig convergirt, daher sie der $n$te Differentialquotient von $f(x)$ ist, und wie $f(x)$ durchweg stetig ist.

Weiter ist zu zeigen, dass die Potenzentwickelung von

$$f(x) = \sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{(-1)^{p+1}}{2p!}\,\frac{x^{2p}}{x^2+a_p^2}$$

nicht convergirt. Zu dem Zweck bestimmen wir die Coefficienten der Reihe $f(x) = f(0) + xf'(0) + \cdots$.

Wir haben zuerst:

$$\frac{x^{2p}}{x^2+a_p^2} = \sum_{q=0}^{q=\infty} \frac{(-1)^q\cdot x^{2(p+q)}}{a_p^{2(q+1)}}$$

und

$$f(x) = \sum_{p=1}^{p=\infty}\sum_{q=0}^{q=\infty} \frac{(-1)^{p+q+1}\,x^{2(p+q)}}{2p!\,a_p^{2(q+1)}}.$$

Ordnen wir diesen Ausdruck nach Potenzen von x, indem wir $p+q=r$ setzen, so folgt:

$$f(x) = \sum_{r=1}^{r=\infty} (-1)^{r+1} x^{2r} \sum_{p=1}^{p=r} \frac{1}{2p!\,a_p^{2(r-p+1)}}.$$

Dies ist die fragliche Potenzentwickelung, die unzweifelhaft für jedes x divergirt. Denn man nehme z. B. an:

$$a_{\lambda-1} > x > a_\lambda,$$

so zerfällt $f(x)$ in die Theile:

$$\sum_{r=1}^{r=\infty}(-1)^{r+1}x^{2r}\sum_{p=1}^{p=\lambda-1}\frac{1}{2p!\,a_p^{2(r-p+1)}},$$

$$\sum_{r=1}^{r=\infty}(-1)^{r+1}x^{2r}\sum_{p=\lambda}^{p=r}\frac{1}{2p!\,a_p^{2(r-p+1)}},$$

in deren erstem die innere Summe, falls $r < \lambda$, nur bis r genommen zu denken ist. Der erste Theil ist endlich, der zweite $\pm\infty$.

5.

Scheinbar viel einfacher ist folgendes Beispiel:

$$\varphi(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}.$$

Auch diese Function ist nicht nach steigenden Potenzen von x entwickelbar, dabei aber mit ihren sämmtlichen Differentialquotienten stetig. Nur ist hier die Schwierigkeit, dass die Werthe $\varphi(0)$, $\varphi'(0)$, $\cdots$ besonderer Festsetzungen bedürfen, wenn unter diesen Werthen das verstanden wird, was man durch Berechnung der Function für den vorgelegten Zahlenwerth $x = 0$ erhält, und nicht einen Limes $\lim_{x=0}\varphi(x)$, etc. Man kann durch geeignete Festsetzungen diese Bedenken auch bei Functionen wie $\varphi(x)$ beseitigen, aber auf Kosten ihrer Einfachheit. Die Function $\varphi(x)$ ist entweder als

$$\sum\frac{1}{p!}\left(-\frac{1}{x^2}\right)^p$$

oder als

$$\frac{1}{\sum\frac{1}{p!}\left(+\frac{1}{x^2}\right)^p}$$

aufzufassen. Bei Ausschluss von $x = 0$ ist die Gleichartigkeit beider Definitionen offenbar. Aber für $x = 0$ ist die erste ganz werthlos und die zweite setzt die Gleichheit $\frac{1}{\frac{1}{0}} = 0$ voraus. Man wird daher, um

$\varphi(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ für alle Werthe von x auf gleiche Weise definiren zu können, diese Grösse als $\lim_{\varepsilon=0}\varphi(x\pm\varepsilon)$ auffassen müssen. Dies wird aber lästig, wenn man, wie im Folgenden, eine Summe von unbegrenzt vielen Functionen $\varphi(x)$ bildet, für Argumente, die schliesslich einander unendlich nahe rücken. Alsdann scheint diese Auffassung sogar die erheblichsten Schwierigkeiten im Gefolge zu haben, wenn man den deutlichen Sinn der analytischen Ausdrücke nicht aus dem Auge verlieren will. Aus diesem Grunde habe ich eben vorgezogen, als Beispiel (Art. 4) eine Function hinzustellen, die für alle Werthe des Arguments die gewöhnliche Bestimmung eines Reihenwerthes:

$$\sum_{p=1}^{p=\infty} u_p = \lim_{q=\infty} \sum_{p=1}^{p=q} u_p$$

gestattet, wo jeder Term u_p für jeden Werth von x mit beliebiger Genauigkeit berechenbar ist.

6.

Was nun die Theorie dieser Beispiele betrifft, so stellen sie eine besondere Art Stetigvieldeutigkeiten dar. Die Function:

$$f(x) = \sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{(-1)^{p+1}}{2p!} \frac{x^{2p}}{x^2 + a_p^2}$$

ist, wenn man statt x einsetzt $z = x + iy$, stetig und eindeutig, bis auf die Punkte

$$x = 0, \quad y = \pm a_p, \quad p = 1, 2, \cdots$$

in denen sie unendlich wird. Einen um den Punkt $z = 0$ construirbaren Convergenzkreis hat sie also nicht, natürlich, denn sie ist dort unstetig, wenn man z. B. in der y-Richtung in den Punkt $z = 0$ gelangt. Das Neue ist nur, dass beim Durchgang durch den Punkt $z = 0$ in der x-Richtung die Function mit *allen* in dieser Richtung genommenen Differentialquotienten stetig ist. Aehnliches gilt von dem zweiten Beispiel $\varphi(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$. Gelangt man durch die y-Axe in den Punkt $z = 0$, so wird $\varphi(z)$ unendlich, während von der x Axe her $\varphi(z)$ Null wird.

7.

Um nun von der Function $f(x)$ aus andere abzuleiten, welche die Singularität von $f(x)$ für $x = 0$ in jedem kleinsten Intervall besitzen, giebt es verschiedene Kunstgriffe. Man kann z. B. so verfahren:

Wir wollen die Function nur in dem Gebiet

$$-1 \leqq x \leqq +1, \quad 0 \leqq y \leqq +1$$

betrachten, und wollen sie so bestimmen, dass sie in den Punkten

$$z = x_q^{(p)} + i a_p$$

dieses Gebietes unendlich werde, wo:

$p = 0, 1, 2, \cdots$ in inf. sei,

q die ganzen Zahlen zwischen -2^p und $+2^p$, diese eingerechnet vorstelle,

$$x_q^{(p)} = \frac{q}{2^p}, \qquad a_p = \frac{1}{2^p}$$

gedacht ist. Ferner setzen wir:

$$\lambda_q^{(p)}(x) = \frac{(x - x_q^{(p)})^{2p}}{(x - x_q^{(p)})^2 + a_p^2},$$

und bilden die Doppelsumme:

$$\sum_{p=0}^{p=\infty} \sum_{q=-2p}^{q=+2p} \mu_{pq} \lambda_q^{(p)}(x),$$

in welcher wir den Zahlencoefficienten μ_{pq} zu

$$\frac{(-1)^{p+1}}{2p!} \cdot \frac{1}{2^{p+1}} \cdot \varrho_{pq}$$

bestimmen, unter ϱ_{pq} weitere Zahlen verstanden, die ich für das hier zu Zeigende auch gleich Eins annehmen konnte, und nur stehen lasse, um bei einer anderen Gelegenheit mich darauf zu beziehen. Die ϱ_{pq} sollen unter einer endlichen Grenze bleiben.

8.

Die Function:

$$F(x) = \sum_{p=0}^{p=\infty} \sum_{q=-2p}^{q=+2p} \left(-\frac{1}{2}\right)^{p+1} \frac{1}{2p!} \cdot \varrho_{pq} \cdot \frac{(x - x_q^{(p)})^{2p}}{(x - x_q^{(p)})^2 + a_p^2}$$

ist erstens für $-1 \leq x \leq +1$ stetig mit ihren sämmtlichen Differentialquotienten. Denn $F(x)$ als nach p fortschreitende Reihe gedacht, lautet ihr Glied:

$$\sum_{q=-2p}^{q=+2p} \left(-\frac{1}{2}\right)^{p+1} \frac{1}{2p!} \cdot \varrho_{pq} \cdot \lambda_q^{(p)}(x),$$

und der $n$te Differentialquotient dieses Gliedes bleibt nach Art. 4 weit unter:

$$\sum_{q=-2p}^{q=+2p} \frac{1}{2^p} \frac{(n+1)!}{2} \cdot \varrho_{pq} \cdot \frac{1}{2p} \cdot \frac{(x - x_q^{(p)})^{2p-n-2}}{(2p-n-1)!};$$

also, weil $x_q^{(p)}$ und x zwischen -1 und $+1$ sich bewegen, der Unterschied daher 2 nicht übersteigen kann, bleibt er weit unter:

$$\varrho \cdot (n+1)! \cdot \frac{1}{p} \cdot \frac{2^{p-n-2}}{(2p-n-1)!},$$

wo ϱ nicht grösser als das grösste der ϱ_{pq}. Hieraus folgt die behauptete Stetigkeit.

Was sodann die Entwickelbarkeit von $F(x+h)$ in eine Reihe der Form $F(x) + h F'(x) + \cdots$ anlangt, für Werthe von x und h, die der Ungleichheit $-1 \leq x,\ x + h \leq +1$ genügen, so setzen wir

$$F_N(x) = \sum_{p=0}^{p=N} \sum_{q=-2p}^{q=+2p} \mu_{pq} \lambda_q^{(p)}(x).$$

Der grösste Convergenzkreis, in welchem die Function $F_N(x+h)$ nach Potenzen von h entwickelbar ist, wenn x die Strecke $-1 \leq x \leq +1$ nicht verlässt, hat den Halbmesser

$$\frac{\sqrt{5}}{2^{N+1}},$$

der also mit N^{-1} verschwindet. Es wäre freilich, weil diese Maximalhalbmesser gerade für $N = \infty$ unstetig sein könnten, noch direct zu zeigen, dass die Function $F(x)$ nicht entwickelbar ist, doch wollen wir hier diese Rechnung nicht anstellen.

9.

Zum Schluss hebe ich noch eine bemerkenswerthe Function hervor:

$$\Phi(x) = \sum_{p=1}^{p=\infty} \mu_p \sin px,$$

unter μ_p solche Zahlen gedacht, dass das Unendlich von μ_p^{-1} grösser als das einer Potenz von p, kleiner als das einer Potenz von e^p sei, wie z. B. $e^{\sqrt{p}}$. Ich habe bei einer früheren Gelegenheit*) darauf aufmerksam gemacht, dass eine Function $\Sigma \mu_p \sin px$ nicht aus dem Reellen ins Imaginäre durch Einsetzen eines complexen Werthes für x fortgesetzt werden kann, wenn nicht $\mu_p \prec e^{-\nu p}$, ν beliebig klein. Andererseits ist $\Phi(x)$ mit allen Differentialquotienten stetig, wenn $\mu_p \prec p^{-n}$, n beliebig gross. Ist also in der That, wie für $\mu_p = e^{-\sqrt{p}}$:

$$e^{-\nu p} \prec \mu_p \prec p^{-n},$$

so ist die Function $\Phi(x)$ in der reellen Linie mit sämmtlichen Differentialquotienten stetig, während $\Phi(x + iy)$ nicht existirt. Was die Entwicklung von $\Phi(x)$ anlangt, so folgt die Divergenz von

$$\Phi(x+h) = \sum_{q=0}^{q=\infty} \sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{e^{-\sqrt{p}}(hp)^q}{q!} \sin\left[px + \frac{q\pi}{2}\right]$$

zwar schon daraus, dass, wenn man z. B. nur die Glieder berücksichtigt, für die $p = q^r$, $r > 1$, der Zahlencoefficient $\frac{e^{-\sqrt{p}}(hp)^q}{q!}$ für jedes h unendlich wird. Es kann aber allerdings auch hier der (wie alle ähnlichen) schwierige Nachweis verlangt werden, dass die übrigen Terme dieses Unendlichwerden nicht aufheben.

Es ist also $\Phi(x)$ für complexe x nicht vorhanden, im Reellen mit sämmtlichen Ableitungen stetig, aber nicht entwickelbar.

Zusatz folgt.

Tübingen, October 1876.

---

*) Abh. d. K. Bayer. Akad. II. Cl. Bd. XII, II. Abth. Untersuchungen über die Convergenz etc., Einleitung, pag. III.

und bilden die Doppelsumme:

$$\sum_{p=0}^{p=\infty} \sum_{q=-2p}^{q=+2p} \mu_{pq}$$

in welcher wir den Zahlencoefficien

$$\frac{(-1)^{p+1}}{2p!}$$

bestimmen, unter ϱ_{pq} weitere 7
zu Zeigende auch gleich Eins
um bei einer anderen Geleg
sollen unter einer endlichen

fonction holomorphe dans une
des arcs de cercle.

Par

APPELL à Paris.

Die Function:

$$F(x) = \sum_{p=0}^{p=\infty} \sum_{q=}^{q=+}$$

ue fonction uniforme de la variable imaginaire
ulier essentiel à l'infini, un pôle du premier
et une infinité d'autres pôles tous du premier

ist erstens für -1
tialquotienten. Der
lautet ihr Glied:

$\cdots, a_\nu, \cdots$, (lim $a_\nu = \infty$, pour $\nu = \infty$)

on quelconque dans le plan des x; soient 1 le
$= 0$, R_ν celui du pôle $x = a_\nu$. Considérons une aire
le limitée par n arcs de cercles $C_1, C_2, \cdots C_n$, tournant
und der $n$te I
xité vers *l'intérieur* de l'aire et ayant pour centres
unter:
oints $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$. Supposons, en outre, que, lorsque
situé dans l'aire S, tous les points

$$x + a_1,\ x + a_2, \cdots, x + a_\nu, \cdots$$

also, we
schied
s à l'extérieur de l'aire S et à l'extérieur des cercles aux-
artiennent les arcs $C_1, C_2, \cdots C_n$.
posé, soient $f(x)$ une fonction de x holomorphe dans l'aire
un point de cette aire; on a l'équation

wo
St

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int f(z)\, \psi(z - x)\, dz,$$

égrale étant prise dans le sens positif sur le contour de l'aire S.
te équation (1) résulte de ce que la fonction $f(z)\,\psi(z - x)$ de la
riable z admet à l'intérieur de l'aire S le seul pôle $z = x$ avec le
ésidu $f(x)$; les autres pôles

$$z = x + a_1,\ z = x + a_2, \cdots, z = x + a_\nu,$$

de cette fonction sont, d'aprés les hypothèses faites plus haut, en dehors de l'aire S.

Partageons l'intégrale (1) en n parties relatives aux n arcs $C_1, C_2, \cdots, C_n$; nous aurons

$$(2) \qquad f(x) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^{k=n} \int_{C_k} f(z)\,\psi(z-x)\,dz,$$

C_k indiquant que l'intégrale affectée de cet indice est prise sur

Soit z un point de l'arc C_k; comme les points

$$x,\ x+a_1,\ \cdots,\ x+a_\nu,\ \cdots$$

s *en dehors* du cercle auquel appartient l'arc C_k, les quantités

$$\text{mod.}\ \frac{z-\alpha_k}{x-\alpha_k},\quad \text{mod.}\ \frac{z-\alpha_k}{x+a_1-\alpha_k},\ \cdots,\ \text{mod.}\ \frac{z-\alpha_k}{x+a_\nu-\alpha_k},\ \cdots$$

sont toutes moindres que l'unité; appelons ε_k la plus grande de ces fractions. La fonction $\psi(z-x)$ de la variable z est holomorphe dans l'intérieur du cercle de centre α_k et de rayon $\frac{1}{\varepsilon_k}\cdot \text{mod.}\,(z-\alpha_k)$; donc on a, pour les valeurs de z qui figurent dans l'intégrale affectée de l'indice C_k, la série uniformément convergente

$$(3) \qquad \psi(z-x) = \sum_{\mu=0}^{\mu=\infty} \frac{(z-\alpha_k)^\mu}{1\cdot 2\cdots\mu}\,\psi^{(\mu)}(\alpha_k - x)$$

où

$$\psi^{(\mu)}(u) = \frac{d^\mu \psi(u)}{du^\mu}.$$

Portant ce développement (3) dans l'intégrale considérée relative à l'arc C_k, on a

$$(4) \qquad \frac{1}{2\pi i}\int_{C_k} f(z)\,\psi(z-x)\,dz = \sum_{\mu=0}^{\mu=\infty} \mathrm{A}_\mu^{(k)}\,\psi^{(\mu)}(\alpha_k - x)$$

où

$$(4') \qquad \mathrm{A}_\mu^{(k)} = \frac{1}{2\pi i}\cdot\frac{1}{1\cdot 2\cdots\mu}\cdot\int_{C_k}(z-\alpha_k)^\mu f(z)\,dz.$$

En faisant la somme des n développements tels que (4) ainsi obtenus ($k = 1, 2, \cdots, n$), on a, d'après l'équation (2), le développement suivant de $f(x)$

$$(5) \qquad f(x) = \sum_{k=1}^{k=n}\sum_{\mu=0}^{\mu=\infty} \mathrm{A}_\mu^{(k)}\,\psi^{(\mu)}(\alpha_k - x),$$

développement valable pour tous les points de l'aire S. Il est à remarquer que la somme

$$\mathrm{A}_0^{(1)} + \mathrm{A}_0^{(2)} + \cdots + \mathrm{A}_0^{(n)}$$

est nulle, car cette somme est égale, au facteur $2\pi i$ près, à l'intégrale

$\int f(z)\,dz$ prise sur le contour de l'aire S, et que les coefficients $A_\mu^{(k)}$ donnés par la formule (4') ne dépendent pas de la fonction ψ.

La série qui forme le second membre de l'équation (5) peut être convergente en d'autres points que ceux de l'aire S. Désignons d'une façon générale par $\varphi(x)$ la somme de cette série lorsqu'elle existe

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{k=n} \sum_{\mu=0}^{\mu=\infty} A_\mu^{(k)} \psi^{(\mu)}(a_k - x); \tag{6}$$

on aura

$$\varphi(x) = f(x) \tag{7}$$

en tous les points de l'aire S.

Soit maintenant ξ un point situé en dehors de l'aire S et en dehors des cercles auxquels appartiennent les arcs C_k; supposons de plus que tous les points

$$\xi + a_1,\ \xi + a_2,\ \cdots,\ \xi + a_\nu,\ \cdots$$

soient en dehors de ces mêmes cercles. Dans ces conditions la série (6) reste convergente quand on y remplace x par ξ; en effet le développement en série (3) est toujours valable, car la fonction $\psi(z - \xi)$ est holomorphe à l'intérieur d'un cercle de centre a_k et de rayon plus grand que celui du cercle dont fait partie l'arc C_k. Mais voyons quelle est alors la valeur de la somme $\varphi(\xi)$ de la série (6). Deux cas se présentent:

1°) aucun des points

$$\xi + a_1,\ \xi + a_2,\ \cdots,\ \xi + a_\nu,\ \cdots$$

n'est dans l'aire S; alors

$$\varphi(\xi) = 0;$$

car l'intégrale qui forme le second membre de l'équation (1) est nulle pour $x = \xi$, la fonction

$$f(z)\,\psi(z - \xi)$$

étant holomorphe dans l'aire S;

2°) un certain nombre des points

$$\xi + a_1,\ \xi + a_2,\ \cdots,\ \xi + a_\nu,\ \cdots$$

sont dans l'aire S; soient, par exemple, les m points

$$\xi + a_{\lambda_1},\ \xi + a_{\lambda_2},\ \cdots,\ \xi + a_{\lambda_m};$$

alors on a

$$\varphi(\xi) = R_{\lambda_1} f(\xi + a_{\lambda_1}) + R_{\lambda_2} f(\xi + a_{\lambda_2}) + \cdots + R_{\lambda_m} f(\xi + a_{\lambda_m}); \tag{8}$$

en effet la fonction $f(z)\,\psi(z - \xi)$ admet alors dans l'aire S les m pôles

$$\xi + a_{\lambda_1},\ \xi + a_{\lambda_2},\ \cdots,\ \xi + a_{\lambda_m}$$

avec les résidus respectifs

$$R_{\lambda_1} f(\xi + a_{\lambda_1}),\ R_{\lambda_2} f(\xi + a_{\lambda_2}),\ \cdots,\ R_{\lambda_m} f(\xi + a_{\lambda_m}).$$

Si, au contraire, le point ξ est tel que ce point lui-même ou l'un des points

$$\xi + a_1,\ \xi + a_2, \cdots, \xi + a_\nu, \cdots$$

soient dans l'intérieur de l'un des cercles auxquels appartiennent les arcs C_k, la série (6) devient divergente quand on y remplace x par ξ. En effet dans ce cas l'un au moins des développements tels que (3) est divergent.

Cas particuliers.

I. Lorsque le point x décrit l'aire S, le point $x - a_\nu$ décrit une aire S_ν égale à S limitée par n arcs de cercles

$$C_1^{(\nu)},\ C_2^{(\nu)},\ \cdots,\ C_n^{(\nu)}.$$

Supposons les pôles a_ν distribués de telle façon qu' aucune des aires

$$S,\ S_1,\ S_2,\ \cdots,\ S_\nu, \cdots$$

n'aît un point commun avec une autre d'entre elles ou avec les cercles auxquels appartiennent les arcs

$$C_k,\ C_k^{(1)},\ C_k^{(2)},\ \cdots,\ C_k^{(\nu)},\ \cdots$$
$$(k = 1, 2, \cdots, n).$$

Alors la série (6) est convergente en tous les points de chacune de ces aires. En effet soit ξ un point de l'aire S_μ aucun des points $\xi + a_\nu$ ne peut se trouver dans l'intérieur du cercle C_k, car si le point $\xi + a_\nu$ était dans l'intérieur de ce cercle le point $\xi + a_\nu - a_\nu$ ou ξ appartiendrait à la fois à l'aire S_μ et au cercle $C_k^{(\nu)}$, ce qui est contre l'hypothèse.

Désignons par x un point de l'aire S, on a pour ce point l'équation (7). Le point $\xi = x - a_\nu$ appartient à l'aire S_ν et la série est convergente en ce point. Pour obtenir la valeur de la somme $\varphi(\xi)$ de cette série remarquons que parmi les points

$$\xi + a_1,\ \xi + a_2,\ \cdots,\ \xi + a_\nu, \cdots$$

un seul, le point $\xi + a_\nu = x$ est situé dans l'aire S. En effet si un autre de ces points, $\xi + a_\mu$ par exemple, appartenait à l'aire S, le point $\xi + a_\mu - a_\mu$ ou ξ appartiendrait à la fois à l'aire S_μ et à l'aire S_ν, ce qui est contre l'hypothèse faite plus haut. Donc d'après la formule (8) on a

$$\varphi(\xi) = R_\nu f(\xi + a_\nu);$$

mais $\xi = x - a_\nu$ et $\varphi(x) = f(x)$ puisque x appartient à l'aire S, donc enfin

(9) $$\varphi(x - a_\nu) = R_\nu \varphi(x). \qquad (\nu = 1, 2, \cdots, \infty).$$

Cette relation remarquable a lieu pour toutes les valeurs de x correspondant à des points *situés dans l'aire S.*

II. Soit maintenant $\psi(x) = \frac{1}{x}$; on voit alors que toute fonction $f(x)$ holomorphe dans l'aire S est représentée dans cette aire par la série suivante

(10) $$f(x) = \sum_{k=1}^{k=n} \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} B_\nu^{(k)} \cdot \frac{1}{(x - \alpha_k)^\nu}$$

où

$$B_\nu^{(k)} = -\frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{C_k} (z - \alpha_k)^{\nu-1} f(z)\, dz.$$

La série qui forme le second membre de l'équation (10) est encore convergente si x est un point extérieur à l'aire S et aux cercles auxquels appartiennent les arcs C_k; mais alors la somme de cette série est égale à zéro.

Considérons d'autres aires planes limitées également par des arcs de cercles; supposons que ces aires

$$S,\ S^{(1)},\ S^{(2)},\ \cdots,\ S^{(p)}$$

n'ont deux à deux aucun point commun et qu'elles sont toutes en dehors des cercles auxquels appartiennent tous les arcs limites. Alors on pourra former des développements analogues à (10) représentant une fonction holomorphe $f_1(x)$ dans $S^{(1)}$, une fonction holomorphe $f_2(x)$ dans $S^{(2)}$, $\cdots$, une fonction holomorphe $f_p(x)$ dans $S^{(p)}$. La somme du développement (10) et de tous les développements analogues sera une série de fractions rationnelles dont la somme est égale à $f(x)$ dans l'aire S, à $f_1(x)$ dans $S^{(1)}$, $\cdots$ à $f_p(x)$ dans $S^{(p)}$. M. Weierstrass a déja obtenu par d'autres considérations des séries de fractions rationnelles possédant des propriétés analogues; (voir „Monatsbericht der Akademie der Wissenschaften zu Berlin, Aout 1880").

III. Soit $\vartheta_1(z)$ la fonction ϑ_1 formée avec les périodes ω et ω'; désignons par $Z(z)$ la fonction $\frac{d \log \vartheta_1(z)}{dz}$. Nous obtiendrons un autre cas particulier important en faisant $\psi(z) = Z(z)$. Les pôles de $Z(z)$ sont $m\omega + m'\omega'$, m et m' étant deux entiers quelconques. On considérera donc une aire S telle que, si x est un point quelconque de cette aire, tous les points $x + m\omega + m'\omega'$ soient à l'extérieur de l'aire S et à l'extérieur des cercles auxquels appartiennent les arcs limitant l'aire. Alors une fonction $f(x)$ holomorphe dans l'aire S est représentée dans cette aire par la série de fonctions doublement périodiques .

$$(11) \qquad f(x) = \sum_{k=1}^{k=n} \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} A_\nu^{(k)} Z^{(\nu)}(\alpha_k - x).$$

Le second membre de cette relation est une fonction doublement périodique; car, d'aprés une remarque générale, on a

$$A_0^{(1)} + A_0^{(2)} + \cdots + A_0^{(n)} = 0.$$

Si donc $f(x)$ n'admet pas les périodes ω et ω', les deux membres de l'équation (11), qui sont égaux en tous les points de l'aire S, sont différents dans les aires homologues de S dans les parallélogrammes des périodes.

IV. En prenant $\psi(z) = \frac{\omega}{\pi} \operatorname{cotg} \frac{\pi z}{\omega}$, l'on obtient de même le développement d'une fonction $f(x)$ en série de fonctions admettant la période ω.

(Les cas particuliers II, III, IV ont été exposés dans une Note présentée à l'Académie des Sciences de Paris dans la Séance du 1er mai 1882).

Evaluation du reste.

Revenons au cas général et proposons-nous d'évaluer une limite supérieure du reste de la série (5), en supposant que $f(z)$ reste finie sur le contour de l'aire S. Soit x un point de l'aire S; proposons-nous d'abord de trouver une limite du reste du développement (4); désignons ce reste par $Q_m^{(k)}$;

$$(12) \qquad Q_m^{(k)} = \sum_{\mu=m+1}^{\mu=\infty} A_\mu^{(k)} \psi^{(\mu)}(\alpha_k - x).$$

Appelons ϱ_k le rayon de l'arc C_k de centre α_k; la plus petite des quantités postitives

$$(13) \qquad \text{mod.}\,(x + a_\nu - \alpha_k), \qquad (\nu = 1, 2, \cdots, \infty)$$

est, d'après les hypothèses faites, plus grande que ϱ_k. Désignons par r_k un nombre plus petit que la plus petite des quantités (13) et plus grand que ϱ_k. La fonction $\psi(z - x)$ de la variable z est holomorphe dans le cercle de centre α_k et de rayon r_k; d'ailleurs elle est finie sur la circonférence de ce cercle. Appelons M_k le maximum du module de $\psi(z - x)$ quand z décrit cette circonférence de centre α_k et de rayon r_k; et désignons par $P_m^{(k)}$ le reste de la série (3) quand z occupe une position quelconque sur l'arc C_k:

$$P_m^{(k)} = \sum_{\mu=m+1}^{\mu=\infty} \frac{(z - \alpha_k)^\mu}{1 \cdot 2 \cdots \mu} \psi^{(\mu)}(\alpha_k - x).$$

On a d'après un théorême connu sur l'évaluation du reste de la série de Taylor

$$\text{mod. } P_m^{(k)} \leq M_k \varrho_k \cdot \frac{\left(\frac{r_k}{\varrho_k}\right)^{m+1}}{\varrho_k - r_k}.$$

Alors le reste $Q_m^{(k)}$ de la série (4) est donné par

$$Q_m^{(k)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_k} f(z)\, P_m^{(k)}\, dz.$$

Si donc on appelle M_k' le maximum de module de $f(z)$ sur l'arc C_k et l_k la longueur de cet arc, on a

$$\text{mod. } Q_m^{(k)} \leq \frac{l_k}{2\pi} \cdot M_k M_k' \varrho_k \cdot \frac{\left(\frac{r_k}{\varrho_k}\right)^{m+1}}{\varrho_k - r_k};$$

ce qui donne la limite cherchée du reste de la série (4). On en déduit immédiatement la limite du reste de la série (5) qui est la somme de n séries telles que (4).

La convergence des séries employées dans ce mémoire est donc comparable à celle des *progressions géométriques*.

Tous les résultats précédents peuvent être étendus au cas où l'aire S serait à contour multiple, les arcs de cercle qui forment le contour tournant tous leur *convexité* vers *l'intérieur* de l'aire.

Paris, 23. Septembre 1882.

Ueber Apolarität und rationale Curven.

(Auszug aus einem Briefe an Hrn. F. Klein).

Von

Franz Meyer in Tübingen.

Bezugnehmend auf den neuerdings erschienenen Aufsatz von Herrn Brill: „Ueber binäre Formen und die Gleichung sechsten Grades“ (pag. 330ff. im 20ten Bande dieser Annalen) sowie die parallel laufenden Untersuchungen des Herrn Stephanos (Comptes Rendus de l'Academie des Sciences de Paris 1881, pag. 994ff., 1882 pag. 1230ff.) möchte ich Ihnen einige weitergehende Resultate mittheilen, welche ich schon seit längerer Zeit besitze, und die in einem Buche über „Apolarität und rationale Curven“, welches eben unter der Presse ist, im Zusammenhange mit anderweitigen verwandten Untersuchungen dargelegt werden sollen.

Zunächst erweitere ich den Stephanos-Brill'schen Satz in der Weise, dass ich sage:

A) „*Es giebt* 5 *Involutionen vierten Grades mit* 6 *gemeinsamen Elementenpaaren.*

Je zwei dieser 5 *Involutionen haben noch ausserdem drei Elementenpaare gemein, je drei noch eines.**)

Daher giebt es solcher weiteren Elementenpaare 10, *die den* 5 *Involutionen in der Art angehören, wie die* 10 *Eckpunkte eines Pentaeders den* 5 *Ebenen desselben. Daraus folgt:*

Jede der 5 *Involutionen enthält noch* 6 *der* 10 *Elementenpaare, die drei ihr angehörige Quadrupel bilden.*“

An diese Formulirung nun schliesst sich eine Fülle ausgedehnter geometrischer Anwendungen an.

Den ersten, unmittelbarsten geometrischen Abdruck des Satzes erhält man, indem man als Elemente die Tangenten (bez. Punkte) eines Kegelschnitts wählt, mithin als Elementenpaare die Punkte (bez. Geraden) einer Ebene.

*) Daraus folgt schon die Brill'sche Tabelle l. c. p. 354.

B) „*Durch irgend* 6 *Punkte in der Ebene eines festen Kegelschnitts geht ein Quintupel von Curven dritter Ordnung, das aus dem Kegelschnitt die Doppelelementensextupel von* 5 *Involutionen vierter Ordnung mit* 6 *gemeinsamen Elementenpaaren ausschneidet.*

Diese 6 *Elementenpaare sind die Berührungspunkte der Tangentenpaare der* 6 *gegebenen Punkte.*

Je drei dieser 5 *Curven dritter Ordnung schneiden sich in einem weiteren Punkte etc. etc.*"

Solche Curven dritter Ordnung sind die bekannten (von Em. Weyr, Rosanes, u. A. studirten) „Involutionscurven", für die je zwei Punkte, deren Elementenpaare ein Quadrupel der zugehörigen Involution bilden, conjugirte Punkte sind."*)

Des Ferneren liefert die Abbildung der Ebene auf eine Fläche dritter Ordnung mittelst der 6 gegebenen Punkte den folgenden Satz:

C) „*Durch jede der* 6 *vierfachen Sehnen einer allgemeinen rationalen Raumcurve sechster Ordnung geht ein die Curve berührendes Ebenenpaar.*

Dann giebt es 5 *Involutionen vierter Ordnung, die diese* 6 *Paare von Berührungspunkten zu gemeinsamen Elementenpaaren besitzen.*

Die 5 *zugehörigen Doppelelementensextupel werden aus der Curve von den Ebenen eines Pentaeders ausgeschnitten, das der einzigen durch die Curve gehenden Fläche dritter Ordnung einbeschrieben ist.*"

Ich gehe jetzt weiter zu der Bedeutung, die diese fünf Involutionen für die rationalen ebenen Curven sechster Ordnung besitzen.

D) I. *Geht man von einer gegebenen rationalen ebenen Curve sechster Ordnung aus (auf der in bekannter Weise die Werthe eines Parameters ausgebreitet seien) und nimmt die Argumentenpaare von* 6 *(der vorhandenen* 10*) Doppelpunkten der Curve als Elementenpaare einer Involution vierter Ordnung an, so werden die Quadrupel der fünf so bestimmten Involutionen aus der Curve ausgeschnitten*

a) *durch die vier Strahlbüschel der vier weiteren Doppelpunkte.*

b) *durch das Kegelschnittbüschel derselben.*

Die zehn oben behandelten weiteren Elementenpaare setzen sich hier zusammen

α) *aus den* 4 *Argumentenpaaren der* 4 *weiteren Doppelpunkte*

β) *aus den* 6 *Restpunktepaaren***), *die die* 6 *Verbindungslinien der* 4 *weiteren Doppelpunkte aus der Curve ausschneiden.*

*) *Umgekehrt* lässt sich eine *beliebig* gegebene ebene Curve dritter Ordnung in dieser Weise auffassen. Dann giebt es ein *Gewebe* (das dualistische zu „Netz") von Curven zweiter Classe, für die obiger Satz gilt, und zwar ist dies das auf der gegebenen Curve *ruhende* Gewebe cf. K I und O.

**) Werden die ursprünglichen 6 Doppelpunkte Spitzen, so ist ein jedes dieser

Unterwirft man daher die Curve den vier quadratischen Transformationen, deren Fundamentaldreiecke von je drei der vier weiteren Doppelpunkte gebildet sind, so erhält man 4 neue Curven derselben Art, für die immer 6 ihrer 10 Doppelpunkte dieselben Argumentenpaare besitzen wie die ursprünglichen 6 ausgewählten.

Die so erhaltenen 5 Curven bilden einen Cyklus in der Weise, dass durch den angegebenen Transformationsprocess aus jeder die vier übrigen hervorgehen.

Die Argumentenpaare der fünfmal vier weiteren Doppelpunkte bilden zusammen die 10 weiteren Elementenpaare der 5 Involutionen und zwar entsprechen sie den 5 Tetraedern des Pentaeders (cf. Satz A)).

Die fünf Involutionen sind auch durch die fünf Involutionen b) *dieser fünf Curven dargestellt.*

Die Brill'sche Entwicklung geht aus dieser hervor, wenn man die sechs ursprünglichen Doppelpunkte zu Spitzen werden lässt. (cf. vorige Anm.).

D) II. *Umgekehrt sind durch sechs ganz beliebig gewählte Doppelpunktsargumentenpaare fünf Classen von rationalen ebenen Curven sechster Ordnung bestimmt. Alle Individuen einer Classe sind projectivisch in einander überführbar, zwei Individuen verschiedener Classen nicht.*

Dagegen sind die fünf Classen durch quadratische Transformation in einander überführbar.

Auf eine jede der Curven wende man in Bezug auf die sechs Doppelpunkte mit den angenommenen Argumentenpaaren den Satz D) I *an.*

Die weitaus wichtigste Anwendung unseres Hauptsatzes ergiebt sich aber durch eindeutige Beziehung der rationalen ebenen Curven sechster Ordnung auf Raumcurven dritter Ordnung. Der interessantesten Anwendung sei ein besonderer Abschnitt gewidmet unter dem Titel:

E) *Ueber eine neue den Doppelsechsen (einer Fläche dritter Ordnung) analoge Configuration von cubischen Raumcurven.*

Diese Configuration wird völlig bestimmt durch *sechs beliebige* Raumgerade, und besteht (cf. Cremona, Crelle Bd. 60, Sturm, Crelle Bd. 80) aus den sechs cubischen Curven, die sie sämmtlich zu *Sehnen*, nebst den 6 anderen, die sie sämmtlich zu *Axen* besitzen. (Zur Abkürzung heisse „*Axe*" einer cubischen Raumcurve eine Linie zweier (Schmiegungs)ebenen).

Die Geraden seien bezeichnet mit

$$g_1\ g_2\ g_3\ g_4\ g_5\ g_6$$

---

6 Restpunktepaare *harmonisch* zu den Argumentenpaaren der beiden zugehörigen Doppelpunkte.

die cubischen Curven der ersten Art mit

$$a_1\ a_2\ a_3\ a_4\ a_5\ a_6,$$

die der zweiten Art mit

$$\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_4\ \alpha_5\ \alpha_6.$$

Im allgemeinen giebt es bekanntlich (cf. Cremona l. c.) *sechs* Axen (Sehnen) einer cubischen Curve, die zugleich Sehnen (Axen) einer zweiten sind.

I. „*Die beiden Sechsen von Curven* a_i, $\alpha_i\,(i = 1, \cdots, 6)$ *stehen aber in dem eigenthümlichen Verhältniss, dass jede der Curven* α_i *einer der Curven* a_i (*und umg.*) *in ganz bestimmter Weise zugeordnet ist.* (*Wir legen daher diesen beiden gleichen Index bei*). *Nämlich unter allen Combinationen* $a_i\,\alpha_k$ *sind diese dadurch ausgezeichnet, dass die sechs Geraden g in der That die einzigen Axen von* α_i *sind, die zugleich Sehnen von* a_i *sind. Dagegen giebt es ausser den Geraden g noch einfach unendlich viele Geraden, die Axen von* α_k *und zugleich Sehnen von* a_i $(i \neq k)$ *sind.*“

Wir betrachten jetzt des Näheren die fünf Curven $a_1\ a_2\ a_3\ a_4\ a_5$, die in dieser Weise zur Curve α_6 (d. h. irgend einer der Curven α) gehören. Man erhält sie auch auf folgende Art:

Die 6 Ebenenpaare, die von den Geraden g an die Curve α_6 gehen, bestimmen 5 Involutionen vierter Ordnung (deren Elemente*) die Ebenen von α_6 sind), die sie zu gemeinsamen Elementenpaaren besitzen. Jedes Elementenpaar bestimmt eine Axe von α_6.

Die Elementenpaare unserer fünf Involutionen sind dann dargestellt durch alle die Axen von α_6, die zugleich Sehnen einer der fünf Curven a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 sind.

Oder, da jedes Quadrupel von Elementen ein der Curve α_6 *umbeschriebenes* Tetraeder bestimmt:

II. *Jede der Curven* $a_r\,(r = 1, \cdots, 5)$ *ist der Ort der Ecken von einfach unendlich vielen, der Curve* α_6 *umschriebenen Tetraedern. Diese Tetraeder sind gegeben durch die Quadrupel unserer fünf Involutionen.*

Daher stehen die Curven $a_i\,\alpha_k\,(i \neq k)$ in der von Hurwitz (diese Ann. Bd. XV, XX) studirten Beziehung, dass es unendlich viele Tetraeder giebt, die der einen (α_k) um- und der andern (a_i) einbeschrieben sind. Zu jeder Ebene von α_k wie zu jedem Punkte a_i gehört *ein* solches Tetraeder.

Aus dem Hauptsatz A) folgt nun aber sofort:

III. „*Je zwei der fünf Curven* $a_r\,(r = 1, \cdots, 5)$ *haben drei gemeinsame Ecken* (*ausser den Geraden g*) *die Axen von* α_6 *sind; je drei derselben eine solche.*“

*) Ein Element ist immer ein Werth des auf der Curve in bekannter Weise ausgebreiteten Parameters (Arguments). Irgend ein Punkt der Curve hat dasselbe Argument, wie seine Ebene (und auch Tangente).

Nun haben je zwei der *sechs* Curven a (wie überhaupt zwei cubische Raumcurven cf. Cremona l. c.) *zehn* gemeinsame Sehnen (hier nicht unendlich viele, wie leicht zu sehen), also ausser den Geraden g noch *vier*.

Aus dem eben ausgesprochenen Satze folgt aber für diese weiteren gemeinsamen Sehnen der Curven a, indem man von den Curven α jetzt absieht:

IV. „*Die sechs cubischen Curven a besitzen ausser den* 6 *Geraden g noch zu je zweien* 4 *gemeinsame Sehnen, also im Ganzen* $\frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} \cdot 4 = 60$.

Diese reduciren sich aber auf 20, *da jede von ihnen gemeinsame Sehne von drei der Curven ist, also dreimal auftritt.*

Diese 20 *Linien sind zugleich die entsprechenden* 20 *weiteren Axen von je dreien der Curve α und zwar ist eine Sehne (mit leicht verständlicher Abkürzung*

$$(a_1\ a_2\ a_3)$$

immer zugleich Axe

$$(\alpha_4\ \alpha_5\ \alpha_6)^*).$$

Desgleichen sind die vier Sehnen, die je dreien von vier der Curven a gemeinsam sind,

$$(a_1\ a_2\ a_3) \quad (a_1\ a_2\ a_4) \quad (a_1\ a_3\ a_4) \quad (a_2\ a_3\ a_4)$$

nebst den 6 *Geraden g die* 10 *gemeinsamen Axen der beiden Curven*

$$\alpha_5 \quad \alpha_6$$

(und reciprok).

Daraus ergiebt sich aber in Verbindung mit Satz D):

V. „*Die* 10 *Argumentenpaare der Doppelpunkte einer rationalen ebenen Curve sechster Ordnung stehen in derselben Beziehung zu einander, wie die* 10 *Argumentenpaare einer cubischen Raumcurve, die* 10 *Axen (Sehnen) zugehören, die zugleich Axen (Sehnen) einer zweiten cubischen Raumcurve sind.*

Umgekehrt bestimmen irgend zwei cubische Raumcurven (ohne**) gemeinsamen Punkt resp. Ebene) durch ihre gemeinsamen Axen resp. Sehnen *je* eine Classe von rationalen ebenen Curven sechster Ordnung, deren Individuen projectivisch in einander überführbar sind.

Aus dieser Beziehung folgt: (cf. Em. Weyr, Wiener Ber. 1882, März, April).***)

VI. „*Die zehn gemeinsamen Axen (Sehnen) zweier cubischer Raumcurven sind zu je neun Sehnen (Axen) einer weiteren cubischen Curve.*

*) Daher sind die beiden Sechsen von Curven in Bezug auf ihre gemeinsamen Sehnen (resp. Axen) gruppirt, wie die Ecken resp. Ebenen eines *Hexaeders* resp. *Sechsecks*, wo das letztere dem ersteren *umschrieben* ist.

**) Haben die beiden Curven resp. ein, zwei, drei Ebenen *gemein*, so gehen die rationalen ebenen Curven über in solche resp. fünfter, vierter, dritter Ordnung.

***) Ich bin auf die hier und im Folgenden zu nennenden Arbeiten von Em. Weyr leider erst nachträglich aufmerksam geworden.

Solcher giebt es also 10 (10). *Jede von diesen steht zu beiden Originalcurven in der Hurwitz'schen Beziehung d. h. je neun der zehn zugehörigen Elementenpaare sind die einer Involution vierter Ordnung.*

Bezeichnen wir die 10 Axen*) mit

$$(\gamma_i \delta_i)\ (i = 1, \cdots, 10)$$

so können wir die entsprechenden 10 Involutionen bezeichnen mit

$$J_i\ (i = 1, \cdots, 10).$$

In jeder der Involutionen J_i giebt es neun weitere Elementenpaare, die mit den neun gegebenen Paaren neun *Quadrupel* der Involution bilden. Solcher weiteren Paare giebt es im ganzen $\frac{10 \cdot 9}{2} = 45$, da jedes zweimal auftritt.**)

Zu je sieben der zehn Axenelementenpaare

$$(\gamma_r \delta_r)\ (r = 1, 2, \cdots, 7)$$

gehören immer *drei* der 45 weiteren Paare in der Weise, dass diese *keiner* der sieben Involutionen $J_r (r = 1, \cdots, 7)$ angehören.

VIa) *Diese sieben + drei Paare bestimmen* 10 *Axen, die wieder zugleich Axen einer weiteren cubischen Curve sind. Solcher weiteren Curven giebt es daher* 120." *etc. etc.*

Endlich gelangt man von je sechs der zehn Elementenpaare aus wieder zur früheren Hauptconfiguration *zurück*, die daher nur ein *specieller* Fall der jetzigen ist.

Zum Schluss möge noch eine merkwürdige Eigenschaft der zehn gemeinsamen Axen zweier cubischen Curven Platz finden, die sich an das Obige eng anschliesst. (cf. Em. Weyr, l. c.)

VII. „*Die zehn gemeinsamen Axen zweier cubischer Raumcurven liegen auf einer ganz bestimmten Fläche vierter Ordnung. Diese enthält dann auch die* 10 *oben angegebenen cubischen Curven, die je neun der zehn Axen zu Sehnen haben.* Von dieser Fläche möge vorläufig Folgendes angeführt sein:

a) *Jeder der beiden gegebenen Curven sind zweifach unendlich viele Hexaeder umbeschrieben und zugleich der Fläche einbeschrieben* (cf. K$_{VI}$ anm.). (cf. Em. Weyr, l. c.)

Jeder Punkt der Fläche ist Eckpunkt *eines* solchen Hexaeders für die erste Curve, und eines zweiten für die zweite.

Daher sind die Punkte der Fläche auf *doppelte* Weise einander eindeutig involutorisch zugeordnet; je zwei solche zugeordnete Punkte sind Gegenecken der beiden Hexaeder.***)

*) Die dualistische Ergänzung wird von jetzt ab unterdrückt.

**) Diese erhält man auch so: Je zwei der 10 Involutionen haben noch *ein* weiteres Elementenpaar gemein. Dies sind die 45 Paare.

***) Die Kernfläche einer Fläche dritter Ordnung ist ein specieller Fall dieser Fläche, cf. K$_{IV(\beta)}$, wie auch die Hierholzer'sche Fläche, cf. K$_{IV(\alpha)}$.

Je zwei der 10 Axenelementenpaare

$$(\gamma_1 \delta_1) \quad (\gamma_2 \delta_2)$$

bilden mit dem Paar, das den beiden Involutionen J_1, J_2 noch gemein ist, ein Sextupel, dessen zugehörige Ebenen ein solches Hexaeder bilden.

b) Die Fläche hat (wie jede allgemeine Fläche vierter Ordnung) mit jeder der beiden Grundcurven $4 \cdot 12 = 48$ gemeinsame Tangenten.

Diese 48 *gemeinsamen Tangenten theilen sich* (*für beide Curven*) *in* 24 *Paare derart, dass für jedes Paar die Berührungssehne der Fläche eine Axe der Curve ist* (d. i. die den beiden Berührungspunkten leicht auf der Curve zugehörige Axe).

c) Die Fläche hat mit beiden Grundcurven je 12 Punkte gemein. Legt man an eine der Curven in einem dieser 12 Punkte W die Tangente, so trifft diese die Fläche in drei weiteren Punkten $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$. Von jedem geht noch *eine* Ebene an die Curve. *Die drei Axen dieses Trieders* $(\lambda_1 \lambda_2)$ $(\lambda_1 \lambda_3)$ $(\lambda_2 \lambda_3)$ *osculiren die Fläche im Punkte W.*

Nach diesen Anwendungen des Hauptsatzes A), die für diesmal genügen mögen, soll derselbe noch des Näheren *ergänzt* werden durch eine Angabe der verschiedenen *Bestimmungs*arten einer Involution vierter Ordnung durch Combinirung von Elementen*paaren* mit Elemente*ntripeln* und Elementen*quadrupeln* nebst den *Anzahlen* von Involutionen, die einer jeden so möglichen Bestimmung entsprechen.

Dies leistet folgende Tafel, wo links die Anzahl der Involutionen vierter Ordnung steht, die gegebene

x-Elementenpaare, y-Elemententripel, z-Elementenquadrupel

$$(x + 2y + 3z = 6)$$

besitzen. Die Modificationen, die Satz D) und A) dadurch erfährt, sind angebbar und können hier unterdrückt werden.

Anzahl	Paare	Tripel	Quadrupel
5	6		
3	4	1	
1	3		1
2	2	2	
1	1	1	1
1		3	
1			2

Daraus ergeben sich wieder sofort die entsprechenden Sätze für die bezüglichen Anzahlen der cubischen Raumcurven, die zu einer gegebenen cubischen Curve in der Hurwitz'schen Beziehung stehen sollen, so z. B. besonders der Satz:

F) *Durch drei Raumpunkte geht jedesmal eine cubische Raumcurve*

von der Art, dass es unendlich viele Tetraeder giebt, die ihr ein- und einer gegebenen cubischen Curve umbeschrieben sind etc. etc.

Dadurch wird es auch leicht möglich, wenn zwei cubische Curven in der Hurwitz'schen Beziehung stehen, die Quadrupel der zugehörigen Involution durch ein *Flächenbüschel* auszuschneiden (respective gilt das dualistische). Es spricht dies der Satz aus:

G) *Ist a die cubische Curve, der die Tetraeder ein- und α die andere, der sie umbeschrieben sind, so nehme man irgend drei*) Punkte von a:*

$$A_1\ A_2\ A_3$$

und lege durch jeden die Ebene des durch die Curve α bestimmten Nullcomplexes. Deren Schnittpunkt sei A, *ihre drei Schnittlinien*

$$a_1\ a_2\ a_3,$$

und die eine Sehne, die durch A *an die Curve α geht,* a_4.

Das Kegelbüschel zweiter Ordnung mit den gemeinsamen Kanten

$$a_1\ a_2\ a_3\ a_4$$

schneidet aus der Curve α die Quadrupel der durch die Curve a bestimmten Involution aus, d. h. die Schmiegungspunkte der Ebene unserer Tetraeder. Umgekehrt ist also so durch 3 Punkte die Curve a bestimmt.

Stellt man endlich die Quadrupel der Involution nach Sturm (Crelle 86) durch die Geradenpaare dar, die die vier zugehörigen Tangenten treffen, so erhält man eine andere Reihe von Sätzen, z. B.:

H) *Durch 6 Punkte einer cubischen Raumcurve gehen 5 Flächen zweiter Ordnung, deren mit der Curve gemeinsame Ebenen**) die Schmiegungsebenen der 6 Punkte sind.*

Zum Schluss möge der Hauptsatz A) in seinem ersten Theil auf Involutionen irgend einer Ordnung ausgedehnt werden. Dies ist der äusserst wichtige Satz (den ich mit Benutzung höherer Mannigfaltigkeiten abgeleitet habe):

J) *Die Anzahl* X_m *der Involutionen* m^{ter} *Ordnung mit gemeinsamen*

$$2(m-1) = \delta$$

Elementenpaaren (speciell „Doppelelementen") bestimmt sich durch die Relation:

$$\frac{X_m}{2} = \frac{(\delta-1)!}{\left(\frac{\delta}{2}+1\right)!\left(\frac{\delta}{2}-1\right)!}$$

die alle Fälle umfasst, auch wenn $m = 2$ *ist, nur dass man dann unter* 0! *die Eins zu verstehen hat.***)*

---

*) Die nicht einem und demselben Tetraeder angehören.

**) Mit leicht verständlicher Abkürzung.

***) Es sind absichtlich die Factoren, die Zähler und Nenner der Formel für $\frac{X_m}{2}$ gemeinsam sind, nicht gehoben worden, um ihr diese elegante Gestalt zu lassen.

Auf die ausgedehnten Anwendungen dieses Satzes komme ich an anderer Stelle zurück: hier mögen nur noch die Zahlen für die einfachsten Fälle Platz finden.

Man hat für die Involutionen

3^{ter},	4^{ter},	5^{ter},	6^{ter},	7^{ter},	8^{ter} Ordnung
2,	5,	14,	42,	132,	425,

Involutionen mit bez.

4,	6,	8,	10,	12,	14

gemeinsamen Elementenpaaren.

Ich theile noch einige Eigenschaften der oben erwähnten Fläche vierter Ordnung mit, welche dieselbe als besonders interessant erscheinen lassen dürften.

Zur Abkürzung führe ich vorab zwei neue Bezeichnungen ein.

1) Ich sage von einer Fläche zweiter Classe, deren Tangentenebenen die Ebenen einer cubischen Raumcurve enthalten, „die Fläche sei der Curve *um*schrieben".

2) Ist eine Fläche zweiter Ordnung so beschaffen, dass sie apolar ist zu der *ganzen Schaar* von Flächen zweiter Classe, die einer *gegebenen* cubischen Raumcurve umschrieben sind, so sage ich nach dem Vorgang von Reye, (cf. Crelle 82, p. 54 ff.) „die Fläche zweiter Ordnung *stützt* die cubische Curve"*) und von einer Fläche zweiter Classe, die sich zur Curve *dualistisch* verhält, „sie *ruhe* auf der Curve."

Dann gilt der merkwürdige Satz:

K_I) „*Die Fläche vierter Ordnung, die durch die zehn gemeinsamen Axen zweier cubischen Raumcurven geht (und dadurch völlig bestimmt ist) ist die Jacobi'sche***) *Fläche einer dreifach unendlichen linearen Schaar von Flächen zweiter Ordnung*

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 + \lambda_4 f_4 = 0$$

die sämmtlich beide Curven stützen.

Eine solche Schaar enthält (cf. Reye, Crelle 82, p. 63, Rosanes, Crelle 88, p. 90) zehn Ebenenpaare.

Die zehn Kanten dieser zehn Ebenenpaare sind unsere zehn Axen: man erhält für jede Axe das zugehörige Ebenenpaar als das Paar, das *harmonisch ist zu den beiden* Ebenenpaaren, die von der Axe an die beiden cubischen Curven gehen.

Der Satz gilt aber auch umgekehrt:

K_{II}) „*Die Kanten der zehn Ebenenpaare, die sich in einer allgemeinen dreifach unendlichen linearen Flächenschaar zweiter Ordnung befinden, sind die gemeinsamen Axen zweier cubischen Curven*" *etc. etc. cf.* K_I).

---

*) Reye nennt dann die Curve die cubische Polcurve der Fläche.

**) D. i. der Ort der Spitzen aller Kegel der Schaar.

K_{III}) „*Geht man von sechs beliebigen Raumgeraden aus und nimmt sie als Kanten von sechs noch unbestimmten Ebenenpaaren einer dreifach unendlichen linearen Flächenschaar zweiter Ordnung an, so giebt es solcher Schaaren an Zahl* $\frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} = 15$ *entsprechend den* 15 *Paaren von cubischen Curven, die man aus den sechs bilden kann, die die* 6 *Gerade zu Axen haben, also giebt es auch* 15 *entsprechende Kegelspitzenflächen*".

K_{IV}) „α) Ist die Flächenschaar zweiter Ordnung *speciell**) eine solche durch *sechs Punkte*, so erhält man die Hierholzer'sche Fläche (Hierholzer, diese Annalen Bd. 2, 4; Salmon, Raumgeometrie III. Auflage, p. 467).

β)**) Besteht die Schaar aus den ersten Polaren einer Fläche dritter Ordnung, so erhält man die Kernfläche der letzteren, cf. $E_{VII\,a}$) Anmerkung.

Mit Rücksicht auf die bekannte Bedeutung der Apolarität kann man daher auch folgenden Satz aussprechen.

K_V) „*Zu einer dreifach unendlichen linearen Flächenschaar zweiter Ordnung gehört stets ein Paar von cubischen Raumcurven, von denen jede folgende Eigenschaften besitzt:*

Für jede Fläche der Schaar giebt es einfach unendlich viele Poltetraeder, die der Curve umschrieben sind (cf. $M_{I,II}$)".

Jede Fläche der Schaar scheidet aus der Curve ein Sextupel von Punkten aus, das durch die Gleichung sechsten Grades

$$\lambda_g \equiv \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 + \lambda_3 g_3 + \lambda_4 g_4 = 0$$

bestimmt sei.

Ferner sei die zweifach unendliche lineare Schaar von der Curve um- und der Jacobi'schen Fläche der Schaar einbeschriebenen Hexaedern***) (cf. Satz E_{VII}) dargestellt durch

$$\mu_h \equiv \mu_1 h_1 + \mu_2 h_2 + \mu_3 h_3 = 0.$$

K_{VI}) „Dann ist *jedes* Sextupel λ_g zu *jedem* Sextupel μ_h apolar" oder (nach Rosanes): „*Die Gruppen* λ_g *und* μ_h *sind conjugirt*".

K_{VII}) Weiter giebt es unter der Schaar der Flächen zweiter Ordnung *sechs Büschel*, die aus der Curve (abgesehen von je vier festen Punkten) eine *gewöhnliche Involution* (zweiter Ordnung) ausschneiden. Jede dieser sechs Involutionen besitzt ein Doppelelementenpaar.

Die fünf Involutionen vierter Ordnung (cf. Satz A, C) die diese 6 Doppelelemententenpaare zu *Elementenpaaren* besitzen, haben jede sechs Doppelelemente.

---

*) Während die *allgemeine* Schaar aus allen Flächen besteht, die zu sechs gegebenen Flächen zweiter Classe (anstatt der sechs doppeltzählenden Punkte) apolar sind.

**) Die grosse Zahl anderer specieller Fälle soll hier unerwähnt bleiben.

***) Es sind dies die gemeinsamen *Polhexaeder* der Flächenschaar zweiter Ordnung. Dies erklärt die $E_{VII\,(\alpha)}$ erwähnte eindeutige Verwandtschaft der Punkte unserer Fläche.

Diese fünf Sextupel werden von fünf Flächen der Schaar aus der Curve ausgeschnitten.

Dies sind zugleich diejenigen fünf Flächen der Schaar, denen (zweifach) unendlich viele Tetraeder ein- und der Curve umbeschrieben sind. (cf. M_{III}).

Der eben K_{VI} angegebene Zusammenhang zwischen den Sextupeln λ_g und den Sextupeln μ_h ist nun aber ein noch viel innigerer, indem dem binären Satze K_{VI} ein noch wichtigerer quaternärer zur Seite geht.

Um diesen anzugeben, sei es erlaubt, von einigen weiteren Abkürzungen Gebrauch zu machen.

Durch jedes Sextupel von Punkten λ_g auf der Curve geht eine (und nur eine) Fläche unserer Schaar, die daher der Sextupelschaar λ_g *ein-eindeutig* zugeordnet ist.

*Ich nenne deshalb unsere Flächenschaar zweiter Ordnung die Schaar oder besser**) „*das Gebüsch* (λ_g)".

Dualistisch gehört dann zu jedem Ebenensextupel μ_h der Curve eine (und nur eine) Fläche zweiter Classe, die auf der Curve ruht, mithin zum ganzen Sextupelnetz eine bestimmte Flächenschaarschaar zweiter Classe.

Diese heisse in analoger Weise „die Schaarschaar (μ_h)".

Dann findet der binäre Satz K_{VI}, dass die Gruppen λ_g und μ_h zu einander conjugirt sind, seine Erweiterung in dem quaternären:

L_I) „*Die auf der Curve ruhende Schaarschaar* (μ_h) *ruht auch auf dem die Curve stützenden Gebüsch* (λ_g), *und zwar besteht sie aus allen auf der Curve und zugleich auf dem Gebüsch* (λ_g) *ruhenden Flächen zweiter Classe.*"

Ferner findet der Satz K_{VII} durch Hereinziehen der Schaarschaar (μ_h) seine Ergänzung in dem andern:

L_{II}) „*Die sechs der Curve einbeschriebenen Tetraeder des Satzes* K_{VII} (*Poltetraeder von sechs Büscheln des Gebüsches* (λ_g)) *sind zugleich Poltetraeder von sechs Schaaren der Schaarschaar* (μ_h).

Drei dieser Tetraeder kann man der Curve beliebig einschreiben, dann ist unsere ganze Configuration dadurch eindeutig bestimmt."

Endlich findet diese ganze Theorie unserer Fläche vierter Ordnung, insofern sie auf dem Apolaritätsbegriff fusst, und insonderheit der Grundstock dieser Theorie, der Satz K_V, einen gewissen Abschluss durch eine Reihe von Sätzen, die für *jede* Fläche zweiter Ordnung (Classe), die die Curve stützt (auf ihr ruht) gültig sind.

M_I) „*Die Ecken der* (*einfach*) *unendlich vielen der Curve umschriebenen Poltetraeder einer die Curve stützenden Fläche zweiter Ordnung sind zugleich einer zweiten cubischen Curve einbeschrieben.*

*) Weil das Wort „Schaar" auch von Flächen zweiter Classe gebraucht wird und dann das dualistische zu „Büschel" bedeutet.

Die sechs Ebenen der ersten Curve, die den Doppelelementen der durch diese Poltetraeder erzeugten Involution vierter Ordnung zugehören, sind Tangentialebenen der Fläche (also die sechs Ebenen, die sie, als Classenfläche aufgefasst, mit der Curve gemein hat)".

Noch wichtiger ist die Umkehrung dieses Satzes:

M_{II}) „*Zu jeder cubischen Curve, die zu einer gegebenen in der angegebenen (Hurwitz'schen) Beziehung steht, (sodass unendlich viele Tetraeder der gegebenen Curve um- und der andern einbeschrieben sind) gehört eine bestimmte die gegebene Curve stützende (und auf der andern ruhende) Fläche zweiter Ordnung.*

Daher giebt es (nach Hauptsatz A) *fünf eine cubische Curve stützende Flächen zweiter Ordnung, für die sechs beliebig gegebene Ebenen der Curve Tangentialebenen sind.*"

Diese beiden Sätze $M_{I,II}$ sind der Ausdehnung auf Räume von beliebig hohen Dimensionen fähig, was hier nur angedeutet sein mag.

Dagegen soll ihr (erweiterter) *algebraischer* Inhalt, weil er mit dem Fundamentalsatz über Involutionen (Satz J) aufs engste verwachsen ist, kurz betont werden.

Zu jeder binären Form geraden Grades ($= 2m$) gehört bekanntlich immer eine gewisse Covariante desselben Grades (in der Variabeln), die Determinante ihrer $2(m-1)^{ten}$ Differentialquotienten. Beispielsweise ist dies für eine Form vierten Grades ihre Hesse'sche Covariante. Dann gilt folgender wichtige Satz:

N) „*Die Frage nach der Anzahl und Natur der Involutionen $(m+1)^{ter}$ Ordnung mit denselben $2m$ Doppelelementen ist identisch mit der Frage nach der Anzahl und Natur der Grundformen $2m^{ter}$ Ordnung, die zu der eben bezeichneten Covariante, wenn man von der letzteren als gegebener Form ausgeht, gehören.*

Diese letztere Form (die Covariante) ist eben die, die die Doppelelemente der Involution darstellt."

Kehren wir zurück zur Involution vierter Ordnung, so ergänzen sich mit Rücksicht auf diesen Satz N) die Sätze $M_{I,II}$ nach geometrischer Seite hin durch folgende (ich hebe nur das Wichtigste heraus):

M_{III}) „*Zu jeder cubischen Curve, die zu einer gegebenen in der angegebenen (Hurwitz'schen) Beziehung steht, gehört eine zweite ganz bestimmte Fläche zweiter Ordnung.*" Von dieser gilt Folgendes:

α) „Sie geht durch die sechs Punkte der gegebenen Curve, die den Doppelelementen*) der Involution vierter Ordnung (cf. M_I) zugehören und enthält drei Axen der Curve ganz**), die man so erhält:"

„Unter den der gegebenen Curve um- und der andern einbe-

*) Daher gehen durch irgend sechs Punkte einer gegebenen cubischen Raumcurve fünf solcher Flächen, denen fünf Hurwitz'sche Beziehungen zugehören.

**) cf. Em. Weyr, Bulletin de l'Acad. de Belg. 1882, Mai.

schriebenen Tetraedern befinden sich drei ausgezeichnete. Durch die Ecken eines jeden geht eine weitere cubische Curve, die zur gegebenen gleichfalls in der Hurwitz'schen Beziehung steht und ausserdem in zwei Punkten der gegebenen Curve die *Punkte*, *Tangenten und Ebenen* mit ihr gemein hat.

Solcher Punktepaare giebt es also drei; die zugehörigen drei Axen der gegebenen Curve sind die gesuchten, die ganz auf der Fläche liegen".

β) „Die Fläche ist der Ort der Ecken von (zweifach) unendlich vielen der Curve umschriebenen Tetraedern und ist (cf.*) Pasch, Crelle 89) durch drei beliebige solche Tetraeder eindeutig bestimmt. Von jedem Punkt der Fläche geht ein solches Tetraeder aus."

γ) „Die Gruppe der diesen Tetraedern zugehörigen Quadrupel auf der gegebenen Curve ist conjugirt zur Gruppe der Hurwitz'schen Tetraeder."

δ) „Die Fläche hat mit der gegebenen Curve acht Tangenten gemein. Hinsichtlich dieser verhält sie sich ganz wie die Fläche vierter Ordnung der Sätze E, K (cf. $E_{VII(\delta)}$): die acht Tangenten theilen sich in vier Paare derart, dass die vier Berührungssehnen der Fläche zweiter Ordnung Axen der Curve sind."

Zum Schlusse sei noch bemerkt, dass sich die ganze Theorie der Sätze E bis N auf die Ebene übertragen lässt und sich dann an den Satz B anschliessen würde. An die Stelle von Poltetraedern einer Fläche zweiter Ordnung treten dann die Poldreiecke einer ebenen Curve dritter Ordnung und an die Stelle der Apolarität einer Fläche zweiter Ordnung zu einer cubischen Raumcurve tritt die Apolarität einer ebenen Curve dritter Ordnung zu einem (Classen-)Kegelschnitt (d. i. nach Reye die Apolarität ihrer Polarkegelschnitte zu demselben cf. Satz B Anm.). Es möge genügen, den Schlüssel dieser Abbildung zu geben.

O) „*Sind unendlich viele Tetraeder einer ersten cubischen Raumcurve um- und einer zweiten einbeschrieben, so schneidet jede der ersten Curve umschriebene Fläche zweiter Classe die zweite in drei Punktepaaren, deren Sehnen ganz auf der Fläche liegen (und dualistisch für die zweite Curve).*"

Dadurch wird die Theorie der Hurwitz'schen Beziehung (d. i. der Involutionen vierter Ordnung auf cubischen Raumcurven) identisch mit der Theorie einer ebenen (allgemeinen) Curve dritter Ordnung, sofern man sie als die Hermite'sche Curve eines Kegelschnittgewebes (respective als Jacobi'sche Curve eines Kegelschnittnetzes) auffasst (cf. Satz B Anm.).

Tübingen, 4. October 1882.

*) Vgl. auch Em. Weyr, l. c. Was die geometrische Seite der Involutionenfrage anlangt, verweise ich noch auf Em. Weyr. Wiener Ber. LXXIX, LXXXI No. IV und Le Paige, Mém. de l'Acad. de Belg. t. XLII, sowie die neuesten Mittheilungen von Le Paige an die Wiener Academie.

Nachtrag zur „Note über die algebraischen Curven mit einer Schaar eindeutiger Transformationen in sich."

(Diese Ann. XX, p. 59.)

Von

M. Noether in Erlangen.

In dem Beweise meiner im Titel genannten „Note", welcher bestimmt war, eine Lücke des Hettner'schen Beweises zu ergänzen, ist selbst noch, wie ich nachträglich bemerkte, eine Lücke geblieben, die nun hier in 9.—11. ausgefüllt werden soll. Zugleich wird in 8'.—11'. noch ein zweiter einfacherer Beweis geliefert.

Jener Beweis war im Wesentlichen so: Es giebt auf $f(s, z) = 0$ für $p > 1$ endlich viele specielle Werthsysteme (s_0, z_0) derart, dass (s_0, z_0) durch die eindeutigen Transformationen der Schaar nur in ein vom Parameter der Transformationen unabhängiges, d. h. festes, specielles Werthsystem (σ_0, ζ_0) übergeführt wird (Nr. 7 der Note). Aber es giebt auch immer eindeutige Transformationen der Schaar, welche irgend ein Werthsystem (s, z) von $f(s, z) = 0$ in ein (σ_0, ζ_0) beliebig benachbartes Werthsystem von $f(\sigma, \zeta) = 0$ überführen, und umgekehrt; also, wegen der Stetigkeit, auch (σ_0, ζ_0) in (s, z) selbst — was ein Widerspruch ist (Nr. 8).

Die Lücke liegt nun darin, dass unter der Schaar von im Allgemeinen eindeutigen Transformationen für singuläre Werthe des Parameters einzelne *unendlich-vieldeutige* Transformationen existiren könnten; und dass es dann eine solche wird, welche (σ_0, ζ_0) in (s, z) und überhaupt in jedes Werthsystem von $f(s, z) = 0$ überführt; wodurch der Widerspruch gehoben wäre.

So giebt es unter der Schaar von eindeutigen Transformationen, welche eine rationale Curve $f(s, z) = 0$ in sich, $f(\sigma, \zeta) = 0$, und dabei zwei feste Punkte (s_1, z_1), (s_2, z_2) bez. in die festen Punkte (σ_1, ζ_1), (σ_2, ζ_2) überführen, zwei singuläre Transformationen; die eine führt alle Punkte von $f(s, z) = 0$ in den einen (σ_1, ζ_1) und zugleich (s_2, z_2) in alle Punkte von $f(\sigma, \zeta) = 0$ über; die andere leistet dasselbe in Bezug auf (σ_2, ζ_2) und (s_1, z_1).

Hiernach ist zu 8. der Note hinzuzufügen:

9. Sei (ϱ_0, ϱ_0') der Parameter einer solchen singulären, unendlich vieldeutigen Transformation der Schaar, welche *alle* Werthsysteme (s, z) von $f(s, z) = 0$ in das specielle Werthsystem (σ_0, ζ_0) von $f(\sigma, \zeta) = 0$ überführt. (ϱ_1, ϱ_1') sei ein dem Parameter (ϱ_0, ϱ_0') benachbarter Parameter einer eindeutig umkehrbaren Transformation der Schaar. Wegen der Stetigkeit von $F(\varrho, \varrho') = 0$ (Nr. 5) muss es dann möglich sein, (ϱ_1, ϱ_1') so nahe an (ϱ_0, ϱ_0') anzunehmen, dass

vermöge dieser Transformation (ϱ_1, ϱ_1') *irgend* ein von den speciellen Punkten von $f(s, z) = 0$ verschiedenes, aber denselben beliebig benachbartes gegebenes Werthsystem (s', z') von $f(s, z) = 0$ in eine beliebig vorgegebene Nähe von (σ_0, ζ_0) übergeführt wird, wobei zugleich noch (s_0, z_0) in (σ_0, ζ_0) übergeht.

10. Seien weiter (s_1, z_1), (s_2, z_2), $\cdots$, (s_ν, z_ν) die ausser (s_0, z_0) auf $f(s, z) = 0$ existirenden speciellen Werthsysteme (Nr. 3). Man betrachte ν beliebig kleine, um diese Werthsysteme abgegrenzte, von einander getrennte Gebiete von $f(s, z) = 0$; man müsste dann nach 9. (ϱ_1, ϱ_1') so nahe an (ϱ_0, ϱ_0') annehmen können, dass vermöge der Transformation (ϱ_1, ϱ_1') das ganze ausserhalb dieser ν Gebiete gelegene, stetig zusammenhängende Gebiet von $f(s, z) = 0$ in ein kleines Gebiet von $f(\sigma, \zeta) = 0$ um (σ_0, ζ_0), und zugleich diese ν getrennten Gebiete von $f(s, z) = 0$ in das ganze ausserhalb des kleinen Gebiets um (σ_0, ζ_0) gelegene, in sich zusammenhängende Gebiet von $f(\sigma, \zeta) = 0$ übergeführt werden. Dies ist aber für $\nu > 1$ unmöglich.

11. Somit könnten für $p > 1$ höchstens *zwei* specielle Werthsysteme auf $f(s, z) = 0$ existiren. Schon in dem speciellsten, dem hyperelliptischen Falle, existiren aber $2(p + 1)$ solcher. Da man zudem auf $f(s, z) = 0$ ausser den in 3. betrachteten noch *weitere* specielle Werthsysteme hat, für welche alle vorhergehenden Betrachtungen gültig bleiben — so unter den Gruppen von $p - 1$ Werthsystemen, in welchen eine Function φ in der 2^{ten} Ordnung verschwindet, nach der Theorie der Θ-Functionen in allen Fällen eine höhere Anzahl solcher Gruppen, während eine andere Zahl solcher Gruppen zu unendlichen Schaaren gehören können —, so wird die Zahl der speciellen Werthsysteme immer > 2, und die Schaar der Transformationen kann also für $p > 1$ nicht existiren. —

An Stelle des Beweisganges 8.—11. kann man einen einfacheren, rein algebraischen Beweis setzen, der von der Betrachtung der singulären Transformationen keinen Gebrauch zu machen hat und zugleich von den speciellen Werthsystemen (s_0, z_0) der Nr. 3. nur *eines* benutzt. Dieser Gang stellt sich nach 1.—7. der Note so:

8'. Man darf annehmen*), dass unter den eindeutig umkehrbaren Transformationen der Schaar die *Identität* enthalten sei. Denn sei Σ die Schaar der Transformationen, S^{-1} die Umkehrung einer beliebig aus dieser Schaar Σ herausgewählten Transformation S, so stellt ΣS^{-1} eine Schaar der genannten Art vor. Durch die eindeutig umkehrbaren Transformationen dieser Schaar gehen die speciellen Werthsysteme von 3. alle nur *in sich selbst* über.

9'. Sei für $p > 1$, (s_0, z_0) ein specielles Werthsystem aus 3., in welchem eine rationale Function $\psi(s, z)$ in einer Ordnung $\mu < p + 1$ unendlich werden kann, ohne in einem weiteren Punkte von $f(s, z) = 0$ unendlich zu werden; und sei μ die *kleinste* Zahl, für welche dieses in (s_0, z_0) stattfinden kann. Dann ist ψ in der Form darstellbar:

*) Schwarz, Crelle's J. 87, p. 140.

$$\psi(s, z) = \frac{\alpha_0 \varphi_0 + \alpha_1 \varphi_1}{\varphi_0},$$

wo φ_0 eine Function φ ist, die in (s_0, z_0) in der μ^{ten} Ordnung verschwindet, während φ_1 eine Function φ ist, die durch die übrigen $2p - 2 - \mu$ Nullpunkte von φ_0 geht. Die Function ψ kann nur noch *eine* willkürliche Constante $\frac{\alpha_1}{\alpha_0}$ enthalten, weil man sonst, indem man den Zähler von ψ für (s_0, z_0) ebenfalls zu 0 werden liesse, in ψ eine Function erhielte, die in (s_0, z_0) in einer Ordnung $< \mu$, und sonst nicht, unendlich würde.

10′. Durch die ganze Schaar der Transformationen kann die Function ψ, die in (s_0, z_0) in der μ^{ten} Ordnung unendlich wird, nur in eine ebensolche Function übergehen, d. h., da (s_0, z_0) nach 8′. fest bleibt, $\alpha_0 \varphi_0 + \alpha_1 \varphi_1$ nur in

$$\alpha_0 \varphi_0 + \alpha_1 (\beta_0 \varphi_0 + \beta_1 \varphi_1),$$

wo die β_0, β_1 noch vom Parameter der Transformationen abhängig seien können. Aber ausser dem Punkte (s_0, z_0) müssen dann noch alle diejenigen, von den φ_0 und φ_1 gemeinsamen Nullpunkten verschiedenen Punkte (s_1, z_1), (s_2, z_2), $\cdots$, in welchen Functionen der Schaar $\alpha_0 \varphi_0 + \alpha_1 \varphi_1$ in höherer als erster Ordnung verschwinden, in einander, also, da die Transformationen stetig aufeinanderfolgen, *in sich* übergehen. Solcher Punkte giebt es, wie man durch Einführung von $\frac{\varphi_1}{\varphi_0}$ als unabhängiger Variablen direct sieht, im Ganzen, (s_0, z_0) eingeschlossen:

$$2(p - 1 + \mu).$$

Von denselben fallen $\mu - 1$ an die Stelle (s_0, z_0). Von den übrigen Punkten können immer wieder höchstens je $\mu - 1$ an eine Stelle rücken, da die Gruppen von Nullpunkten der Functionen der Schaar $\alpha_0 \varphi_0 + \alpha_1 \varphi_1$ überhaupt nur je μ Punkte enthalten. Die festen Punkte (s_0, z_0), (s_1, z_1), $\cdots$ sind daher, wegen $p > 1$, $\mu < p + 1$, an mehr als 4 von einander getrennten Stellen von $f(s, z) = 0$ gelegen.

Es müssten somit bei allen *linearen* Transformationen, welchen $\alpha_0 \varphi_0 + \alpha_1 \varphi_1$ durch die Transformationen der Schaar unterworfen wird, auch mehr als vier Functionen von $\alpha_0 \varphi_0 + \alpha_1 \varphi_1$ *in sich* übergehen, d. h., da dies sonst nur bei zweien möglich wäre: *alle Functionen der Schaar* $\alpha_0 \varphi_0 + \alpha_1 \varphi_1$ *bleiben bei allen Transformationen unverändert.*

11′. Die sämmtlichen Transformationen könnten nach 10′. nur noch die $\mu (\mu > 1)$ Nullpunkte einer Function aus der Schaar $\alpha_0 \varphi_0 + \alpha_1 \varphi_1$ *unter einander* vertauschen. Da aber, wegen der Irreducibilität von $f(s, z) = 0$, die μ Punkte aus einer willkürlich herausgewählten Gruppe dieser Schaar alle *getrennt* liegen und die Transformationen, unter denen die Identität enthalten ist, *stetig* aufeinanderfolgen, so können die μ Punkte jeder Gruppe nur *in sich*, d. h. jedes Werthsystem von $f(s, z) = 0$ durch alle Transformationen der Schaar nur in sich übergeführt werden. Die in 8′. betrachtete Schaar reducirt sich somit für $p > 1$ auf die Identität.

Erlangen, October 1882.

Neue Beiträge zur Riemann'schen Functionentheorie.

Von

Felix Klein in Leipzig.

(Mit 2 lithographirten Tafeln.)

Es ist jetzt beiläufig ein Jahr, dass ich in dem Schriftchen*): „Ueber Riemann's Theorie der algebraischen Functionen und ihrer Integrale, eine Ergänzung der gewöhnlichen Darstellungen" (Leipzig, B. G. Teubner) eine Auffassung der Riemann'schen Theorie publicirte, bei welcher die Riemann'sche *Fläche*, als beliebig im Raume gegebene, geschlossene Fläche, den eigentlichen Ausgangspunkt abgab. Auf einer solchen Fläche existiren, wie ich dort durch physikalische Betrachtungen zeigte, gewisse Potentialfunctionen, und die Wechselbeziehungen zwischen letzteren sind es, welche, in die Sprache der Analysis übersetzt, die gewünschten functionentheoretischen Resultate ergeben. Die physikalischen Anschauungen sind dabei, wie ich in der Vorrede hervorhob, nur ein vorläufiges Aequivalent für strengere Ueberlegungen. Ich werde im ersten Abschnitte des Folgenden auf letztere so weit eingehen, dass der Leser im Stande ist, sich in der betreffenden Literatur mit Leichtigkeit zurecht zu finden.

Darüber hinaus beabsichtige ich im Folgenden zuvörderst (und zwar noch in demselben ersten Abschnitte) eine gewisse Weiterentwickelung des in Betracht kommenden Ideenkreises, auf welche ich übrigens an verschiedenen Stellen meiner Schrift bereits hinwies (pag. 61 – 63, etc.). Es handelt sich darum, den Begriff der Riemann'schen Fläche noch frei zu machen von gewissen Zufälligkeiten, die ihm vermöge der früheren Darstellungsweise anhaften. Statt uns die Riemann'sche Fläche als *geschlossen* vorzustellen, dürfen wir uns eine *berandete* Fläche, oder auch ein *Aggregat berandeter Flächenstücke* gegeben denken, wofern nur die verschiedenen Randcurvenstücke vermöge irgend eines Gesetzes einander paarweise so zugewiesen werden, dass *in abstracto* eine geschlossene Mannigfaltigkeit vorliegt.

*) Im Folgenden durchweg als R. Th. citirt.

Eine so berandete Fläche denke man sich nun, wie ich im zweiten Abschnitte des Folgenden erläutere, als Stück einer anderen, geschlossenen Fläche. Es ergiebt sich sodann ein wichtiges allgemeines Princip, welches ich als *Princip der analytischen Fortsetzung* bezeichne. Nur in speciellen Fällen kann dasselbe durch das von Hrn. Schwarz so genannte „Princip der Symmetrie" ersetzt werden. Ich particularisire diese Ideen, indem ich eine gewöhnliche Kugelfläche (oder Ebene) als Trägerin der berandeten Bereiche auffasse und die Zusammengehörigkeit der einzelnen Begrenzungskanten durch lineare Substitution vermittelt denke. Auf solche Weise entsteht der allgemeine Begriff von *Functionen mit linearen Transformationen in sich*, und ich gewinne den Uebergang zu den Betrachtungen des dritten und vierten Abschnitt's, in welchen es sich um die Theorie der *eindeutigen* Functionen dieser Art handeln soll.

Man kennt die lange Reihe glänzender Publicationen, durch welche neuerdings Hr. Poincaré die allgemeine Aufmerksamkeit auf diese Functionen gelenkt hat*). Ich meinerseits habe, mit ähnlichen Ideen bereits seit längerer Zeit beschäftigt, die Poincaré'schen Veröffentlichungen durch zwei Noten begleitet**), in denen ich bestimmte

*) Man sehe Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris t. 92 (1881, I) pag. 333, 395, 551, 859, 957, 1198, 1274, 1335, 1484, t. 93 (1881, II) pag. 93, 138, 301, 581, t. 94 (1882, I) pag. 163, 1038, 1166, sodann die Zusammenstellung in Math. Ann. Bd. XIX, pag. 553 – 564. Die ausgearbeiteten Abhandlungen sollen, wie ich höre, binnen Kurzem in dem neuen Mittag-Leffler'schen Journale erscheinen.

**) Math. Annalen XIX, pag. 565 – 568, sowie XX, pag. 49 – 51.

Was die Entstehung meiner diesbezüglichen Untersuchungen anlangt, so bemerke ich in Ergänzung früherer Angaben das Folgende:

1) Dass es zweckmässig sei, die allgemeinsten eindeutigen Functionen mit linearen Transformationen in sich in Betracht zu ziehen, und dass es vermöge dieser Functionen gelingen müsse, für beliebige algebraische Irrationalitäten dasselbe zu leisten, was bei $p = 1$ durch die elliptischen Functionen erreicht wird, erkannte ich im Sommer 1879 und habe ich damals in einer Vorlesung über elliptische Modulfunctionen meinen Zuhörern diese Gesichtspunkte entwickelt. Da ich aber damals noch nicht in der Lage war, bestimmte allgemeine Sätze aufzustellen, beschränkte ich mich in dem Aufsatze: *Zur Theorie der elliptischen Modulfunctionen* (Münchener Berichte vom Dec. 1879, oder auch Math. Annalen XVII, pag. 62—70), der die Grundgedanken jener Vorlesung wiedergiebt, auf Modulfunctionen in engerem Sinne, wählte aber die Darstellung so, dass die allgemeinsten eindeutigen Functionen mit linearen Transformationen in sich implicite mit in Betracht gezogen sind. Uebrigens schliessen sich an jene Vorlesung die ebenfalls hierher gehörigen Arbeiten meiner damaligen Zuhörer, der Herren Dyck, Gierster, Hurwitz an, wegen deren man Bd. XVII – XX dieser Annalen vergleichen mag; diese Arbeiten sind natürlich nicht ohne Rückwirkung auf mich geblieben.

2) Ausgangspunkt bei meinen damaligen Untersuchungen, wie überhaupt bei meiner Beschäftigung mit den elliptischen Modulfunctionen war zunächst meine eigene Bestimmung aller endlichen Gruppen linearer Substitutionen einer

Theoreme, welche für die *Anwendungen* der neuen Functionen von hervorragender Wichtigkeit sein dürften, formulirte. Es wird sich im Folgenden darum handeln, den allgemeinen Ideengang, der mich zu jenen Theoremen führte, in zusammenhängender und vervollständigter Form darzulegen. Zu diesem Zwecke betrachte ich im dritten Abschnitte eine verhältnissmässig umfassende Classe von eindeutigen Functionen mit linearen Transformationen in sich. Ich erläutere ausführlich ihre Art zu existiren, und gebe die Mittel an, um die zugehörigen linearen Substitutionen aus independenten Bestimmungsstücken zu construiren. Sodann formulire ich in Abschnitt IV ein allgemeines Theorem, welches ich seiner Wichtigkeit halber als *Fundamentaltheorem* bezeichne, und das die Resultate meiner beiden vorgenannten Noten als specielle Fälle in sich schliesst. Allerdings kann ich mich zum Beweise nur auf allgemeine Mannigfaltigkeitsbetrachtungen berufen. So sicher es wünschenswerth sein wird, die

---

Veränderlichen (Erlanger Berichte vom Juli 1874, sowie Math. Annalen IX, pag. 183—208, 1875), sodann insbesondere die im Folgenden noch oft zu citirende Arbeit von Hrn. Schwarz über die hypergeometrische Reihe (Borchardt's Journal Bd. 75, 1872). In letzterer wolle man namentlich pag. 317—319 beachten. Als ich dann später (Ostern 1881) den Gegenstand wieder aufnahm, sind namentlich Hrn. Schottky's Untersuchungen für mich von Wichtigkeit geworden; man vergl. dessen Abhandlung im 83. Bande von Borchardt's Journal (1876, 77), sowie seinen an mich gerichteten Brief im XX. Bande dieser Annalen, pag. 299—300. Auch ist mir die Correspondenz mit Hrn. Rausenberger, welcher von sich aus zur Inbetrachtnahme der neuen Functionen geführt worden war, von Anregung gewesen; man sehe dessen Arbeiten in Bd. XX und XXI der mathematischen Annalen.

3) Hrn. Poincaré's Untersuchungen, die vermuthlich bis zum Frühjahr 1880 zurückreichen, deren Publication sodann mit dem Februar 1881 beginnt, lernte ich erst im Juni 1881 kennen und habe ich seitdem mit Hrn. Poincaré in mannigfacher Correspondenz gestanden; man sehe z. B. dessen Mittheilung in den Comptes Rendus von 1881, I, pag. 1484 ff. Merkwürdigerweise hatte Hr. Poincaré, der seinerseits durch gewisse Entwickelungen des Hrn. Fuchs, über die ich mich weiter unten noch zu äussern haben werde, angeregt worden war, bis dahin die gesammte hier vorgenannte Literatur und wohl überhaupt jene specifische Functionentheorie, die von der Betrachtung der Riemann'schen Fläche ausgeht, nicht gekannt. Es kann daher nicht Wunder nehmen, dass seine ersten Publicationen vielfache Einzelheiten enthalten, welche von unserer Seite bereits publicirt waren.

4) Ich selbst bin erst Ostern dieses Jahres (1882) auf jenes merkwürdige Fragment aufmerksam geworden, welches sich unter XXV in Riemann's Nachlass abgedruckt findet und auf welches sich auch Hr. Schottky in seinem an mich gerichteten Briefe bezieht. Riemann nimmt dort geradezu dasselbe Problem in Angriff, welches Herr Schottky später ausführlich behandelt hat, und kommt wie dieser zu einer ausgedehnten Classe eindeutiger Functionen mit linearen Transformationen in sich. In vollkommenerer Weise konnte meine Behauptung von pag. 564 des XIX. Annalenbandes „dass es sich bei Untersuchungen im Sinne des Hrn. Poincaré um die weitere Durchführung von Riemann's allgemeinem functionentheoretischen Programme handle" wohl kaum bestätigt werden.

betreffenden Ueberlegungen genauer durchzuarbeiten, so glaube ich doch alle Punkte, welche bei einer strengen Beweisführung erledigt werden müssen, deutlich bezeichnet zu haben.

Vielleicht bringen die in Aussicht stehenden ausführlichen Abhandlungen des Hrn. Poincaré in dieser Hinsicht bereits die nothwendige Ergänzung. Die geometrische Denkweise bei Hrn. Poincaré, seine Anwendung des Continuitätsbegriffes etc. dürften den meinigen sehr nahe stehen*). Darüber hinaus aber hat Hr. Poincaré von Vornherein das *analytische Bildungsgesetz* der neuen Functionen mit Erfolg in Angriff genommen, auch versucht, bei gegebenen algebraischen Irrationalitäten zugehörige eindeutige Functionen mit linearen Transformationen in sich durch convergente Processe wirklich herzustellen.

Die *Schlussbemerkungen*, welche ich im fünften Abschnitte des Folgenden gebe, mögen für sich selbst sprechen. Indem ich die Tragweite erörtere, welche unser Fundamentalsatz nach verschiedenen Richtungen hin dürfte beanspruchen können, wünsche ich andere, vielleicht jüngere Mathematiker anzuregen, auf diesem aussichtsreichen Gebiete ihre Kräfte zu versuchen.

Noch darf ich hinzufügen, dass ich die Entwickelungen der Abschnitte I und II von Neujahr 1882 bis Ostern und diejenigen der Abschnitte III—V wenigstens der Hauptsache nach von Pfingsten dieses Jahres ab bis zum Schlusse des Sommersemesters in meinem Seminare zum Vortrag gebracht habe.

Uebersicht.

Abschnitt I. Ueber die allgemeinste Form der Riemann'schen Fläche und die Gruppirung der zugehörigen Existenzbeweise. Seite

§ 1. Allgemeiner Begriff der Riemann'schen Mannigfaltigkeit 146
§ 2. Rückübertragung auf die gewöhnliche Raumvorstellung. . 147
§ 3. Beispiele 149
§ 4. Berechnung der Zahl p 151
§ 5. Anderweitige geometrische Deutungen. 153
§ 6. Literarisches zum Dirichlet'schen Princip 155
§ 7. Ueber die directe Einführung der Periodicitätsmoduln . . 157
§ 8. Andere Gruppirung der Existenzbeweise. 160
§ 9. Berandete Flächen 163

*) So hat z. B. Hr. Poincaré genau so, wie ich es 1874 bei meiner Bestimmung aller endlichen Gruppen linearer Substitutionen einer Veränderlichen gethan habe, seinen ursprünglichen Ausgangspunkt in den Vorstellungsweisen der Nicht-Euklidischen Geometrie genommen.

Abschnitt II. Das Princip der analytischen Fortsetzung. Seite

§ 1. Erläuterung des Princips an einem Beispiele 164
§ 2. Der allgemeine Fall 165
§ 3. Verbesserte Auffassung des Princips. Reguläre und symmetrische Flächen 167
§ 4. Functionen mit linearen Transformationen in sich 169

Abschnitt III. Eindeutige Functionen mit linearen Transformationen in sich.

§ 1. Vorbemerkungen 170
§ 2. Ueber die geometrische Bedeutung der einzelnen linearen Substitution 171
§ 3. Der zur einzelnen Substitution gehörige Fundamentalbereich 173
§ 4. Functionen, welche bei der einzelnen Substitution ungeändert bleiben 175
§ 5. Stellung der Gruppentheorie 176
§ 6. Weitere Beispiele brauchbarer Gebietseintheilungen . . . 177
§ 7. Geometrischer Excurs zum vorigen Paragraphen 179
§ 8. Ueber die allgemeinsten von uns in Betracht zu ziehenden Gruppen mit reellem Hauptkreis 180
§ 9. Kanonische Zerschneidung der Riemann'schen Fläche (p, n) 183
§ 10. Der kanonische Fundamentalbereich in der η-Ebene . . 186
§ 11. Die Gruppirung der Fundamentalbereiche 187
§ 12. Ueber die zugehörige Substitutionsgruppe 190
§ 13. Umkehr der bisherigen Betrachtungen 193
§ 14. Die independenten Bestimmungsstücke der η-Function mit Hauptkreis 195
§ 15. Die Variation der Constanten, an einem Beispiele erläutert 197
§ 16. Der Process der Ineinanderschiebung 200
§ 17. Die neue η-Function auf der zugehörigen Fläche 202
§ 18. Constantenzahl des jeweiligen Normalfalls 205

Abschnitt IV. Das Fundamentaltheorem.

§ 1. Formulirung desselben 206
§ 2. Ansatz zum Beweise 208
§ 3. Hülfssatz betreffend die Eindeutigkeit der Beziehung . . . 209
§ 4. Continuitätsbeweis 211

Abschnitt V. Vergleich mit den elliptischen Functionen . . . . . 212—218

Abschnitt I.

Ueber die allgemeinste Form der Riemann'schen Fläche und die Gruppirung der zugehörigen Existenzbeweise.

§ 1.

Allgemeiner Begriff der Riemann'schen Mannigfaltigkeit.

Die Riemann'sche Fläche ist zuvörderst, wie schon bemerkt, und insbesondere in meinem Schriftchen, eine übrigens beliebige*), aber geschlossene Fläche des Raumes. Indem wir uns unter Zugrundelegung irgend welcher krummliniger Coordinaten p, q das Bogenelement $ds^2 = Edp^2 + 2Fdpdq + Gdq^2$ berechnet denken, leiten wir aus ihm die partielle Differentialgleichung für die auf unserer Fläche existirenden *Potentialfunctionen* ab:

$$(1) \qquad \partial \frac{\frac{F\frac{\partial u}{\partial q} - G\frac{\partial u}{\partial p}}{\sqrt{EG-F^2}}}{\partial p} + \partial \frac{\frac{F\frac{\partial u}{\partial p} - E\frac{\partial u}{\partial q}}{\sqrt{EG-F^2}}}{\partial q} = 0,$$

und es sind die Lösungen dieser partiellen Differentialgleichung, mit deren wechselseitigen Relationen sich die Riemann'sche Functionentheorie zunächst beschäftigt.

Die Verallgemeinerung nun, deren wir uns in der Folge zu bedienen haben, erwächst am natürlichsten, wenn wir zuvörderst Alles in der vorgenannten Definition enthaltene Geometrische abstreifen, um dasselbe später, je nach Bedürfniss, in umgeänderter Gestalt wieder einzuführen.

Statt einer geschlossenen Fläche werden wir uns also überhaupt eine zweidimensionale, geschlossene *Mannigfaltigkeit* vorstellen müssen, statt des Bogenelementes einen irgendwie gegebenen, auf jener Mannigfaltigkeit eindeutigen, definiten Differentialausdruck zweiten Grades.

Wir können sogar in der Verallgemeinerung noch einen Schritt weiter gehen. Die Differentialgleichung (1) bleibt ungeändert, wenn

*) Ich drücke mich an dieser Stelle in solch' unbestimmter Form aus, weil es keinen Zweck hat, bei der allgemeinen Exposition bereits zwischen analytischen Flächen oder solchen, die aus Stücken analytischer Flächen zusammengesetzt sind, etc. zu unterscheiden. Analoge Bemerkungen könnten im Folgenden wiederholt gemacht werden.

wir den Ausdruck für ds^2 mit einem beliebigen Factor multipliciren. Es ist diess das für zwei Dimensionen ckarakteristische Verhalten, welches zur Folge hat, dass Flächen, die conform auf einander abgebildet sind, für die Zwecke der verallgemeinerten, hier in Betracht kommenden Potentialtheorie einander gleichwerthig sind (R. Th. p. 19). Es ist daher für unsere Zwecke richtiger, überhaupt nicht von einem bestimmten ds^2, also einem Differential*ausdruck* zweiten Grades, zu sprechen, sondern nur von der Differential*gleichung* zweiten Grades $ds^2 = 0$.

Eine fernere Ueberlegung bezieht sich auf die Forderung, ds^2 solle *definit* sein. Wir werden hernach Beispiele anführen (§ 5. dieses Abschnittes), bei denen ds^2, allgemein zu reden, nur in einzelnen Bezirken der Riemann'schen Mannigfaltigkeit definit ist. Andererseits darf man sich eine Riemann'sche Mannigfaltigkeit selbst wieder mit complexen Elementen ausgestattet denken, wobei der Unterschied zwischen definiten und indefiniten Differentialausdrücken von Vorneherein als unwesentlich in Wegfall kommt. Doch erwähne ich hier Beides nur, um den allgemeinen Begriff so unabhängig wie möglich hinzustellen; im Speciellen werden wir fortan an der Forderung eines definiten ds^2 festhalten.

Es gilt nun, auf den so umschriebenen Begriff der allgemeinen Riemann'schen Mannigfaltigkeit alle die Sätze zu übertragen, welche in meiner Schrift speciell für die geschlossene Riemann'sche *Fläche* gewonnen wurden. Insbesondere also werden wir uns an die Vorstellung gewöhnen müssen, dass die auf solcher Mannigfaltigkeit existirenden eindeutigen oder nur durch Periodicität vieldeutigen Potentialfunctionen zu gewissen algebraischen Functionen und ihren Integralen in der l. c. dargelegten Beziehung stehen. Wir haben dann dasjenige Instrument, dessen wir uns im Folgenden zur Untersuchung der algebraischen Functionen und der mit ihnen zusammenhängenden Transcendenten bedienen wollen. In wie weit die hierbei zu Grunde gelegten Anschauungen zuverlässig richtig sind, wird sogleich noch näher erläutert werden.

§ 2.

Rückübertragung auf die gewöhnliche Raumvorstellung.

Ob es möglich ist, jede Riemann'sche Mannigfaltigkeit auf eine geschlossene Fläche unseres Raumes im gewöhnlichen Sinne *conform* zu übertragen, steht zuvörderst dahin; was wir darüber wissen, ist eben erst das Resultat der Riemann'schen Theorie. Dagegen ist von Vorneherein kein Zweifel, dass wir allemal die nächste Umgebung einer beliebigen (regulär vorausgesetzten) Stelle unserer Mannigfaltigkeit

auf ein *Stück* einer stetig gekrümmten Fläche, und sogar auf ein Stück der Ebene conform werden übertragen können. Es folgt diess aus bekannten Sätzen über die *Existenz* der Lösungen partieller Differentialgleichungen, hier also insbesondere der Gleichung (1), in der Nähe einer beliebigen Stelle.

Die auf solche Weise entstehenden *Flächencalotten* mit ihren Bogenelementen mögen wir dann geradezu an die Stelle der abstracten Riemann'schen Mannigfaltigkeit treten lassen. *Wir haben dann also statt letzterer ein Aggregat von beliebig vielen Flächenstücken, deren Randcurven in bestimmter Weise Punkt für Punkt paarweise zusammengehören.*

Zugleich verläuft, was wir eine Potentialfunction u auf der ursprünglichen Riemann'schen Mannigfaltigkeit benannten, auf diesem Flächenstück derart, dass es innerhalb des einzelnen Flächenstückes der auf letzteres bezüglichen Differentialgleichung des Potentials genügt (R. Th. p. 19), überdiess aber in den Randpunkten, in denen man von dem einen Flächenstücke zu einem anderen (oder auch nur zu einem anderen Theile desselben Flächenstückes) übergeht, gewisse *Randbedingungen* befriedigt. Um letztere bestimmt bezeichnen zu können, sei ds das Element der einen Randcurve, dn das Element der zugehörigen, nach dem Inneren des Flächenstückes gerichteten Normale. Dieselbe Bedeutung mögen $d\sigma$ und dv an der entsprechenden Stelle für die zweite Randcurve besitzen. Dann wird offenbar, unter ϱ einen von den Zahlen k, l unabhängigen Proportionalitätsfactor verstanden, die folgende Relation gelten:

$$\frac{\partial^{k+l} u}{\partial s^k \cdot \partial n^l} = (-1)^l \cdot \varrho^{k+l} \cdot \frac{\partial^{k+l} u}{\partial s^k \cdot \partial v^l}, \tag{2}$$

$$(k, l = 0, 1, \cdots, \infty),$$

und geben eben diese unendlich vielen Gleichungen das Gesetz, nach welchem eine auf der einen Flächencalotte verlaufende Potentialfunction über die Randcurve hinüber analytisch fortzusetzen ist.

Unsere Vorstellung soll nun im Folgenden geradezu die sein, dass wir uns statt der geschlossenen, abstracten Riemann'schen Mannigfaltigkeit ein Aggregat von Flächencalotten der beschriebenen Art, vielleicht auch nur eine einzelne Calotte mit zweckmässig zusammengeordneten Randcurven gegeben denken. Vermöge ihrer inneren Maassverhältnisse wird dann eine solche Calotte genau so gewisse Potentiale (und also complexe Functionen des Ortes) definiren, wie es in meiner Schrift (R. Th.) die geschlossene Fläche zu Wege brachte. *Und unsere Methode soll sein, geradezu aus der Gestalt geeigneter derartiger Bereiche ausgiebige Schlüsse auf das Verhalten gewisser Classen analytischer Functionen zu ziehen.*

Beispiele folgen sofort. Hier nur noch eine kleine Bemerkung. Wir brauchen in keiner Weise auszuschliessen, dass die Uebertragung der geschlossenen Riemann'schen Mannigfaltigkeit auf die Theilbereiche in *einzelnen Puncten* aufhört, conform zu sein. Um das betreffende Verhalten in einer alle Fälle einschliessenden Weise zu bezeichnen, mögen wir verabreden, dass wir die den Randlinien der Theilbereiche entsprechenden Querschnitte auf der geschlossenen Riemann'schen Mannigfaltigkeit jedenfalls durch alle solche Stellen hindurchlegen. Die Randcurven der entsprechenden Theilbereiche werden dann an der betreffenden Stelle eventuel eine Knickung zeigen, indem die aufeinanderfolgenden Elemente der Randcurve statt eines gestreckten Winkels einen anderen einschliessen. Die einfache Regel ist dann die, dass wir eine Potentialfunction an solcher Stelle regulär nennen, wenn sie, auf die ideale Riemann'sche Mannigfaltigkeit rückübertragen, auf letzterer regulär verläuft.

§ 3.

Beispiele.

In den Beispielen, die ich hier zu bringen habe, sowie überhaupt bei den Anwendungen, die ich im Folgenden beabsichtige, handelt es sich durchweg nur um *eine* Flächencalotte, und diese eine ist ein Ausschnitt aus der Ebene, bez. aus der Kugelfläche. Diese eine Calotte ist dann nichts Anderes, als dasjenige, was ich bei anderer Gelegenheit als *Fundamentalpolygon* *) bezeichnet habe. Sei mir dabei im Folgenden, weil vielfach von solchen behandelten Flächenstücken die Rede zu sein hat, welche Ecken überhaupt nicht besitzen, die kleine Abweichung gestattet, dass ich statt Fundamentalpolygon fortan *Fundamentalbereich* sage.

Erstes Beispiel. Als nächstliegendes Beispiel bietet sich das Parallelogramm der doppeltperiodischen Functionen. Indem die gegenüberliegenden Seiten des Parallelogrammes in einfachster Weise zusammen gehören, repräsentirt das einzelne Parallelogramm eine geschlossene Mannigfaltigkeit $p = 1$. Die Existenz der doppeltperiodischen Functionen und ihrer Integrale subsumirt sich also unter die allgemeine, auf beliebige Riemann'sche Mannigfaltigkeiten bezügliche, am Schlusse des § 1. formulirte Anschauung.

Zweites Beispiel. Ein zweites hier anzuführendes Beispiel, das mir immer besonders instructiv erschienen ist, giebt Riemann in Nummer 12 seiner Theorie der Abel'schen Functionen (pag. 114 der gesammelten Werke). Statt *eines* Parallelogrammes betrachtet dort Riemann deren p, übereinandergelegte, irgendwie gestaltete, welche

*) Zuerst Annalen XIV, pag. 133.

durch $(2p-2)$ Verzweigungspunkte und $(p-1)$ zwischen letzteren verlaufende Verzweigungsschnitte zu einem einheitlichen Ganzen verbunden sind. Jedesmal die gegenüberstehenden Seiten des einzelnen Parallelogrammes sind im gewöhnlichen Sinne zusammengehörig. Riemann macht l. c. selber den Schluss, dass auf einem solchen Fundamentalbereiche dieselben Functionen des Ortes existiren müssen, wie auf einer beliebigen geschlossenen Fläche desselben p.

Drittes Beispiel. In Beispiel 1) ist die geschlossene Riemann'sche Mannigfaltigkeit ausnahmslos conform auf den Fundamentalbereich übertragen. Dagegen tritt in Beispiel 2) eine Abweichung für die Conformität in den $(2p-2)$ Verzweigungspunkten ein; da aber in diesen Punkten die auf der idealen Riemann'schen Mannigfaltigkeit zwischen verschiedenen Fortschreitungsrichtungen gemessenen Winkel gerade verdoppelt werden, so ist es nicht nöthig, wie wir es im Uebrigen am Schlusse des vorigen Paragraphen verabredeten, die Randcurven unseres Fundamentalbereiches durch diese Stellen hindurchzulegen. Anders ist es mit dem nun zu gebenden dritten Beispiele. Es soll sich jetzt nämlich um denselben Fall handeln, den Hr. Schwarz im 72. Bande des Borchardt'schen Journals unter etwas anderem Gesichtspunkte behandelt hat. Sei in der Ebene einer complexen Variablen η zuvörderst ein *Kreisbogendreieck* mit den Ecken a_1, a_2, a_3 und den Winkeln $\frac{\pi}{l_1}$, $\frac{\pi}{l_2}$, $\frac{\pi}{l_3}$ gegeben. Ein solches Dreieck kann dann (wie Hr, Schwarz entwickelt) auf eine Halbebene z conform abgebildet werden, wobei man den Ecken a_1, a_2, a_3 noch drei beliebige Punkte der Begrenzung jener Halbebene, also etwa, wenn wir die Axe der reellen Zahlen als Begrenzung der Halbebene denken, $z = 0, 1, \infty$ entsprechen lassen kann. Ist diess geschehen, so folgt aus dem Princip der Symmetrie, dass der zweiten Halbebene z ein beliebiges der drei weiteren Kreisbogendreiecke entsprechend gesetzt werden kann, die sich aus dem ursprünglichen durch Inversion an einer seiner drei Kanten ergeben. Wir wählen als Inversionskreis etwa die Kante $a_2 a_3$ und nennen die Ecke, welche bei der Inversion dem Punkte a_1 entspricht, a_1'. So ist die Sache die, dass wir jetzt ein *Kreisbogenviereck* $a_1 a_2 a_3 a_1'$ vor uns haben und zugehörig eine Function z von η kennen, welche auf diesem Kreisbogenviereck jeden Werth einmal und nur einmal annimmt, sofern wir nämlich solche Begrenzungspunkte des Vierecks, die in Bezug auf den Kreisbogen a_2, a_3 symmetrisch sind, als identisch erachten. Diese Function z von η besitzt im Inneren des Vierecks weder Verzweigungspunkte noch Kreuzungspunkte, und auch nicht auf dem Rande des Vierecks, sofern wir die Eckpunkte ausnehmen. In letzteren aber verläuft nicht z, sondern beziehungsweise $z^{\frac{1}{l_1}}$, $(z-1)^{\frac{1}{l_2}}$, $\left(\frac{1}{z}\right)^{\frac{1}{l_3}}$ regulär.

Eben die Existenz der hiermit besprochenen Function s folgt nun bei der gegenwärtig zu entwickelnden Anschauung daraus, dass jenes Kreisbogenviereck $a_1 a_2 a_3 a_1'$ vermöge der Zusammengehörigkeit seiner Kanten als Fundamentalbereich eine geschlossene Mannigfaltigkeit vom Geschlechte $p = 0$ repräsentirt. Nur in den Ecken a_1, a_1' bez. a_2 und a_3 ist dabei die Beziehung zwischen der η-Ebene und der geschlossenen Mannigfaltigkeit eine nicht conforme. Auf jeder geschlossenen Mannigfaltigkeit vom Geschlechte Null giebt es eindeutige Functionen des Ortes, welche jeden Werth nur einmal annehmen (R. Th. pag. 66). Unter ihnen ist unser s inbegriffen und zwar einfach dadurch charakterisirt, dass es an den drei Stellen a_1 bez. a_1', a_2 und a_3 die Werthe $0, 1, \infty$ annimmt.

Diese Art, die Existenz der Function s aus dem Hauptsatze des § 1. abzuleiten, erscheint einfacher als das indirecte von Hrn. Schwarz gewählte Verfahren*). Allerdings hat das letztere sofort den Vorzug, wenn es sich darum handelt, s in der *unbegrenzten* Ebene η zu studiren. Denn während das Princip der Symmetrie unmittelbar ausreicht, um den Gesammtverlauf des so verstandenen s zu übersehen, müssten wir zu gleichem Zwecke das erst im folgenden Abschnitte zu entwickelnde Princip der analytischen Fortsetzung zu Hülfe nehmen, wir müssten also zwei Schnitte machen, wo das Verfahren des Hrn. Schwarz mit einem ausreicht.

Viertes Beispiel. An letzter Stelle will ich noch ein Beispiel betrachten, bei welchem der in Betracht zu ziehende Fundamentalbereich keinerlei Eckpunkte besitzt. Es seien in der η-Ebene irgend $2p$ geschlossene und mit keinen Singularitäten versehene, analytische Curvenzüge gegeben, welche zusammengenommen einen $2p$-fach zusammenhängenden Bereich abgrenzen. So oft wir dann diese Curvenzüge paarweise durch irgend ein analytisches Gesetz zusammenordnen, haben wir jedesmal eine geschlossene Riemann'sche Mannigfaltigkeit vom Geschlechte p vor uns. Auf ihr entsprechen jenen $2p$ Begrenzungscurven gewisse p, die Mannigfaltigkeit nicht zerstückende Rückkehrschnitte.

§ 4.

Berechnung der Zahl p.

Der Vollständigkeit halber stelle ich hier diejenigen Sätze zusammen, deren man sich zweckmässigerweise bedient, wenn man allgemein das Geschlecht p einer Riemann'schen Mannigfaltigkeit berechnen

*) Auch Hr. Dedekind erschliesst, Borchardt's Journal t. 83, pag. 274, die Existenz der fundamentalen elliptischen Modulfunction (die ein specieller Fall unseres s ist) aus dem Gesetz der Symmetrie.

will, die in Gestalt eines Fundamentalbereiches gegeben vorliegt. Die betreffenden Regeln sind in der zur Anwendung geeigneten Form wohl zuerst von Hrn. C. Neumann in seinen „Vorlesungen über Riemann's Theorie der Abel'schen Integrale" (Leipzig 1865) gegeben worden. Besitzt eine Fläche ν Randcurven und gestattet überdiess μ nicht zerstückende Rückkehrschnitte, so bezeichnet Hr. Neumann $2\mu + \nu$ als *Grundzahl* der Fläche*). Hinsichtlich der letzteren gelten nun die drei einfachen Regeln:

1) Jede Punktirung der Fläche, d. h. die Anbringung einer punktförmigen Oeffnung an irgend einer Stelle, erhöht die Grundzahl um 1;

2) Jeder in sich zurücklaufende Schnitt, den man auf der Fläche anbringen mag, lässt die Grundzahl ungeändert;

3) Jeder Querschnitt, d. h. ein Schnitt, der von Randpunkt zu Randpunkt läuft, erniedrigt die Grundzahl um eine Einheit.

Sei jetzt irgend ein Fundamentalbereich gegeben. Unter seinen Randcurven markiren wir zuvörderst diejenigen $2\nu'$, welche *keine* Eckpunkte besitzen. Die übrigen Randcurven zerlegen wir in ebenso viele Stücke, als sie Eckpunkte tragen. Die Gesammtzahl dieser Stücke sei $2n$. Sei ferner π die Anzahl derjenigen auf der Riemann'schen Mannigfaltigkeit zu unterscheidenden Stellen, denen Eckpunkte des Fundamentalbereiches entsprechen. Dann wird man von der geschlossenen Mannigfaltigkeit (deren Grundzahl gleich $2p$ ist) im Sinne der Analysis situs zum Fundamentalbereiche gelangen, indem man zuerst an jenen π Stellen Punktirungen ausführt, dann letztere durch n Querschnitte verbindet und endlich ν' Rückkehrschnitte hinzufügt. Bezeichnet man jetzt mit g die Grundzahl des Fundamentalbereiches, so kommt:

$$2p + \pi - n = g,$$

und diess ist die Formel zur Berechnung von p.

Es ist wohl kaum nöthig, die Formel an den Beispielen des vorigen Paragraphen noch besonders zu erläutern. Nur finde noch die Bemerkung ihre Stelle, dass die vorgenannten Regeln ungeändert erhalten bleiben, wie schon Hr. Neumann zeigte, wenn man statt einer Fläche ein aus N getrennten Flächen bestehendes System in's Auge fasst, und als Grundzahl des Systems $\Sigma g - 2N + 2$ gelten

*) Es ist diess dieselbe Zahl, welche von Hrn. Schläfli und mir bei späterer Gelegenheit als „ausserordentlicher Zusammenhang" oder auch als „Zusammenhang" schlechthin bezeichnet worden ist (vergl. z. B. mathematische Annalen VII, p. 550, Note). Riemann's „Zusammenhang" ist um eine Einheit grösser, sobald $\nu = 0$ ist. Die Riemann'sche Festsetzung erscheint aus früher dargelegten Gründen nicht zweckmässig. Da sie aber fast durchgängig im Gebrauche ist, so vermeide ich im Texte, wo immer von geschlossenen Flächen die Rede ist, den Ausdruck „Zusammenhang" überhaupt, wie ich es auch in meiner Schrift gethan habe.

lässt, wo die Summe über die Grundzahlen der einzelnen Bestandtheile zu nehmen ist. Diese Bemerkung würde zur Geltung kommen, wenn wir die Riemann'sche Mannigfaltigkeit, wie es in § 2. erläutert wurde, durch ein *Aggregat* von Flächencalotten sollten ersetzen wollen.

§ 5.

Anderweitige geometrische Deutungen.

Indem wir in § 2. die abstracte Vorstellung von der Riemann'schen Mannigfaltigkeit in die concrete eines geometrisch gegebenen Fundamentalbereiches übersetzten, benutzten wir die Anschauungsweise der gewöhnlichen analytischen Geometrie, insofern wir die Individua jener Mannigfaltigkeit durch *Punkte*, den adjungirten Differentialausdruck zweiten Grades durch das zugehörige *Bogenelement* versinnlichten. Es ist in keiner Weise meine Absicht, allgemeinere Arten der geometrischen Deutung, die dem Functionentheoretiker Schwierigkeit bereiten könnten, im Folgenden zu verwenden*). Wohl aber sei es dem Geometer gestattet, auf die *Möglichkeit* solcher Deutungen hier beiläufig hinzuweisen. Einmal nämlich zweifele ich nicht, dass man im Laufe der Zeit, je mehr sich functionentheoretische und geometrische Anschauungen durchdringen werden, von solchen Vorstellungsweisen allgemeinen Gebrauch machen wird. Andererseits ist diess die Stelle, an der die *„neuen Riemann'schen Flächen"*, wie ich sie bei Gelegenheit einführte**), systematisch einzuordnen sind (siehe auch R. Th. p. 61—63).

Um mit den letzteren zu beginnen, so bezeichnete ich als die zu einer Curve gehörige Riemann'sche Fläche den geometrischen Ort derjenigen Punkte der Ebene, von denen aus sich imaginäre Tangenten an die Curve legen lassen, — wobei jeder Punkt so oft zu zählen ist, als die Anzahl dieser Tangenten angiebt. Hat die Curve, wie hier angenommen sei, eine Gleichung mit reellen Coefficienten, so wird jeder Theil der Ebene von einer nothwendig paaren Anzahl von Blättern überdeckt und diese Blätter gehören paarweise als „conjugirte" zusammen. Wie eine derartige Fläche im Allgemeinen gestaltlich verläuft, wurde bei früheren Gelegenheiten ausführlich discutirt. Dagegen wurde nur erst beiläufig des Differentialausdruckes zweiten Grades gedacht, der nun an die Stelle des Bogenelementes tritt (siehe Annalen IX, pag. 31, Fussnote). *Derselbe stellt gleich Null gesetzt die imaginären Richtungen derjenigen beiden von dem einzelnen Punkte aus an die Curve verlaufenden Tangenten dar, welche durch den Punkt selbst*

*) Daher wird der gegenwärtige Paragraph beim Studium vorliegender Arbeit überschlagen werden können.

**) Mathematische Annalen VII und X.

versinnlicht werden, sofern man ihn in dem eben herausgegriffenen Blatte unserer Fläche, oder aber im conjugirten Blatte, gelegen denkt. Die hiermit gegebene Deutung durch eine doch nur auf willkürlichem Wege zu erreichende absolute Fixirung des Differentialausdruckes vervollständigen zu wollen, hat für die Riemann'sche Theorie, wie in § 1. bemerkt wurde, keinerlei Zweck. *Auch haben wir hier einen Fall, in welchem der zur Verwendung kommende Differentialausdruck zweiten Grades keineswegs durchweg definit zu sein braucht.* Denn wenn unsere Curve reelle Züge besitzt, so rücken zwei der bezeichneten imaginären Richtungen, sobald man von der concaven Seite her auf den reellen Zug zuschreitet, in eine reelle zusammen, um darüber hinaus in zwei getrennte reelle Richtungen verwandelt zu sein. Die einfachste Vorstellung ist dann (siehe l. c.), dass längs des reellen Curvenzuges zwei Blätter unserer Fläche vermöge einer *Falte* verbunden sind. —

Die Punkte der hier in Rede stehenden Riemann'schen Flächen versinnlichen in erster Linie die imaginären *Tangenten* unserer Curve. Ebensowohl würde man die imaginären Punkte der Curve (indem man dualistische Uebertragung eintreten lässt) durch ein geeignetes Aggregat von geraden Linien repräsentiren können. Ein solches Aggregat bietet der unmittelbaren Vorstellung einige Schwierigkeit, aber theoretisch genommen ist es ebensowohl als Versinnlichung der Riemann'schen Mannigfaltigkeit zu gebrauchen, wie die von den Punkten gebildete Fläche.

Ich möchte hier noch ein weiteres Beispiel geben, welches das hiermit besprochene dualistische Gegenstück der soeben betrachteten Riemann'schen Flächen als speciellen Fall umfasst. Man nehme eine beliebige Liniencongruenz (von ∞^2 Linien). Dass auch auf solche Mannigfaltigkeiten die Begriffe der Analysis situs anwendbar sind, erläuterte ich bereits Annalen IX, pag. 480—482. Hier haben wir hinzuzufügen, dass jede solche Liniencongruenz eo ipso einen Differentialausdruck zweiten Grades mit sich führt, der freilich nicht absolut fixirt ist; es ist derjenige, welcher gleich Null gesetzt aussagt, dass zwei aufeinanderfolgende Strahlen der Congruenz sich schneiden*). Giebt es nun innerhalb der Congruenz einen Bereich, in welchem sich *reelle* auf einanderfolgende Strahlen überhaupt nicht treffen können, in welchem also jener Differentialausdruck definit ist, so repräsentirt uns derselbe, indem wir die Strahlen als Individua gelten lassen, ein Stück einer Riemann'schen Mannigfaltigkeit.

*) Ich möchte hier beiläufig auf die neuerdings erschienene Dissertation von Hrn. Koenigs (Sur les propriétés infinitésimales de l'espace réglé, Paris, 1882, Annales de l'Ecole Normale Supérieure) aufmerksam machen. In derselben werden gewisse Ideen, welche von Hrn. Lie und mir im fünften Bande dieser Annalen betreffs des im Texte erwähnten Differentialausdruckes zweiten Grades entwickelt worden sind, auf's Neue aufgenommen und zum Theil weiter geführt.

Das Strahlensystem kann nun insbesondere das Secantensystem einer Raumcurve sein. Der einzelne Strahl vertritt dann geradezu, indem er doppelt zählt, die beiden Punkte, in denen er der Curve begegnet. Jene Differentialgleichung lässt sich jetzt einfacher dahin interpretiren, dass sie den Fortschritt zu solchen benachbarten Strahlen bedeutet, welche mit dem gegebenen einen Curvenpunkt gemein haben. Und hieraus nun erwächst das oben erwähnte dualistische Seitenstück zu meinen „neuen" Riemann'schen Flächen, wenn man die Raumcurve in eine ebene Curve degeneriren lässt. — Ich möchte mir vorbehalten, diese Betrachtungen bei Gelegenheit weiter zu verfolgen.

§ 6.

Literarisches zum Dirichlet'schen Princip.

Wollte man, wie es Riemann gethan hat, das von ihm sogenannte Dirichlet'sche Princip als Beweisgrund gelten lassen, so wäre es leicht, den allgemeinen Satz des § 1. für beliebige Riemann'sche Mannigfaltigkeiten oder auch direct für die Fundamentalbereiche der §§ 2., 3. zu beweisen. In der That verfährt Riemann so in Nr. 12 seiner Abel'schen Functionen bei dem oben (§ 3.) an zweiter Stelle aufgeführten Beispiele.

Es ist hier nicht der Ort, um die Gründe, welche gegen die Beweiskräftigkeit des Dirichlet'schen Princips sprechen, zusammenzustellen, so sehr ich eine solche Zusammenstellung im Interesse des lernenden mathematischen Publikums für nützlich erachten würde. Auch brauche ich hier nicht auseinanderzusetzen, warum solche physikalische Anschauungen, wie ich sie in meiner Schrift verwandte, in rein mathematischen Fragen nur den Werth *heuristischer* Methoden haben. Man beachte übrigens, dass diese physikalischen Anschauungen bei den allgemeinen in § 2. eingeführten Fundamentalbereichen nur in sehr gezwungener Weise würden festgehalten werden können.

Dagegen wünsche ich hier über die einschlägigen Untersuchungen der Herren C. Neumann und Schwarz kurzen Bericht zu erstatten, insofern ich glaube, dass dieselben lange nicht hinlänglich gekannt und nach ihrer Wichtigkeit gewürdigt sind. Es ist kein Zweifel, dass diese Untersuchungen in allen Fällen der Anwendung geeignet scheinen, das Dirichlet'sche Princip zu ersetzen und dass vermöge derselben insbesondere der allgemeine Satz von den auf den Riemann'schen Mannigfaltigkeiten existirenden Potentialfunctionen als strenge begründet erachtet werden kann. Und Dieses ist für uns hier die Hauptsache. Mag der von den genannten Autoren gelieferte Beweisgang noch so umständlich sein, in ihm liegt die Berechtigung, jenen Fundamentalsatz zu benutzen und mit ihm als einem Instrumente, überall wo es nützlich scheint, zu arbeiten.

Die Untersuchungen der genannten Autoren laufen vielfach parallel*). Beide beginnen damit, für Stücke der *Ebene*, und also das logarithmische Potential im engeren Sinne, die sogenannte *Randwerthaufgabe* zu behandeln, d. h. zu zeigen, dass bei vorgegebenen Randwerthen sich auf jedem begrenzten Stücke der Ebene eine zugehörige, im Inneren des Stückes überall endliche und stetige Potentialfunction finden lässt. Hr. Neumann entwickelt zu dem Zwecke eine besondere Näherungsmethode, die von ihm sogenannte *Methode des arithmetischen Mittels*, welche für solche Bereiche, die eine durchaus convexe Begrenzungscurve haben, sowie für deren Ergänzungsbereiche, die gewünschte Potentialfunction direct herstellt. Hr. Schwarz dagegen beginnt mit Untersuchungen über *conforme Abbildung* und zeigt, dass gewisse, sehr allgemein gestaltete Bereiche sich auf andere conform übertragen lassen, für welche die Randwerthaufgabe auf Grund früherer Untersuchungen als erledigt angesehen werden kann. Beiden Autoren gemeinsam sind sodann gewisse *Combinationsmethoden*, vermöge deren es gelingt, die Randwerthaufgabe auch bei solchen Bereichen durchzuführen, welche aus einer Anzahl von Stücken der früher behandelten Art durch Ueberlagerung entstehen.

Während nun Hr. Neumann vermöge der von ihm gewählten Ausgangspunkte in der Lage war, seine Untersuchungen auf den Raum, d. h. das Newton'sche Potential, auszudehnen (was für uns hier nicht weiter in Betracht kommt), hat Hr. Schwarz seine Aufmerksamkeit des Ferneren insbesondere denjenigen Erweiterungen zugewandt, welche Riemann zwecks seiner functionentheoretischen Untersuchungen der seiner Zeit üblichen Potentialtheorie hinzugefügt hat. Ich meine die Einführung vorgeschriebener Unendlichkeitsstellen oder linearer Unstetigkeiten (Periodicitätsmoduln), sowie die Betrachtung *geschlossener* Mannigfaltigkeiten, mögen diese nun mehrblättrig über der Ebene ausgebreitet sein oder als beliebig gekrümmte Flächen im Raume gelegen vorgestellt werden. Die Erläuterungen, welche Hr. Schwarz über

*) Ich nenne hier von den betr. Publicationen als besonders wichtig:

C. Neumann: Zwei Mittheilungen in den Berichten der k. sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften, vom 21. April und 31. October 1870 [zum Theil wieder abgedruckt in Bd. XI dieser Annalen, pag. 558 ff.]; sodann das ausführliche Werk:
Untersuchungen über das Logarithmische und Newton'sche Potential (Leipzig, Teubner 1877).

H. A. Schwarz: Zur Theorie der Abbildung (im Jahresbericht des Züricher Polytechnikums, 1869/70);
Ueber einen Grenzübergang durch alternirendes Verfahren, Züricher Vierteljahrsschrift, Juni 1870;
sowie eine längere Mittheilung an die Berliner Academie, siehe Monatsbericht vom 10. October 1870 (pag. 767—795 des betr. Bandes).

diese Fragen giebt (siehe die Abhandlung in den Berliner Monatsberichten von 1870) sind allerdings sehr knapp gehalten. Für geschlossene Flächen insbesondere erbringt er explicite nur den Nachweis, dass auf einer beliebigen, aus einer endlichen Anzahl sich nicht berührender analytischer Stücke zusammengesetzten Fläche *vom Geschlechte Null* vermöge der vorgenannten Combinationsmethoden ein überall eindeutiges Potential construirt werden kann, das einen einzigen, beliebig vorzugebenden algebraischen Unstetigkeitspunkt erster Ordnung besitzt. Alles Andere sind Andeutungen. Ich habe es, als ich mich zuerst mit diesen Untersuchungen beschäftigte, nicht ganz leicht gefunden, diese Andeutungen zu ergänzen, und glaube also, dass es manchem Mathematiker nicht unangenehm sein wird, wenn ich in den folgenden beiden Paragraphen hierauf eingehe. Und zwar bringe ich zunächst mit freundlicher Erlaubniss des Verfassers einen Brief von Hrn. Schwarz, in welchem derselbe auf meinen Wunsch seine Methode zur directen Einführung von Periodicitätsmoduln erläutert. Sodann entwickele ich in § 8., wie man in genauem Anschlusse an die physikalischen Betrachtungen meiner Schrift dasselbe Ziel erreichen kann, indem man für Mannigfaltigkeiten von beliebigem p direct nur die Existenz jenes eben erwähnten Potentials nachweist, das an beliebiger Stelle einen vorgegebenen einfachen algebraischen Unstetigkeitspunkt besitzt und übrigens eindeutig verläuft.

§ 7.

Ueber die directe Einführung der Periodicitätsmoduln.

Hr. Schwarz schreibt mir unter dem 1. Februar 1882:

„Sind die Unstetigkeiten, welche man einer Potentialfunction u auferlegen will, von der Art, dass bei der Ueberschreitung einer Querschnittlinie die Function um eine constante, vorgeschriebene Grösse sich ändern soll, so bedarf das Verfahren, welches in den Monatsberichten der Berliner Academie vom Jahre 1870 für die Einführung punctueller Unstetigkeiten eingehalten wurde (vergl. die beiden Beispiele Seite 788 — 790 und 792 — 794 daselbst) nur unerheblicher Modification, so lange der in Betracht zu ziehende Bereich noch *eine* Randlinie besitzt, längs welcher die Function u *vorgeschriebene* Werthe haben soll."

„Zunächst ist der Satz für einen zweifach zusammenhängenden Bereich T zu beweisen*). Durch Q_1 werde aus T der einfach zusammenhängende Bereich T_1, durch Q_2 — welcher Querschnitt mit Q_1

*) Wegen der Bezeichnungen und Ausdrucksweisen vergl. man durchweg den Aufsatz in den Berliner Monatsberichten, überdies die Figur 1 auf der hier beigegebenen ersten lithographirten Tafel. F. K.

keinen Punkt gemein haben darf, — gehe der Bereich T in den Bereich T_2 über. Man integrire für T_1 $\Delta u = 0$ unter der Bedingung: $u = 0$ am ganzen Rande, $u = 1$ an beiden Ufern des Querschnitts Q_1. Es sei q_2 das Maximum aller Werthe, welche u längs der ganz innerhalb T_1 liegenden Linie Q_2 annimmt. Ebenso integrire man $\Delta u = 0$ für das Innere von T_2 unter der Bedingung: $u = 0$ am ganzen Rande, $u = 1$ an beiden Ufern von Q_2. Es sei q_1 das Maximum der Werthe, welche u längs der ganz innerhalb T_2 liegenden Linie Q_1 annimmt. Sowohl q_1, als q_2 sind kleiner als 1."

„Es seien nun die Werthe von u längs der ganzen Begrenzung von T vorgeschrieben, längs Q_1 soll $(u^+ - u^-) = K$ sein."

„Man bestimme für den Bereich T_1 eine Function u_1, welche am Rande von T die vorgeschriebenen Werthe hat, am negativen Ufer von Q_1 irgend welche Werthe, am positiven Ufer die um K grösseren Werthe annimmt. Von dieser im Innern von T_1 der Differentialgleichung $\Delta u_1 = 0$ genügenden Function denke man sich die Werthe längs Q_2 bestimmt und integrire für T_2 die Differentialgleichung $\Delta u = 0$ durch eine Function u_2, welche längs des Randes von T die vorgeschriebenen Werthe annimmt (längs der Begrenzungstheile a und b muss natürlich $u_2 = u_1 - K$ sein), welche auf dem negativen Ufer von Q_2 mit $u_1 - K$, auf dem positiven mit u_1 übereinstimmt. Hierauf bestimme man für das Innere von T_1 eine Function u_3, so dass $\Delta u_3 = 0$, längs der Begrenzung von T $u_3 = u_1$, längs des negativen Ufers von Q_1 $u_3 = u_2$, längs des positiven Ufers $u_3 = u_2 + K$:

„Auf diese Weise fortschreitend bestimme man eine unendliche Reihe von Functionen $u_1, u_2, u_3, u_4 \cdots$, welche abwechselnd für das Innere von T_1 und das Innere von T_2 erklärt sind."

„Das Maximum (bezw. die obere Grenze) von $| u_1 - u_3 |$ d. h. des absoluten Betrages von $u_1 - u_3$ längs Q_1 sei g, so ist der absolute Betrag von $u_1 - u_3$ längs Q_2 sicher nicht grösser als $g \cdot q_2$, längs Q_2 ist aber $u_1 - u_3 = u_2 - u_4$ (und zwar auf beiden Ufern), folglich ist $u_2 - u_4$, da diese Differenz am ganzen Rande von T gleich Null ist, dem absoluten Betrage nach an keiner Stelle innerhalb T_2 grösser als $g \cdot q_2$, längs Q_1 jedenfalls nicht grösser als $g \cdot q_1 \cdot q_2$. Mithin ist $| u_3 - u_5 | \leqq g \cdot q_1 q_2$, $| u_4 - u_6 | \leqq g \cdot q_1 q_2^2$ u. s. w."

„Hieraus folgt zunächst, dass die Functionen u_{2n+1} sowohl, als auch die Functionen u_{2n} sich mit wachsendem Index zwei bestimmten Grenzfunctionen u' und u'' nähern, welche beziehlich für die Bereiche T_1 und T_2 erklärt sind und innerhalb dieser Bereiche die Differentialgleichung befriedigen. Längs der ganzen Begrenzung Q_1^+, a, Q_2^-, b des Theilbereiches T^* ist $u' = u'' + K$, es besteht daher diese Gleichung auch im Innern von T^*. Längs der ganzen Begrenzung des

Theilbereiches $T - T^*$ ist $u' = u''$, es besteht daher auch diese Gleichung im Innern von $T - T^*$."

„Setzt man aber $u = u'$ im Innern von T_1, so ist u'' die analytische Fortsetzung von u^- über Q_1 hinaus; diese Fortsetzung ist aber, wie bewiesen, innerhalb T^* gleich $u' - K$ d. h. gleich $u^* - K$, also ist die Function $u = u'$ die gesuchte."

„Es ist also der Satz für einen *zweifach* zusammenhängenden Bereich, für einen beliebig vorgeschriebenen Periodicitätsmodul und für beliebig vorgeschriebene (im Allgemeinen stetige) Randwerthe bewiesen."

„Unter der Voraussetzung der Gültigkeit des Satzes für einen *zweifach* zusammenhängenden Bereich kann man nun den analogen Satz für einen *dreifach* zusammenhängenden Bereich beweisen. Es sei T dreifach zusammenhängend. Man construire einen Querschnitt Q_1, durch welchen T in einen *zweifach* zusammenhängenden Bereich T_1 übergeht. Man construire einen zweiten Querschnitt Q_2, welcher durch continuirliche Gestaltänderung auf Q_1 reducirbar ist, der aber mit Q_1 keinen Punkt gemeinsam hat. Durch Q_2 gehe T in T_2 über."

„Nun kann man, dem bereits bewiesenen Satze zufolge, für die Bereiche T_1 und T_2 die Functionen $u_1, u_2, u_3, \cdots$ bestimmen, welche *einen* vorgeschriebenen Periodicitätsmodul bereits besitzen, und, genau dem vorher angegebenen Verfahren entsprechend, der Function u einen zweiten Periodicitätsmodul aufzwingen."

„So kann man fortfahren, so lange eben überhaupt noch *eine* Randlinie übrig bleibt, längs welcher die Function u *vorgeschriebene* Werthe annehmen soll."

„Will man aber auch diese letzte Randlinie fortschaffen, also zu einer geschlossenen Riemann'schen Fläche ohne Randlinien übergehen, so kann man nicht auf dieselbe Weise verfahren, weil man bezüglich des Beweises auf Schwierigkeiten stösst.

„Diese Schwierigkeit, welche mir anfänglich viele Mühe gemacht hat, habe ich auf folgende Weise überwunden."

„Aus der Riemann'schen Fläche T schneide man eine Kreisfläche mit dem Radius R_1 heraus, die in ihrem Innern keine singuläre Stelle besitzt. Die von T noch übrig bleibende Fläche möge mit T_1 bezeichnet werden. Diese Fläche, welche also jetzt eine Randlinie besitzt, gestattet die Anwendung des bewiesenen Satzes zweifellos. Zu dem Kreise mit dem Radius R_1 construire man nun einen concentrischen mit *grösserem* Radius R_2 und bezeichne das Innere dieses Kreises mit T_2. Die beiden Kreise mit den Radien R_1 und R_2 sollen in demselben Blatte von T liegen; es kann also immer erreicht werden, dass auch der grössere Kreis keine singuläre Stelle in seinem Innern enthält."

„Man nehme nun längs $r = R_1$ eine Werthenreihe beliebig an, z. B. $u = 0$ und bestimme für den Bereich T_1 eine Function u_1, welche am Rande $r = R_1$ gleich Null ist und an allen Querschnitten die vorgeschriebenen Periodicitätsmoduln besitzt. Eine solche Function existirt, lässt sich auch über den Rand von T_1 hinaus fortsetzen, aber von dieser Fortsetzung kann man keinen Gebrauch machen, weil dieselbe für $r < R_1$ nicht eindeutig und stetig bleibt (natürlich $\Delta u_1 = 0$)."

„Man bestimme hierauf für das Innere von T_2 eine Function u_2, welche längs $r = R_2$ mit u_1 übereinstimmt und für die $\Delta u_2 = 0$ ist. Hierauf bestimme man für das Innere von T_1 eine neue Function u_3, für welche $\Delta u_3 = 0$ ist, welche längs $r = R_1$ mit u_2 übereinstimmt, und welche im Innern von T_1 an allen Querschnitten die vorgeschriebenen Periodicitätsmoduln besitzt."

„Auf diese Weise fahre man fort."

„Genau dasselbe Verfahren, welches auf S. 792 dazu angewendet worden ist, der Function u eine algebraische Unstetigkeit aufzuzwingen, wird hier dazu benutzt, zu bewirken, dass die Grenzfunction, der die Functionen $u_1, u_3, \cdots$ mit wachsendem Index unendlich nahe kommen, in dem ganzen Innern des Bereiches T_2 sich eindeutig analytisch fortsetzen lässt."

„Von wesentlichem Einflusse auf die Beweisführung ist hierbei ein Hülfssatz, den ich im 74. Bande des Journals, Seite 232 erwähnt habe (Mitunter ist es nützlich u. s. w.)."

„Dieser höchst einfache Hülfssatz leistet in vielen Fällen sehr gute Dienste, besonders für den Fall geschlossener Bereiche."

„Hiermit glaube ich nun hinreichend angedeutet zu haben, wie ich mir etwa den Nachweis der Existenz der überall endlich bleibenden Integralfunctionen zurecht gelegt habe, auf den ich natürlich grosses Gewicht legen musste, wenn anders die von mir angewendete Schlussweise überhaupt geeignet sein sollte, die Sätze zu beweisen, welche Riemann gefunden und ausgesprochen aber eben nicht bewiesen hat." —

§ 8.

Andere Gruppirung der Existenzbeweise.

Um jetzt einen Augenblick auf die physikalischen Betrachtungen meiner Schrift zurückzugehen*), so gestaltete sich die Anordnung dort folgendermassen. Das *erste* Experiment, das ich als realisirbar voraus-

*) Niveaucurven des logarithmischen Potentials in der Ebene sind in neuerer Zeit auf physikalischem Wege durch Herrn Guébhard in ausgezeichneter Schönheit realisirt worden. (Comptes Rendus 1881, 82). Vielleicht gelingt es den Physikern auch, jene Curvensysteme, die ich in R. Th. auf beliebiger geschlossener Fläche betrachtete, experimentell herzustellen und dadurch dem näheren Studium

setzte, bestand darin, dass auf die mit leitendem Materiale bedeckte Riemann'sche Fläche an zwei Stellen die beiden Pole einer galvanischen Batterie aufgesetzt wurden. So entstand ein überall eindeutiges Potential mit zwei gegebenen, einander ergänzenden logarithmischen Unstetigkeitspunkten. Sodann liess ich, an *zweiter* Stelle, die beiden Pole der galvanischen Batterie zusammenrücken, zugleich aber die Intensität des elektrischen Stromes sich ins Unendliche steigern. Dadurch erhielt das nach wie vor überall eindeutige Potential einen einfachen algebraischen Unstetigkeitspunkt. Ein solcher Punkt besitzt eine *Axe* und ein *Moment*, *M*. Nennt man die geodätische Entfernung eines Punktes der Fläche von jenem Unstetigkeitspunkte r, und φ das Azimuth, unter welchem der geodätische Radius vector gegen die Axe geneigt ist, so ist, für sehr kleine Werthe von r, der Werth des in Rede stehenden Potentials $\frac{M \cdot \cos \varphi}{r}$. *Eben diese Art von Potential werde ich weiterhin als Elementarpotential bezeichnen, denn es zeigt sich, dass man durch Ueberlagerung von Elementarpotentialen alle anderen erzeugen kann.* — Endlich mein *drittes* Experiment! Ich traf eine derartige Anordnung, dass eine ganze Curve auf der Riemann'schen Fläche als Sitz einer elektromotorischen Kraft und zwar einer gleichförmigen elektromotorischen Kraft zu gelten hatte. Lief diese Curve von einem Endpunkte zu einem zweiten hin, so wurden diese Punkte einander ergänzende *Wirbelpunkte*. Das zugehörige Potential wird bei Annäherung an einen solchen Punkt dem von geeigneter Anfangsrichtung an gemessenen Azimuth φ proportional und ist also unendlich vieldeutig. Kehrt aber die Curve geschlossen in sich zurück, wobei man voraussetzen muss, dass die Riemann'sche Fläche, längs dieser Curve zerschnitten, nicht etwa in getrennte Theile zerfällt, so entstand ein *überall endliches* Potential. Dasselbe verläuft auf der Fläche durchweg stetig, gewinnt aber bei jeweiliger Ueberschreitung der benutzten Curve einen der elektromotorischen Kraft proportionalen Periodicitätsmodul, ist also ebenfalls unendlich vieldeutig.

Man erinnere sich nun einen Augenblick der Grundvorstellungen des Newton'schen Potentials. Jenem eindeutigen Potentiale mit zwei einander ergänzenden logarithmischen Unstetigkeitspunkten entspricht im Raume die Function

$$c\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}\right),$$

unter r, r' die geradlinigen Abstände von zwei festen Punkten verstanden. Unserer Elementarfunction aber correspondirt der Ausdruck:

---

zugänglich zu machen. — Auf die Controversen einzugehen, welche sich an die Guébhard'schen Versuche anschliessen, würde den Zweck dieses kurzen Hinweises überschreiten.

$$\frac{M \cos \varphi}{r^2},$$

das Potential des magnetischen Molecüls. Nun kann man aus letzterem das vorangeführte, $c\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}\right)$, erzeugen, indem man eine Reihe magnetischer Molecüle desselben Momentes M mit ihren Axen an einander reiht; es entspricht diess der Vorstellung, die wir uns von einem Linearmagneten zu machen pflegen. *Genau so wird man offenbar auf unserer Riemann'schen Fläche die eindeutige Potentialfunction mit zwei einander ergänzenden logarithmischen Unstetigkeitspunkten aus unserer Elementarfunction ableiten können.* — Aber die mathematische Physik kennt auch eine *Nebeneinander*stellung magnetischer Molecüle desselben Momentes. Man erhält vermöge derselben den Begriff der transversal magnetischen Fläche (Helmholtz) und construirt hierdurch unendlich vieldeutige Potentiale, für welche die Contour der transversal magnetischen Fläche eine Wirbellinie ist. *Genau so wird man auf unserer Riemann'schen Fläche die oben genannten unendlich vieldeutigen Potentiale erzeugen können, indem man jeden Punkt derjenigen Curve, die wir als den Sitz einer gleichförmigen elektromotorischen Kraft bezeichneten, nunmehr als Unstetigkeitspunkt eines Elementarpotentials betrachten, dessen Axe mit der zugehörigen Curvennormale zusammenfällt und dessen Moment einer infinitesimalen, dem Bogenelemente proportionalen Grösse gleich ist.*

Das Resultat dieser Betrachtungen ist sonach das folgende: *dass nämlich auf beliebiger Riemann'scher Mannigfaltigkeit* (also auch auf beliebig gegebenem Fundamentalbereich), *sobald erst die Existenz des Elementarpotentials festgestellt ist, alle anderen in meiner Schrift in Betracht gezogenen Potentialfunctionen durch Mittel der gewöhnlichen Analysis, nämlich durch bestimmte Integrale**), *hergestellt werden können.*

Die Existenz aber des Elementarpotentials auf beliebiger Riemann'scher Mannigfaltigkeit kann fast genau mit denselben Worten dargethan werden, mit welchen Hr. Schwarz pag. 792—794 seiner Abhandlung in den Berliner Monatsberichten den analogen Beweis für geschlossene Flächen vom Geschlechte Null geführt hat. Man hat sich nur zu erinnern, dass die nächste Umgebung jeder Stelle unserer Mannigfaltigkeit auf ein Stück der Ebene conform übertragen werden kann. Uebrigens wird auch bei dem Beweise des Hrn. Schwarz eigentlich nirgends darauf Bezug genommen, dass $p = 0$ sein soll. Hr. Schwarz betont den letzteren Umstand nur, um aus der Existenz des Elementarpotentials ein bestimmtes Theorem über conforme Abbildung abzuleiten.

---

*) Sofern es sich um die unbegrenzte *Ebene* handelt, hat bereits Hr. C. Neumann von derartigen Integralen ausgiebigen Gebrauch gemacht.

§ 9.

Berandete Flächen.

Um den Betrachtungen des § 8. einen gewissen Abschluss zu geben, bespreche ich noch kurz den Fall berandeter Flächen, wobei ich allerdings Nichts vorzubringen habe, was nicht den Specialforschern auf diesem Gebiete bekannt wäre*).

Bekanntlich führt man die Theorie berandeter Flächen nach dem Vorgange von C. Neumann (Borchardt's Journal, Bd. 59, 1861) auf die sogenannte Green'sche Function zurück**). Wir definiren dieselbe als eine auf der berandeten Fläche eindeutige Potentialfunction, welche an vorgegebener Stelle wie log. r für $r = 0$ unendlich wird und, überall sonst stetig verlaufend, am Rande den constanten Werth Null hat. Betrachtet man übrigens die Formeln, deren man sich z. B. bei Erledigung der Randwerthaufgabe bedient, genauer, so sieht man, dass es nicht sowohl die Green'sche Function ist, welche man benutzt, als ein Grenzfall derselben, der sich hinter dem nach der Normale eines Randpunktes genommenen Differentialquotienten der Green'schen Function verbirgt. Derselbe repräsentirt eine auf der berandeten Fläche überall sonst eindeutige und stetige, längs des Randes verschwindende Potentialfunction, welche in einem einzelnen Randpunkte eine einfache algebraische Unstetigkeit hat, deren Axe mit der zugehörigen Randnormale zusammenfällt. Eine gewisse Scheu, Potentialfunctionen am Rande selbst mit Unstetigkeiten auszustatten, mag davon abgehalten haben, diesem Grenzfall einen besonderen Namen beizulegen.

Es ist nun überraschend zu sehen, wie diese Begriffsbestimmungen sich in die allgemeinen des vorigen Paragraphen einordnen, *sobald wir die berandete Fläche, wie es u. A. in meiner Schrift zur Sprache kam, indem wir Vorder- und Rückseite derselben getrennt auffassen und längs der Begrenzungslinie verbunden denken****), *als einen besonderen Fall symmetrischer, geschlossener Flächen gelten lassen.* Will man die Potentialfunctionen, welche, auf der Vorderseite der berandeten Fläche verlaufend, längs des Randes den constanten Werth Null haben, auf

---

*) Vergl. z. B. das schon oben genannte Fragment XXV in Riemann's mathematischen Werken.

**) Ursprünglich hatte Hr. Neumann, indem er sich auf die Betrachtung ebener Bereiche beschränkte, von der im Texte genannten Function noch log. r in Abzug gebracht (unter r die geradlinige Entfernung von der Unstetigkeitsstelle verstanden). Die im Texte gegebene, übrigens schon von verschiedenen Autoren benutzte Definition, scheint zweckmässiger und muss jedenfalls dann verwandt werden, wenn man, wie hier beabsichtigt, die berandeten Flächenstücke beliebig gekrümmt im Raume verlaufend voraussetzen will.

***) Ich spreche hier nicht weiter von den in meiner Schrift gleichfalls in Betracht gezogenen Doppelflächen.

die Rückseite der Fläche analytisch fortsetzen, so braucht man nur die einzelnen Potentialwerthe (indem man vom Punkte der Vorderseite zum entsprechenden Punkte der Rückseite übergeht) im Vorzeichen umzukehren. So erweist sich dann die Green'sche Function als besonderer Fall jenes ersten, im vorigen Paragraphen betrachteten Potentials, welches zwei einander ergänzende logarithmische Unstetigkeitspunkte hat. Es ist nur *die* besondere Anordnung getroffen, dass jene beiden Unstetigkeitspunkte an correspondirenden Stellen der beiden Flächenseiten gelegen sind. *Jener Grenzfall der Green'schen Function aber* (auf den es, wie gesagt, eigentlich ankommt) *ist nichts Anderes als unsere Elementarfunction, mit der Maassgabe, dass man, um die Symmetrie der beiden Flächenseiten zu wahren, den Unstetigkeitspunkt auf den Rand und die zugehörige Axe in die Randnormale verlegt hat.*

So ergiebt sich also ein merkwürdiges Resultat. Die Theorie der geschlossenen Flächen kann bislang (§ 6) nur so behandelt werden, dass man die geschlossene Fläche aus einzelnen berandeten Stücken zusammensetzt. Umgekehrt aber gewinnt man die beste Einsicht in die Lehre von den berandeten Flächen, indem man letztere als speciellen Fall der geschlossenen Flächen auffasst.

Abschnitt II.

Das Princip der analytischen Fortsetzung.

§ 1.

Erläuterung des Princips an einem Beispiele.

Das allgemeine Princip, welches wir hier aufzustellen haben, ist an sich ausserordentlich einfach, und nur seiner *Wichtigkeit* halber wird ihm ein besonderer Abschnitt hier gewidmet. Dabei verlasse ich für die Folge die Ausdrucksweise der Potentialtheorie, spreche vielmehr, indem ich mir jedes Potential mit dem conjugirten in bekannter Weise vereinigt denke (R. Th. pag. 19), unmittelbar von den complexen Functionen des Ortes. Von den Functionen, die ich in meiner Schrift in Betracht zog, will ich hier der Kürze halber nicht die mit Periodicitätsmoduln sondern nur die eindeutigen in's Auge fassen, bei gegebenem Fundamentalbereiche also nur solche, die in zusammengehörigen Randpunkten übereinstimmende Werthe annehmen. Erinnern wir uns noch, dass eine complexe Function des Ortes völlig bestimmt ist, wenn wir ihre Werthe längs eines beliebig kleinen Linienstücks kennen.

Diess vorausgeschickt beginnen wir bei Darlegung unseres Princips, der vollen Deutlichkeit wegen, mit demselben Beispiele des einfachen

Parallelogramms, das auch in § 2 des vorigen Abschnitts vorangestellt wurde. Wir hatten damals nur ein einzelnes Parallelogramm betrachtet und dessen gegenüberstehende Kanten in einfacher Weise zusammengeordnet. Aber nun beachten wir, dass das Parallelogramm einen Theil der unbegrenzten Ebene ausmacht und wir das in Rede stehende Gesetz (die einfache Parallelverschiebung) als eine die ganze Ebene betreffende Operation auffassen können. Vermöge derselben legt sich neben unser erstes Parallelogramm ein zweites, ihm congruentes.

Zugleich modificiren wir in etwa unsere Auffassung. Statt unsere complexe Function des Ortes nur innerhalb des ersten Parallelogramms als bestehend vorauszusetzen, verfolgen wir dieselbe jetzt über das Parallelogramm hinaus in die unbegrenzte Ebene. Wir finden dann sofort: *dass unsere Function in dem neuconstruirten, anliegenden Parallelogramm dieselbe Werthvertheilung aufweist, wie in dem alten.* Denn das neue Parallelogramm liegt genau so gegen die Kante, welche ihm mit dem ersten gemeinsam ist, wie letzteres gegen seine gegenüberstehende Kante; in den entsprechenden Punkten beider Kanten nimmt aber unsere Function, nach Voraussetzung, identische Werthe an. —

Wir wiederholen nun den hiermit gemachten Schluss, indem wir das ursprüngliche Parallelogramm zunächst mit vier neuen Parallelogrammen umgeben, dann jedes von diesen abermals, und so weiter fort, bis die ganze Ebene in bekannter Weise mit einem Netz von Parallelogrammen überdeckt ist. In jedem dieser Parallelogramme verläuft unsere Function genau so, wie in jedem anderen. Um uns der gewöhnlichen Sprachweise zu bedienen, mögen wir die unbegrenzte Ebene als das Gebiet einer Variablen η betrachten. Dann haben wir als Resultat: *dass dieselben Functionen, welche wir als eindeutige Functionen des Ortes auf unserem Fundamentalbereich definirten, doppeltperiodische Functionen der Variablen η sind.* Dieser Satz darf natürlich sofort umgekehrt werden. Er enthält in einfachster Form, was wir jetzt als allgemeines Princip zu formuliren haben.

§ 2.

Der allgemeine Fall.

Um nun bei beliebig gegebenem Fundamentalbereiche einen ähnlichen Schluss machen zu können, genügt es offenbar, anzunehmen: dass derselbe ein *Stück* einer anderen, umfassenderen Riemann'schen Fläche sei*), und dass jene Operationen, welche die Kanten unseres Fundamentalbereichs zusammenordnen, als Transformationen der ganzen

*) Noch allgemeiner wäre es, auch diese Fläche wieder als Fundamentalbereich gegeben zu denken; doch mache ich davon in dieser Arbeit keine Anwendung.

Riemann'schen Fläche in sich selbst aufgefasst werden können. Vermöge jeder solchen Operation legt sich dann neben den ursprünglichen Fundamentalbereich ein neuer. Damit die Vorstellung des zu schildernden Processes den richtigen Grad der Allgemeinheit erreiche, wollen wir gleich erwähnen, dass dieser neue Bereich möglicherweise an irgend welchen Stellen über den alten hinübergreift oder auch Verzweigungspunkte in seinem Innern aufweist, die der alte nicht besass, etc. etc. Unabhängig davon gilt allemal der Satz: *dass jede complexe Function des Ortes, welche auf der durch den ersten Bereich versinnlichten Riemann'schen Mannigfaltigkeit eindeutig ist, auf jedem der Nachbarbereiche dieselbe Werthvertheilung aufweist, wie auf dem ursprünglichen.*

Um diese Behauptung in etwa zu zergliedern, sei η eine complexe Variable, deren wir uns bedienen, um den einzelnen Punkt auf unserer Riemann'schen Fläche zu bezeichnen. Sei ferner $\eta' = \varphi(\eta)$ diejenige Transformation, welche neben den ersten Fundamentalbereich einen zweiten legt, und also aus einer bestimmten Kante (K_1) desselben diejenige (K_2) macht, welche beiden Fundamentalbereichen gemeinsam ist. Sei nun $F(\eta)$ eine Function, für welche $F_{K_1} = F_{K_2}$ ist, d. h. welche in entsprechenden Punkten der beiden Kanten übereinstimmende Werthe annimmt. Man construire sodann die neue Function $F(\eta') = F(\varphi(\eta)) = F'(\eta)$, welche in dem neuen Fundamentalbereiche genau so verläuft, wie $F(\eta)$ in dem alten. Offenbar stimmen die Randwerthe F'_{K_2} mit den entsprechenden F_{K_1} überein. Aber letztere sind, wie gesagt, ihrerseits mit den F_{K_2} identisch. *Daher stimmen F und F' überhaupt längs der Kante K_2 überein und sind also dieselben Functionen.* Und eben diess behauptet in etwas anderer Ausdrucksweise unser Satz. —

Es gilt nun, sich die Gesammtheit der Bereiche, welche aus dem ersten durch fortgesetzte Reproduction entstehen, vorzustellen. Hierzu giebt das im vorigen Paragraphen behandelte Beispiel der doppeltperiodischen Functionen nur unvollkommene Anleitung. Bezeichnet man nämlich mit S_1 und S_2 die beiden Verschiebungen, vermöge deren sich neben das ursprüngliche Parallelogramm Nachbarparallelogramme legen, so ist $S_1 S_2 = S_2 S_1$. *Im Allgemeinen aber ist für eine solche Relation, oder überhaupt für irgend eine Relation zwischen den entsprechenden Operationen $S_1, S_2, \cdots, S_\nu$ gar kein Grund vorhanden.* Die Operationen $S_1, S_2, \cdots, S_\nu$, zusammen mit ihren inversen $S_1^{-1}, S_2^{-1}, \cdots, S_\nu^{-1}$, umgeben den ursprünglichen Fundamentalbereich mit einem Kranze von 2ν Bereichen. Combiniren wir nun irgend zwei der Operationen, z. B. $S_i S_k$, so heisst diess, dass wir zunächst auf den anfänglichen Bereich die Operation S_i anwenden, dann aber auf den so gewonnenen Bereich die Operation S_k (die ja nicht nur für die Punkte des ursprünglichen Bereiches, sondern über-

haupt für alle Punkte der Riemann'schen Fläche, die unsere Bereiche trägt, nach Voraussetzung Bedeutung hat). Wir erhalten also einen Bereich, welcher sich neben den anderen legt, der aus dem Anfangsbereiche durch S_k hervorgeht. — In ähnlicher Weise will jede Zusammenstellung der Symbole $S_1^{\pm}$, $S_2^{\pm}$, $\cdots$, $S_r^{\pm}$ gedeutet sein: jeder Zusammenstellung entspricht ein bestimmter Bereich, und auch umgekehrt (so lange wir eben keine Relationen zwischen den S voraussetzen) jedem Bereiche nur eine Zusammenstellung. Ich werde weiter unten auf diese Correspondenz zwischen Bereichen und Operationen noch genauer eingehen (Abschnitt III, § 11) und will hier nur noch auf Herrn Dyck's „Gruppentheoretische Studien" (Bd. XX dieser Annalen) verweisen, wo dieselben Verhältnisse in einer nur unwesentlich particularisirten Form mit besonderer Klarheit, aber allerdings etwas anderer Bezeichnung, besprochen sind.

Die Sache ist nun die, *dass unsere Function $F(\eta)$ sich auf allen diesen (im Allgemeinen unendlich vielen) Bereichen gleichförmig reproduciren wird.* Oder, wenn wir uns der Sprache der Analysis bedienen wollen und die Operationen S_1, S_2, $\cdots$, S_r uns durch entsprechende Formeln $\eta' = \varphi_1(\eta)$, $\eta' = \varphi_2(\eta)$, $\cdots$, $\eta' = \varphi_r(\eta)$ ersetzt denken: *Unser $F(\eta)$ genügt den Functionalgleichungen:*

$$F(\varphi_1(\eta)) = F(\varphi_2(\eta)) = \cdots = F(\varphi_r(\eta)) = F(\eta),$$

und natürlich den unbegrenzt vielen, die aus ihnen abgeleitet werden können.

Diese analytische Formulirung ist allerdings insofern minder vollkommen, als die geometrische, als F, φ im Allgemeinen äusserst vieldeutige Functionen von η sind und daher die vorstehenden Functionalgleichungen erst dadurch einen bestimmten Sinn bekommen, dass wir ausdrücklich festsetzen, sie sollen dem Uebergange jedesmal vom einen Bereiche zum Nachbarbereiche correspondiren.

Diess ist das Princip der analytischen Fortsetzung.

§ 3.

Verbesserte Auffassung des Princips. Reguläre und symmetrische Flächen.

Man kann innerhalb der Riemann'schen Theorie sozusagen drei Stufen der Entwickelung unterscheiden. Allemal wird der unabhängig Variabelen der gewöhnlichen Functionentheorie eine irgend wie verlaufende Riemann'sche Fläche (oder Mannigfaltigkeit) substituirt. Aber an Stelle der abhängig Veränderlichen tritt das einemal die einzelne (reelle) Potentialfunction u, das zweitemal die complexe Function des Ortes, $u + iv$, endlich das drittemal wieder eine Riemann'sche Fläche. Wo die gewöhnliche Analysis Abhängigkeiten zwischen zwei Variabelen hat, da haben wir jetzt eine conforme Beziehung zwischen zwei

Riemann'schen Flächen. Es werden also nicht sowohl zwei complexe Grössen, sondern direct zwei algebraische Gebilde in wechselseitige Abhängigkeit versetzt.

Indem wir hiervon Gebrauch machen, können wir sagen, dass unser Princip der analytischen Fortsetzung nichts Anderes ist, als eine Schilderung der allgemeinsten conformen Beziehung, welche zwischen zwei Riemann'schen Flächen, T_1 und T_2, bestehen kann. Wird T_1 in geeigneter Weise zerschnitten und beginnen wir mit einer von den vielleicht unendlich vielen, unterschiedenen Abbildungen, welche T_1 auf T_2 vermöge des vorausgesetzten conformen Zusammenhanges erfährt, so erscheint das Bild von T_1 als bestimmter Fundamentalbereich, d. h. als ein Bereich mit bestimmter Zusammengehörigkeit der Kanten, über T_2 (oder einen Theil von T_2) ausgebreitet. Die Sache ist dann die, dass es nicht nöthig ist, will man die übrigen Abbildungen von T_1 finden, auf T_1 selbst zu recurriren. Vielmehr genügt es, jenen ersten Fundamentalbereich ins Auge zu fassen und ihn auf T_2 durch analytische Fortsetzung ins Unbegrenzte zu reproduciren. Und dieses ist vielleicht der reinste Ausdruck unseres Princips. —

Indem wir von demselben Gebrauch machen, besprechen wir den besonderen Fall, *dass nämlich T_1 eindeutige Transformationen in sich selbst besitzen mag.* Es zerlegt sich dann T_1 in eine gewisse (vielleicht unendliche) Zahl kleinerer, unter sich äquivalenter Gebiete, und nun ist die Sache offenbar die, dass es genügt, auf T_2 *eine* Abbildung *eines* dieser Gebiete zu kennen, um aus ihr zunächst durch eine geeignete analytische Fortsetzung ein erstes Bild der ganzen Fläche T_1 und weiterhin alle solche Bilder zu erhalten.

Hierbei nun erinnere man sich der Auseinandersetzungen über eindeutige Transformationen einer Riemann'schen Fläche in sich, wie ich sie in meiner Schrift, pag. 69ff., gegeben habe. Neben die directen Transformationen, die man gewöhnlich allein betrachtet, stellen sich unter Umständen inverse, denen eine conforme Abbildung „mit Umlegung der Winkel" entspricht. Gestattet eine Fläche eine inverse Transformation, welche, einmal wiederholt, zur Identität zurückführt, so heisst die Fläche eine *symmetrische.*

Indem wir uns auf letztere Flächen beschränken, besagt unser allgemeiner Satz, *dass es genügt, auf T_2 nur eine Abbildung der einen symmetrischen Hälfte von T_1 zu kennen, um aus ihr durch analytische Fortsetzung den Gesammtverlauf der Abbildung zu finden.* Die Operationen $S_1, S_2, \cdots$, welche dabei zur Reproduction des Anfangsbereiches dienen, sind dann natürlich selbst von der inversen Art, welcher eine Abbildung von T_2 auf sich selbst mit Umlegung der Winkel entspricht.

So gelangen wir zum *Princip der Symmetrie* in seiner allgemeinsten Gestalt und erkennen zugleich seine Stellung gegen unser Princip der

analytischen Fortsetzung. Wo es am Platze ist, besagt es mehr als das letztere, denn es trägt eben der Symmetrie von T_1 Rechnung. Dafür kommt es aber auch nur bei symmetrischen Flächen T_1 zur Geltung.

§ 4.

Functionen mit linearen Transformationen in sich.

Die allgemeinsten Functionen mit linearen Transformationen in sich erwachsen aus den Betrachtungen des § 2, indem man die Functionen $\varphi_1(\eta)$, $\varphi_2(\eta)$, $\cdots$ einfach durch *lineare* Ausdrücke in η gegeben sein lässt. So war es in den Beispielen 1), 2), 3) des § 2 im vorigen Abschnitte, und auch das Beispiel 4) daselbst liefert uns Functionen mit linearen Transformationen in sich, wenn wir die damals nicht näher definirte Zuordnung der $2p$ Randcurven eben durch lineare Substitution vermittelt denken. In allen diesen Fällen ist eine Ebene η (oder eine Kugelfläche η, was auf dasselbe hinauskommt), die Trägerin der unbegrenzt vielen Reproductionen, und so wollen wir es auch in der Folge, da diese Annahme allgemein genug ist, voraussetzen.

Die angeführten Beispiele zeigen zugleich, dass Functionen mit linearen Transformationen in sich durchaus nicht *eindeutig* zu sein brauchen. Es ist diess erst eine neue, in den späteren Entwickelungen des vorliegenden Aufsatzes hinzutretende Bedingung. Erst durch sie gewinnt der Begriff von Functionen mit linearen Transformationen in sich eine engere Umgrenzung. Verzichtet man auf Eindeutigkeit, so gelingt es z. B. sofort, beliebig viele Functionen zu construiren, welche durch irgendwelche vorgegebene lineare Substitutionen in sich übergehen. Für die einzelne solche Substitution construire man nämlich einen Bereich, dessen Begrenzungslinien vermöge der Substitution zusammengeordnet sind. Ueberdiess treffe man die Anordnung so, dass alle diese Bereiche irgendwie über einander geschichtet erscheinen. Es genügt dann, diese Bereiche durch irgendwelche Verzweigungen zu einem einheitlichen Ganzen zu verbinden. Dann definirt uns das letztere, als Fundamentalbereich aufgefasst, zugehörige Functionen der gewollten Art.

Unter diesen allgemeinsten Functionen mit linearen Transformationen in sich nehmen nun wieder diejenigen eine besondere Stellung ein, deren Fundamentalbereiche auch *inverse* lineare Umformungen in sich selbst gestatten. Insbesondere kann es sein, dass man die Gesammtheit aller äquivalenten Bereiche erhält, indem man den *halben* Ausgangsbereich durch symmetrische Umformungen dieser Art (d. h. Umformungen von der Periode Zwei) reproducirt. Und hier ist es nun, dass die Functionen einzuordnen sind, welche die Herren Schwarz, Schottky u. A. (auch Riemann selbst) vermöge des Princips der Sym-

metrie studirt haben. Es giebt zweierlei Arten symmetrischer linearer Umformungen (R. Th. pag. 73). Beide erscheinen in der Ebene als Transformation durch reciproke Radien; aber das eine Mal hat man es mit einem reellen Inversionskreise, das andere Mal mit einem Kreise von imaginärem Radius zu thun. Von den genannten Autoren wurde durchweg nur die erste Art der Symmetrie benutzt. Daher erscheinen ihre Ausgangsbereiche (die halben Fundamentalbereiche) von a priori gegebenen Kreisbogen begrenzt. Insbesondere hat Herr Schwarz solche durchaus schlichte Ausgangsbereiche betrachtet, bei denen sich diese Kreisbögen zu *einem* Linienzuge zusammenfügen und das Geschlecht p des Fundamentalbereichs also den Werth Null hat. Darüber hinaus behandelt Hr. Schottky den allgemeineren Fall, dass der, auch wieder schlicht vorausgesetzte Ausgangsbereich, von mehreren Kreisbogenpolygonen umgrenzt sei. Das p des Fundamentalbereichs ist dann immer um eine Einheit kleiner, als die Zahl der Begrenzungscurven. Herrn Schottky's Figuren ergeben sich aus denen des Herrn Schwarz sozusagen durch den im folgenden Abschnitte (§ 16) zu besprechenden Process der Ineinanderschiebung.

Abschnitt III.

Eindeutige Functionen mit linearen Transformationen in sich.

§ 1.

Vorbemerkungen.

Nach den Entwickelungen des vorigen Abschnitts ist die Bestimmung speciell aller *eindeutigen* Functionen mit linearen Transformationen in sich sozusagen ein geometrisches Problem. Wir denken uns in der Ebene der complexen Variablen η einen übrigens beliebigen Fundamentalbereich abgegrenzt, dessen Begrenzungskanten wir paarweise durch gewisse lineare Substitutionen des η zusammenordnen, reproduciren dann diesen Bereich vermöge jener Substitutionen ins Unendliche und fragen, wie man in allgemeinster Weise die verschiedenen Bestimmungsstücke zu wählen hat, damit in der η-Ebene nirgends eine *mehrfache* Bedeckung durch die Fundamentalbereiche eintrete. — Die hier gewählte negative Ausdrucksweise soll dabei einschliessen, dass keineswegs die ins Unendliche vervielfältigten Fundamentalbereiche die ganze Ebene zu überdecken brauchen. Vielmehr werden sich im Allgemeinen *natürliche Grenzen* für die Vervielfältigung der Fundamentalbereiche einstellen, über welche hinaus dann auch die zugehörigen eindeutigen Functionen nicht können fortgesetzt werden.

Es gelingt mir im Folgenden nun nicht etwa und es ist auch nicht mein Zweck, das allgemeine, so präcisirte Problem in voller

Allgemeinheit zu erledigen. Vielmehr begnüge ich mich, von einer bestimmten Classe eindeutiger Functionen mit linearen Transformationen in sich (auf die sich dann auch das Fundamentaltheorem des Abschnitts IV zunächst beziehen soll) eine möglichst klare Vorstellung und scharfe Definition zu geben. Von dem Wunsche ausgehend, auch Denjenigen verständlich zu schreiben, welche sich noch nicht mit dieser Art von Functionen beschäftigt haben, gehe ich schrittweise und bespreche zunächst in den folgenden Paragraphen die übrigens wohlbekannten Functionen, welche bei Wiederholung einer einzelnen linearen Substitution ungeändert bleiben (§ 2—4), gebe sodann eine Uebersicht über gewisse weitere, einfache Fälle unserer Functionen, die bereits von anderer Seite oder bei früherer Gelegenheit ausführlich behandelt wurden (§ 5—7) und untersuche sodann insbesondere derartige Functionen, bei denen eine reelle Kreislinie die natürliche Grenze abgiebt (§ 8—14). Aus den so gewonnenen Functionen entstehen sodann durch Variation der Constanten (§ 15) sowie durch Ineinanderschiebung (§ 16) gewisse allgemeinere, denen zwei weitere Paragraphen gewidmet werden (§ 17—18); sie bezeichnen die Grenze, bis zu welcher die diessmalige Untersuchung vorschreitet. Ich will hier den Wunsch nicht unterdrücken, dass alle diese Dinge von anderer Seite mit grösserer Ausführlichkeit möchten durchgearbeitet werden, als es mir seither bei nur zu beschränkter Zeit möglich gewesen ist.

§ 2.

Ueber die geometrische Bedeutung der einzelnen Substitutionen.

Was hier über die Bedeutung der einzelnen linearen Substitutionen $\eta' = \frac{\alpha\eta + \beta}{\gamma\eta + \delta}$ gesagt werden soll, ist nachgerade ziemlich bekannt.*) Man wolle sich dabei die betreffenden Figuren jedesmal in der Ebene zeichnen; es ist dann aber nützlich, sich dieselben auf der Kugel vorzustellen. Denn auf der Kugel erscheinen solche Figuren, die wir als gleichberechtigt erachten müssen, auch dem ungeübten Auge viel leichter äquivalent, als in der Ebene.

Die erste Unterscheidung, welche wir zu machen haben, bezieht sich auf die sogenannten Fundamentalpunkte der Substitution, welche bei der Substitution ungeändert bleiben. Indem dieselben durch folgende quadratische Gleichung gegeben sind:

$$\gamma\eta^2 + (\delta - \alpha)\eta - \beta = 0,$$

*) Ich selbst habe diese Dinge z. B. schon im 9ten Bande dieser Annalen (p. 185 ff) in ähnlicher Form zur Sprache gebracht. Wegen der einzuführenden Benennung vergl. man Bd. XIV dieser Annalen, p. 122.

können dieselben entweder getrennt sein, oder, im besonderen Falle, zusammenrücken.

Wir beginnen mit dem allgemeinen Falle und legen durch die beiden Fundamentalpunkte hindurch ein erstes Kreisbüschel, welches ich als Büschel der *Meridiane* bezeichne. Sodann construiren wir das Büschel der hierzu orthogonalen Kreise, der *Breitenkreise*. Die Ebenen der Breitenkreise schneiden sich (im Raume gedacht) alle längs derjenigen Linie, welche, in Bezug auf die Kugel, die conjugirte Polare der Verbindungslinie der Fundamentalpunkte ist. Hierauf führen wir, statt η, eine neue Coordinate ζ derart ein, dass $\zeta = 0$ den einen, $\zeta = \infty$ den anderen Fundamentalpunkt bezeichnet. Setzen wir $\zeta = re^{i\varphi}$, so wird $\varphi = \text{Const.}$ die Gleichung der Halbmeridiane, $r = \text{Const.}$ die Gleichung der Breitenkreise sein. Auf dieses kanonische Coordinatensystem bezogen muss jetzt unsere Substitution nothwendig folgende Gestalt annehmen:

$$\zeta' = \frac{\varrho_1}{\varrho_2} \cdot \zeta,$$

wo ϱ_1, ϱ_2 die beiden Wurzeln der quadratischen Gleichung bezeichnen:

$$\begin{vmatrix} \alpha - \varrho & \beta \\ \gamma & \delta - \varrho \end{vmatrix} = 0.$$

Und nun unterscheide ich, indem ich $\frac{\varrho_1}{\varrho_2} = Re^{i\alpha}$ setze, drei Fälle.

Im ersten Falle sei $R = 1$. Dann bleiben, wie ersichtlich, bei der Transformation alle Breitenkreise ungeändert, die Meridiane aber vertauschen sich in der Art unter sich, dass $\varphi = \text{Const.}$ in $\varphi = \text{Const.} + \alpha$ verwandelt wird. Diess ist, was ich als *elliptische* Substitution bezeichne. Die elliptische Substitution ist *periodisch*, wenn α mit 2π commensurabel ist; ist α einem ganzzahligen Theile von 2π gleich, so nenne ich die Substitution gelegentlich *primitiv*.

Im zweiten Falle nehmen wir $\alpha = 0$. Dann bleiben umgekehrt die Meridiane ungeändert erhalten, die Breitenkreise aber vertauschen sich unter einander, indem $r = \text{Const.}$ durch $r = R \cdot \text{Const.}$ ersetzt wird. Ich nenne dann die Substitution eine *hyperbolische*.

Der dritte Fall, in welchem $R \gtrless 1$, $\alpha \gtrless 0$ ist, wird am Besten verstanden, wenn wir ihn durch eine Aufeinanderfolge einer elliptischen und einer hyperbolischen Substitution ersetzt denken. Ein Punkt: $\zeta = re^{i\varphi}$ ist nach der Transformation in $\zeta = rR \cdot \varepsilon^{i(\varphi+\alpha)}$ übergegangen. Daher bleiben bei unserer Transformation die Curven:

$$\alpha \cdot \log r - \varphi \cdot \log R = \text{Const.}$$

ungeändert. Diese Curven sind die gleichwinkeligen Trajectorien unserer Meridiane (oder Breitenkreise). Daher spreche ich im vorliegenden

Falle von einer *loxodromischen* Substitution. Eine loxodromische Substitution ist ebenso, wie eine hyperbolische, nothwendig aperiodisch. —

Betrachten wir nun den Grenzfall, in welchem die beiden Fundamentalpunkte der Substitution zusammenfallen! Die Meridiane haben sich dann in solche Kreise verwandelt, welche einander im Fundamentalpunkte berühren. Aber die Breitenkreise, sowie die Schaaren zusammengehöriger Loxodromen haben ihrerseits (wie man mit Leichtigkeit findet) je das Nämliche gethan, *so dass also der specifische Unterschied zwischen den dreierlei Curvenarten in Wegfall kommt.* Wir verstehen die Transformation am Besten, indem wir die Kugel vom Fundamentalpunkte aus auf die gegenüberstehende Tangentialebene projiciren. Die Meridiane verwandeln sich dann in Parallelgerade der Ebene, ebenso die Breitenkreise etc. Sei ζ eine solche lineare Function von η, welche im Fundamentalpunkte unendlich wird. Dann schreibt sich unsere Substitution $\zeta' = \zeta +$ Const. und ist also durch eine blosse *Parallelverschiebung* der Ebene versinnlicht. — Ich nenne diesen (nothwendig wieder aperiodischen) Grenzfall den Fall der *parabolischen* Substitution.

§ 3.

Der zur einzelnen Substitution zugehörige Fundamentalbereich.

Um überhaupt Functionen mit linearen Transformationen in sich zu erhalten, betrachteten wir im vorigen Abschnitte übrigens beliebige Fundamentalbereiche, deren Randcurven allein durch die vorgegebenen Substitutionen paarweise zusammengeordnet werden mussten. Nun aber wir uns hier auf *eindeutige* Functionen jener Art beschränken, ist die Willkürlichkeit des Fundamentalbereichs eine wesentlich geringere geworden. *Offenbar darf derselbe jetzt in seinem Innern keine zwei Punkte enthalten, welche vermöge der zugehörigen linearen Substitutionen oder irgend einer aus ihnen zusammenzusetzenden Substitution äquivalent sind.*

Es sei jetzt eine einzelne lineare Substitution vorgelegt. So werden wir zuvörderst die Gruppe linearer Substitutionen bilden, die aus ihr durch positive oder negative Wiederholung hervorgeht, und die Gesammtheit der Lagen aufzufassen suchen, welche ein beliebiger Punkt vermöge der Substitutionen der Gruppe annimmt. Dann werden wir uns diesen Punkt beweglich denken und uns fragen, welchen möglichst grossen Bereich derselbe überstreichen mag, ehe er an solche Stellen gelangt, die mit Stellen, welche er früher bereits eingenommen hatte, äquivalent sind. Die Untersuchung zeigt, dass dieser Bereich von unwesentlichen Verzerrungen abgesehen, jedesmal vollkommen bestimmt ist. *Zu der einzelnen linearen Substitution gehört daher, in dem hier in Betracht*

kommenden Sinne, jedesmal nur ein Fundamentalbereich (den wir dann durch die zugehörige Substitution bezeichnen können).

Sei unsere Substitution zuvörderst eine *elliptische*. So ist deutlich, dass dieselbe jedenfalls eine *periodische* sein muss, wenn der zugehörige Fundamentalbereich, wie wir es doch verlangen müssen, eine endliche Ausdehnung haben soll. Denn anderenfalls überdecken die Punkte, welche aus einem beliebig angenommenen durch fortgesetzte Wiederholung der Substitution entstehen, in immer dichter werdender Aufeinanderfolge einen ganzen Breitenkreis. Wir können überdiess annehmen, dass unsere Substitution *primitiv*, d. h. in der Gestalt

$$\zeta' = e^{\frac{2i\pi}{l}} \cdot \zeta$$

darstellbar sei, unter l eine ganze Zahl verstanden. Denn die Gruppe, welche aus den Wiederholungen unserer periodischen Substitution erwächst — und auf diese *Gruppe* kommt es jetzt bei unseren neuen Ueberlegungen wesentlich an — kann immer auch durch Wiederholungen einer primitiven Substitution erzeugt werden. *Den Fundamentalbereich aber, der zu der vorgenannten primitiven Substitution zugehört, erkennt man sofort.* Er ist einfach eine *Sichel* von der Winkelöffnung $\frac{2\pi}{l}$, welche sich, von geeigneten Halbmeridianen begrenzt, vom Punkte $\zeta = 0$ zum Punkte $\zeta = \infty$ hinzieht. Die unwesentlichen Aenderungen, welche man an diesem Bereiche noch anbringen kann, bestehen nur darin, dass man den einen Halbmeridian unter Festhaltung seiner Endpunkte verdrehen oder auch innerhalb gewisser Grenzen verzerren kann, sofern nur mit dem anderen Halbmeridian genau die entsprechende Aenderung vorgenommen wird.

Wir betrachten ferner die *parabolische* Substitution $\zeta' = \zeta + \text{Const.}$ So bietet sich sofort als zugehöriger Fundamentalbereich in der Ebene ein *Parallelstreifen*, den wir uns der Einfachheit halber geradlinig begrenzt vorstellen können. Wollen wir auf die Kugel übertragen, so haben wir jetzt *eine Sichel von der Winkelöffnung Null, deren beide Ecken in den Fundamentalpunkt der Substitution zusammenfallen.*

Bei der *hyperbolischen* Substitution $\zeta' = R \cdot \zeta$ oder der *loxodromischen* $\zeta' = Re^{i\alpha} \cdot \zeta$ wird die Sache insofern anders, als der zugehörige, im Wesentlichen wieder bestimmte Fundamentalbereich *zweifach* zusammenhängend ist. Wir werden jetzt nämlich als Fundamentalbereich etwa den *ringförmigen Raum* erachten, der zwischen zwei Breitenkreisen $r = \text{Const.}$ und $r = R \cdot \text{Const.}$ eingeschlossen ist. Der Unterschied zwischen den zweierlei Substitutionen ist dabei nur der, dass bei den hyperbolischen Substitutionen solche Punkte der beiden Breitenkreise zusammengeordnet erscheinen, welche auf demselben Halbmeridiane liegen, während bei der loxodromischen Substitution

die beiden Kreise gegen einander sozusagen verdreht erscheinen. — Ich unterlasse es zu schildern, wie man den so eingeführten Bereich durch Verzerrung der Begrenzungscurven noch modificiren kann. —

Dagegen möchte ich durch die hierhergehörigen Figuren 2) und 3) der lithographischen Tafel dazu veranlassen, sich die verschiedenen Gestalten vorzustellen, unter denen sich die zuvörderst auf der Kugel gedachten Fundamentalbereiche bei verschiedener stereographischer Projection auf die Ebene übertragen. So stellt Figur 2 eine Sichel von der Winkelöffnung $\frac{\pi}{2}$, Figur 3 einen ringförmigen Fundamentalbereich vor.

§ 4.

Functionen, welche bei der einzelnen Substitution ungeändert bleiben.

Der Vollständigkeit wegen gebe ich hier die Functionen explicite an, welche zu den im vorigen Paragraphen bestimmten Fundamentalbereichen hinzugehören. Im Falle der elliptischen oder parabolischen Substitution hat die durch den Fundamentalbereich versinnlichte Riemann'sche Mannigfaltigkeit das Geschlecht Null. Daher wird es eine zugehörige Function geben, welche jeden Werth im Fundamentalbereich nur einmal annimmt. Als Function von ζ betrachtet muss sie im Falle der elliptischen Substitution bei $\zeta = 0$, wie bei $\zeta = \infty$ einen $(l-1)$-fachen Kreuzungspunkt besitzen. Analog im Falle der parabolischen Substitution im Punkte $\zeta = \infty$ einen Kreuzungspunkt unendlich hoher Ordnung. *Solche Functionen sind offenbar* ζ^l, *beziehungsweise* $e^{\frac{2i\pi\zeta}{\text{Const.}}}$. Alle anderen Functionen, die im Fundamentalbereiche eindeutig sind und auf der durch den Fundamentalbereich vorgestellten Riemann'schen Mannigfaltigkeit keinen wesentlich singulären Punkt haben, drücken sich nach dem Fundamentalsatz über die Mannigfaltigkeiten vom Geschlechte Null durch die beiden angegebenen Functionen resp. rational aus. — Bei den hyperbolischen und loxodromischen Substitutionen ist $p = 1$. Will man zugehörige eindeutige Functionen bilden, so genügt, es, auf die Theorie der doppeltperiodischen Functionen zu recurriren. Sei $\zeta' = Re^{i\alpha} \cdot \zeta$ die vorgelegte Substitution. So folgt $\log \zeta' = \log \zeta + \log R + i\alpha$. Wir brauchen also nur eindeutige Functionen von $\log \zeta$ zu construiren, welche die Perioden $\log R + i\alpha$, und überdiess, damit sie in ζ eindeutig sind, die Periode $2i\pi$ haben. Dass $p = 1$ ist, drückt sich darin aus, dass alle solche Functionen*) sich durch zwei derselben rational darstellen lassen, zwischen denen eine algebraische Gleichung vom Geschlechte 1 besteht.

*) die im Fundamentalbereich keinen wesentlich singulären Punkt haben.

Auch können wir den Gesammtverlauf, den diese Functionen in der Ebene ζ (oder auf der Kugel ζ) nehmen, mit Leichtigkeit übersehen. Bei der elliptischen Substitution zerlegt sich die Ebene einfach durch l Halbmeridiane in l nebeneinanderliegende Sicheln. Die Anzahl dieser Sicheln wird unendlich gross, indem zugleich die beiden Eckpunkte in einen zusammenrücken, wenn die elliptische Substitution zur parabolischen wird. Im Falle der hyperbolischen oder loxodromischen Substitution dagegen bekommen wir unendlich viele einander einschliessende ringförmige Bereiche, welche sich auf die beiden Fundamentalpunkte $\zeta = 0$ und $\zeta = \infty$ immer enger zusammendrängen.

Diese ausführlichen Angaben mögen dazu dienen, damit jedenfalls diese ersten den einzelnen linearen Substitutionen correspondirenden Fälle vollständig verständlich seien.

§ 5.

Stellung der Gruppentheorie.

Durch die Bemerkungen des § 3 hat sich der Begriff des Fundamentalbereichs gegen den früher gegebenen in etwa verschoben. Statt der einzelnen linearen Substitutionen, welche zwei von den Randstücken des Fundamentalbereichs zusammenordnen, betrachten wir dort die Gruppe linearer Substitutionen, welche aus den genannten durch beliebige Combination und Wiederholung entsteht, — und es erscheint der zulässige Fundamentalbereich beinahe als ein Attribut dieser Gruppe. Offenbar hat die Gruppe, welche einem brauchbaren Fundamentalbereiche zugehört, keine unendlich kleine Substitution: sie ist *discontinuirlich*, wie Herr Poincaré es ausdrückt. Wir werden fragen, ob jede discontinuirliche Gruppe linearer Substitutionen eine und nur eine für uns brauchbare Eintheilung der Ebene in Fundamentalbereiche liefert. Wäre es der Fall, so könnten wir unsere ursprüngliche Fragestellung verlassen und die Aufsuchung aller discontinuirlichen Gruppen linearer Substitutionen als eigentlichen Zielpunkt wählen.

Aber die nähere Betrachtung zeigt, dass da in dreifachem Sinne noch ein Unterschied zu machen ist.

Einmal giebt es, wie ich hier in keiner Weise ausführen kann, discontinuirliche Gruppen, denen überhaupt kein endlicher Fundamentalbereich zugehört*). Die Fundamentalpunkte der zugehörigen linearen Substitutionen sind überalldicht über das ganze Gebiet der complexen Variablen zerstreut.

Andererseits werden wir sofort solche Gruppen kennen lernen, bei denen das Gebiet der complexen Variablen durch gewisse natür-

*) Vergl. die bezügliche Andeutung von Herrn Poincaré in Bd. 93 der Comptes Rendus, pag. 46.

liche Grenzen in verschiedene Abtheilungen zerlegt ist. Innerhalb jeder Abtheilung existirt ein zugehöriger Fundamentalbereich. Aber wenn wir ihn vermöge der linearen Substitutionen reproduciren, die zugehörigen eindeutigen Functionen mit linearen Transformationen in sich also analytisch fortsetzen, so werden wir nie aus der einmal gewählten Abtheilung herausgelangen. Wir werden also sagen müssen, dass ein und derselben continuirlichen Gruppe in diesem Falle verschiedene Arten von Fundamentalbereichen und zugehörigen Functionen correspondiren.

Endlich aber giebt es Gruppen linearer Substitutionen, denen überhaupt kein zusammenhängender Fundamentalbereich entspricht, oder bei denen diess doch nicht für alle Theile der Ebene der Fall ist.

Daher scheint es, trotz der neuen Umgrenzung, die der Begriff des Fundamentalbereichs erfahren hat, am Richtigsten, dass wir auch im Folgenden immer von der Gebietseintheilung ausgehen. Nur wo kein Missverständniss möglich ist, empfiehlt es sich der Kürze halber, von der zugehörigen discontinuirlichen Gruppe zu sprechen.

§ 6.

Weitere Beispiele brauchbarer Gebietseintheilungen.

Ich wende mich nun zu der in § 1 bereits in Aussicht genommenen Aufzählung solcher bereits anderwärts studirter, für uns brauchbarer Gebietseintheilungen, deren Betrachtung zum Verständnisse des späteren nützlich sein kann.

1) *Wir nennen zunächst die Figuren der regulären Körper:* Doppelpyramide, Tetraeder, Oktaeder, Ikosaeder. Die zugehörige Gebietseintheilung erwächst jedesmal durch symmetrische Reproduction eines Kreisbogendreiecks. Die Winkel desselben sind bez. dem folgenden Schema zu entnehmen:

$$\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{l}, \quad (l \text{ beliebig}),$$
$$\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3},$$
$$\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4},$$
$$\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{5}.$$

Die Zahl der unterschiedenen Fundamentalbereiche, und also die Gruppe der zugehörigen Substitutionen ist *endlich*, und sind diess die einzigen endlichen Gruppen linearer Substitutionen einer Veränderlichen, die es giebt (sofern man von den Wiederholungen einer einzelnen periodischen Substitution absieht). Das Geschlecht p ist Null.

2) *Als zweites Beispiel haben wir diejenigen Gebietseintheilungen, welche bei den doppeltperiodischen Functionen in Betracht kommen.*

Und zwar zuvörderst die gewöhnlichen Parallelogramme, vom Geschlechte 1, die der Gruppe

$$\eta' = \eta + m\omega_1 + n\omega_2$$

correspondiren, unter ω_1, ω_2 die Perioden verstanden. Dann ferner, den *geraden* doppeltperiodischen Functionen entsprechend, Parallelogramme vom Geschlechte Null, wie ein solches durch Figur 4 (auf der ersten beigegebenen Tafel*)) versinnlicht wird; die zugehörige Gruppe lautet:

$$\eta' = \pm\eta + m\omega_1 + n\omega_2.$$

Endlich noch die besonderen Figuren, welche sich ergeben, wenn man ein geradliniges Dreieck, das entweder gleichseitig ist, oder die Hälfte eines gleichseitigen Dreiecks oder endlich die Hälfte eines Quadrats vorstellt, durch Spiegelung ins Unbegrenzte vervielfältigt. Die zugehörigen Substitutionen lauten, unter α eine dritte Einheitswurzel verstanden, beziehungsweise:

$$\eta' + \alpha^k\eta + (m + n\alpha)\omega_1; \qquad \eta' = \pm\alpha^k\eta + (m + n\alpha)\omega_1;$$
$$\eta' = i^k \cdot \eta + (m + ni)\omega_1.$$

Zugleich sind die hiermit angeführten Gruppen (von den Wiederholungen einer einzelnen geeigneten Substitution abgesehen) die einzigen discontinuirlichen Gruppen, welche den Punkt $\eta = \infty$, aber auch keinen anderen Punkt der Ebene ungeändert lassen.

3) *Als drittes Beispiel ziehen wir diejenigen Gebietseintheilungen in Betracht, welche aus der symmetrischen Reproduction eines Kreisbogendreiecks mit den Winkeln* $\frac{\pi}{l_1}$, $\frac{\pi}{l_2}$, $\frac{\pi}{l_3}$ *erwachsen, wo* l_1, l_2, l_3 *ganze Zahlen sind und* $\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2} + \frac{1}{l_3} < 1$ *ist***). Es sind diess eben diejenigen Figuren, denen schon Herr Schwarz im 75ten Bande von Borchardt's Journal eine Zeichnung widmete (Tafel II daselbst), und die in den letzten Bänden dieser Annalen von verschiedenen Seiten ausführlich behandelt worden sind. Bei ihnen tritt — für uns hier zum ersten Male — eine *natürliche Grenze* auf. Dieselbe wird von der Kreislinie gebildet, welche zu den drei Begrenzungskreisen des Ausgangsdreiecks (und also jedes anderen aus ihm abgeleiteten Dreiecks) orthogonal ist. Trifft man eine solche Coordinatenbestimmung, dass dieser Kreis als Axe der reellen Zahlen erscheint, so haben die Substitutionen der zugehörigen Gruppe durchaus reelle Coefficienten. Wir

*) Fig. 5 und Fig. 6 ebendaselbst repräsentiren a) den halben Fundamentalbereich des Ikosaeders, b) ein beliebiges Parallelogramm in solcher Projection, dass der Unendlichkeitspunkt der Ebene dem Bereiche angehört.

**) Lässt man diese Ungleichung fallen, so kommt man genau zu den unter 1) und 2) besprochenen Fällen zurück.

haben hier einen solchen Fall, in welchem die Gruppe weiter reicht, als die Ueberdeckung durch Fundamentalbereiche. Denn letztere finden sich nur auf derjenigen Seite des Grenzkreises, auf welcher wir (zufällig) das Ausgangsdreieck angenommen haben; die Gruppe aber zerlegt auch denjenigen Theil der Ebene, welcher auf der anderen Seite des Grenzkreises liegt, in äquivalente Gebiete.

§ 7.

Geometrischer Excurs zum vorigen Paragraphen.

Wenn man sich mit linearen Substitutionen einer Variablen η beschäftigt, so ist es bekanntlich in vielen Fällen nützlich, die Kugel, auf der man die complexen Werthe von η deutet, als Fundamentalfläche einer *Nicht-Euklidischen* Maassbestimmung zu betrachten*). Den linearen Substitutionen $\eta' = \frac{\alpha\eta + \beta}{\gamma\eta + \delta}$ entsprechen dann die *Bewegungen* des Raumes, den elliptischen insbesondere die reinen *Drehungen*, den loxodromischen die *Schraubenbewegungen* etc. Jeder discontinuirlichen Gruppe linearer Substitutionen wird eine ebensolche von Bewegungen entsprechen.

Die Beispiele nun, welche wir im vorigen Paragraphen betrachteten, correspondiren sämmtlich solchen Gruppen von Bewegungen, *bei denen je ein bestimmter Raumpunkt festbleibt.* Im Falle der doppeltperiodischen Functionen ist dieser Punkt *auf* der Kugel gelegen: der Punkt $\eta = \infty$. Bei den regulären Körpern ist es ein Punkt im Kugelinnern, nämlich der Mittelpunkt der Kugel (so lange man sich die regulären Körper unverzerrt in ihrer gewöhnlichen Gestalt denkt). Im Falle des dritten Beispiels aber ein Punkt ausserhalb, der Pol nämlich jener Ebene, welche aus der Kugel den besprochenen Grenzkreis ausschneidet.

Beschränkt man seine Aufmerksamkeit auf die Winkel, welche die Strahlen oder Ebenen, die durch den festen Punkt hindurchlaufen, im Sinne unserer Nicht-Euklidischen Maassbestimmung mit einander bilden, so darf man den Kegel, der von dem festen Punkte aus sich an die Kugel erstreckt, als Fundamentalgebilde der Maassbestimmung erachten. Wir haben dann in dem ternären, von jenen Strahlen und Ebenen erfüllten Gebiete, eine *hyperbolische* oder *elliptische* oder *parabolische* Maassbestimmung**), je nachdem der Kegel reell oder imaginär ist oder in eine Doppelebene (d. h., dualistisch zu reden, in zwei conjugirt imaginäre Ebenenbüschel) ausgeartet. Die hiermit bezeichnete

*) Siehe Annalen IX, pag. 183.

**) Wegen dieser Ausdrucksweise siehe Annalen IV: Ueber die sogenannte Nichteuklidische Geometrie.

Anschauungsweise ist desshalb nützlich, weil sie einen wichtigen Hülfsbegriff an die Hand giebt. Projicirt man nämlich die auf der Kugel ausgebreiteten, unter sich äquivalenten Fundamentalbereiche irgend einer der von uns betrachteten Gebietseintheilungen von dem zugehörigen festbleibenden Punkte aus, so sind die projicirenden Pyramiden im Sinne der jeweiligen Maassbestimmung unter sich *congruent*. Insbesondere haben sie alle dieselbe *Winkelöffnung*. Hiernach erkennt man z. B. sofort, dass nur endliche Gruppen linearer Substitutionen möglich sind, wenn der festgehaltene Punkt im Kugelinnern liegt; denn die Gesammtheit der von einem solchen Punkte aus sich erstreckenden Winkel ist endlich.

Wir werden im Folgenden von dieser Hülfsvorstellung in einer Form Gebrauch machen, die sich an die geometrischen Vorstellungen der üblichen Functionentheorie bequemer anschliesst. Die Strahlen und Ebenen, welche durch den festgehaltenen Punkt hindurchlaufen, übertrage man mitsammt der für sie geltenden Maassbestimmung durch Schnitt auf die Kugel, und von dieser, wenn man will, durch stereographische Projection auf die Ebene η. So haben wir für die Punkte der letzteren eine Maassbestimmung, bei welcher der (reelle oder imaginäre oder ausgeartete) Grenzkreis die unendlich fernen Punkte abgiebt, und die geodätischen Linien in diejenigen Kreise übergegangen sind, welche den Grenzkreis orthogonal schneiden. Im Sinne dieser Maassbestimmung sind dann die jeweiligen Fundamentalbereiche, wie wir sie im vorigen Paragraphen betrachteten, *congruent* und also von gleichem *Flächeninhalt*. Die zugehörigen linearen Substitutionen von η aber bezeichnen eben so viele im Sinne unserer Maassbestimmung zu verstehende Bewegungen*).

§ 8.

Ueber die allgemeinsten, von uns in Betracht zu ziehenden Gruppen mit reellem Hauptkreise.

Wie im Vorhergehenden bereits angedeutet, werde ich die sämmtlichen Gruppen, welche wir in § 6 betrachteten, als *Gruppen mit Hauptkreis* bezeichnen. Dieser Hauptkreis ist im Beispiel 1) imaginär, im Beispiele 2) in einen Punkt ausgeartet, und sind diess, wie schon

*) Es ist diess dieselbe Art Nicht-Euklidischer Maassbestimmung, von der auch Herr Poincaré Gebrauch macht. Lässt man den Grenzkreis mit der Axe der reellen Zahlen zusammenfallen (worauf also die zugehörigen Bewegungen durch diejenigen linearen Substitutionen gegeben sein werden, welche reelle Coefficienten haben), so ist der Ausdruck für die Entfernung zweier Punkte $x_1 + iy_1$, $x_2 + iy_2$, unter c eine reelle Constante verstanden,

$$= 2ic \operatorname{arc.sin}\left(i\sqrt{\frac{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}{2y_1 y_2}}\right).$$

bemerkt, die einzigen Beispiele von Gruppen mit imaginärem, bez. ausgeartetem Hauptkreis. Dagegen ist es leicht zu sehen, dass es über das dritte Beispiel des § 6 hinaus noch unendlich viele discontinuirliche Gruppen (resp. Gebietseintheilungen) mit *reellem* Hauptkreise giebt. Statt nämlich ein Kreisbogendreieck zu Grunde zu legen, mögen wir ein Kreisbogen*vieleck* in Betracht ziehen, dessen Seiten (verlängert gedacht) sämmtlich auf einem Hauptkreise senkrecht stehen, und dessen Winkel, sofern sie nicht Null sind, irgend welche ganzzahlige Theile von π sind. *Wenn wir ein solches Kreisbogenvieleck symmetrisch reproduciren, so erhalten wir wiederum eine brauchbare Gebietseintheilung, für welche der Hauptkreis Grenzkreis ist.* Das Geschlecht des Fundamentalbereichs ist, wie im Falle des Kreisbogendreiecks, gleich Null. Ich verweise ferner auf meine Bemerkungen „Zur Theorie der elliptischen Modulfunctionen" im 17ten Bande dieser Annalen, sowie insbesondere auf Herrn Dyck's „Gruppentheoretische Studien" im 20ten Bande daselbst. Es wird dort gezeigt, dass in den so erhaltenen Gruppen mit Hauptkreis andere Gruppen als Untergruppen enthalten sind, deren Fundamentalbereich nicht nothwendig symmetrisch ist und ein Geschlecht besitzt, welches beliebig von Null verschieden sein kann.

Es ist Herrn Poincaré's Verdienst, zuerst darauf aufmerksam gemacht zu haben, dass man die allgemeinsten Gruppen mit reellem Hauptkreis aus einfachen Bestimmungsstücken construiren kann*). Aber nur für einen Theil seiner Gruppen ist der Hauptkreis selbst die natürliche Grenze der Fundamentalbereiche. Zum Theil erreichen sie denselben nur in einzelnen Punkten, zum Theil überschreiten sie ihn und überdecken die ganze Ebene. Ich werde im Nachstehenden nur solche Fälle betrachten, in denen der Hauptkreis mit der natürlichen Grenze zusammenfällt.

Zur Vereinfachung überlegen wir vorab das Folgende. Ein und dieselbe Gruppe linearer Substitutionen kann in demselben Gebiete der Ebene zu scheinbar sehr verschiedenen Fundamentalbereichen Anlass geben. Ich erinnere nur an das Beispiel der doppeltperiodischen Functionen: dasselbe parallelogrammatische System kann auf mannigfachste Weise aus einzelnen Parallelogrammen aufgebaut werden. Um über die verschiedenen dabei auftretenden Möglichkeiten Uebersicht zu gewinnen, ist es nützlich, zunächst den Fundamentalbereich durch die geschlossene Riemann'sche Mannigfaltigkeit (oder Fläche), welche er versinnlicht, zu ersetzen, und dann hinterher zu überlegen, auf welche Weisen man diese Fläche zerschneiden und ihr also einen bestimmten Fundamentalbereich substituiren kann.

Wir kehren also einen Augenblick die Betrachtung um. Statt die

*) Siehe Annalen XIX, pag. 554.

Riemann'sche Fläche auf die η-Ebene abzubilden, verfolgen wir η als eine complexe Function des Ortes auf der Riemann'schen Fläche. Und hier ist es nun, dass wir die Beschränkungen, die wir im Folgenden festhalten wollen, am deutlichsten bezeichnen können.

Offenbar hat η, als Function des Ortes auf der Riemann'schen Fläche*) betrachtet, die Eigenschaft, sich nach Durchlaufung irgend eines geschlossenen Weges in der Gestalt $\frac{\alpha\eta+\beta}{\gamma\eta+\delta}$ zu reproduciren. Es kann sein, dass eine derartige, von der Identität verschiedene, Substitution sich bereits einstellt, wenn wir nur einen einzelnen Punkt der Riemann'schen Fläche umkreisen. Einen solchen Punkt nennen wir einen *Verzweigungspunkt von* η und bedingen nun zunächst, *dass, gleich dem Geschlechte p der Riemann'schen Fläche, auch die Zahl n dieser Verzweigungspunkte durchaus endlich sein soll.* Dann aber beschränken wir auch noch das Verhalten von η im einzelnen Verzweigungspunkte. Die Bedingung, dass die Umgebung des Verzweigungspunktes in η eindeutig sein soll, lässt noch verschiedene Möglichkeiten offen. *Wir wollen festsetzen, dass* η *sich in der Nähe des einzelnen Verzweigungspunktes verhalten soll, wie* $\sqrt[l_k]{z}$ *in der Nähe von* $z=0$. Hier soll l_k eine ganze Zahl sein, welche ich den *Index* des Verzweigungspunktes nenne, die übrigens in der Grenze auch unendlich werden mag (worauf $\log z$ an die Stelle von $\sqrt[l_k]{z}$ tritt). Die Folge ist dann, *dass* η *bei Umkreisung des Verzweigungspunktes eine elliptische Substitution, und zwar eine primitive elliptische Substitution von der Periode* l_k, *im Grenzfalle aber eine parabolische Substitution erfährt.*

Den Inbegriff der hiermit definirten Attribute (p, n, l_k) bezeichne ich weiterhin als die *Signatur* der η-Function.

Indem wir nun insbesondere solche Gebietseintheilungen in der η-Ebene betrachten wollen, deren natürliche Grenze eine Kreislinie ist, wird der einzelne Fundamentalbereich nothwendig einfachen Zusammenhang haben. Es wird also darauf ankommen, die Riemann'sche Fläche (p, n) auf die eine oder andere Weise in eine einfach zusammenhängende zu zerschneiden. Eine Uebersicht über die unbegrenzt vielen Möglichkeiten, welche dabei auftreten, hat an dieser Stelle keinen Zweck. Es wird vielmehr genügen, wenn wir eine kanonische Zerschneidungsart verabreden, die wenigstens in der Hauptsache bestimmt ist. Diess soll im folgenden Paragraphen geschehen. Der § 10 schildert sodann die Gestalt des entsprechenden Fundamentalbereichs in der η-Ebene. Wir

*) Die Riemann'sche Fläche selbst denke ich mir immer, im Anschlusse an meine Schrift, ohne Verzweigungspunkte frei im Raume gelegen.

benutzen dabei, um die Ideen zu fixiren, einen Umstand, dessen auch Herr Poincaré erwähnt. In der Theorie der doppeltperiodischen Functionen zeigt man durch einfache geometrische Betrachtung, dass man den Fundamentalbereich, das Parallelogramm, immer geradlinig begrenzt voraussetzen kann. *In ganz ähnlicher Weise beweist man, dass man als Begrenzungskanten des einzelnen Fundamentalbereichs einer Gruppe mit Hauptkreis immer solche Kreisbogen verwenden kann, welche (verlängert gedacht) auf dem Hauptkreise senkrecht stehen.* Indem wir hiervon in § 10 Gebrauch machen, disponiren wir rückwärts über die Gestalt jener Querschnitte, welche in § 9 auf unserer Riemann'schen Fläche nur erst der Art und Aufeinanderfolge nach festgelegt waren. —

Noch sei bemerkt, dass wir im Folgenden bei $p = 0$ immer $n \geqq 3$ und bei $p = 1$ immer $n \geq 1$ voraussetzen wollen. Die hiermit ausgeschlossenen Fälle sind im Früheren bereits erledigt und würde ihre Mitberücksichtigung die Ausdrucksweise (zumal bei den Constantenzählungen) unnöthig schwerfällig machen. *Es sind diess nämlich diejenigen Fälle, in denen die Riemann'sche Fläche* (p, n) *unendlich viele eindeutige Transformationen in sich gestattet, welche die vorgegebenen Verzweigungspunkte nicht ändern.* Dem entspricht, wie hier beiläufig bemerkt sei, dass die betreffenden linearen Substitutionen der Variabelen η mit unendlich vielen anderen linearen Substitutionen vertauschbar sind.

§ 9.

Kanonische Zerschneidung der Riemann'schen Fläche (p, n).

Um die kanonische Zerschneidung der Riemann'schen Fläche die wir im Folgenden benutzen werden, herzustellen, beginnen wir mit derjenigen Zerschneidungsart, welche, auf Riemann zurückgehend, auch sonst vielfach verwandt wurde. Zunächst werden wir irgend p die Fläche nicht zerstückende und einander nicht schneidende Rückkehrschnitte $A_1, A_2, \cdots, A_p$ construiren. Sodann ergänzen wir jeden derselben in bekannter Weise durch einen Querschnitt B_i, der von einem Punkte des A_i auslaufend zu demselben Punkte von der anderen Seite zurückkehrt. Die p so entstehenden Schnittpunkte (A_i, B_i) verbinden wir des Weiteren mit einem beliebigen Punkte O der Fläche durch Stücke c_i und legen endlich von demselben Punkte O aus nach den n Verzweigungstellen, die beziehungsweise $a_1, a_2, \cdots, a_n$ genannt werden mögen, Schnitte L_k $(k = 1, 2, \cdots, n)$. Dabei können wir, indem wir noch bei jedem Schnitte zwischen einer positiven und einer negativen Seite unterscheiden, die Aufeinanderfolge der genannten Stücke so wählen, dass bei positiver*) Umkreisung der nun einfach

*) Als positiv nehme ich fernerhin diejenige Richtung, welche dem Drehsinn eines Uhrzeigers entgegen läuft.

zusammenhängenden Fläche die Aufeinanderfolge der Begrenzungsstücke die folgende ist:

$$c_1^+ A_1^+ B_1^- A_1^- B_1^+ c_1^-$$
$$c_2^+ A_2^+ B_2^- A_2^- B_2^+ c_2^-$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$c_p^+ A_p^+ B_p^- A_p^- B_p^+ c_p^+$$
$$L_1^+ L_1^- L_2^+ L_2^- \cdots L_n^+ L_n^-.$$

Nachdem Alles in dieser Weise geordnet ist, ziehe ich jetzt hinterher, — um nämlich an Querschnitten und also an Begrenzungskanten des späteren Fundamentalbereichs zu sparen —, die Stücke c_i, indem ich sie immer kürzer mache, schliesslich ganz in den Punkt O hinein, so dass zuletzt, ausser den L_k, auch die A_i, B_i sämmtlich von O auslaufen. *Der Erfolg ist dann einfach der, dass in dem vorstehenden Schema die Stücke $c_i^{\pm}$ überhaupt wegfallen und also nur $4p + 2n$ Begrenzungsstücke übrig bleiben.* Man beachte die Winkel, welche die aufeinanderfolgenden Begrenzungsstücke unserer Fläche mit einander einschliessen. Von derselben sind n gleich 2π, nämlich diejenigen, welche in den Verzweigungspunkten $a_1, a_2, \cdots, a_n$ von den dort zusammenstossenden L_k^+, L_k^- gebildet werden. *Die übrigen $4p + n$ aber sind erst zusammengenommen gleich 2π*; denn erst zusammengenommen ergeben sie auf unserer Fläche die ganze Umgebung des Punktes 0. Man muss sich von dieser Umgebung eine Vorstellung machen, wie sie für den Fall $p = 2$, $n = 3$ durch Figur 7 auf der ersten beigegebenen Tafel schematisch repräsentirt wird.

Auf der so zerschnittenen Fläche ist nun η eindeutig, und wir können also den Inbegriff der Werthe, welche η auf ihr annimmt, als einen Functionszweig betrachten. Hätten wir keine bestimmte Zerschneidung verabredet, so könnten wir nur von der linearen Substitution reden, welche η bei *Durchlaufung* eines bestimmten geschlossenen Weges erleidet. Jetzt aber dürfen wir mit Rücksicht auf unseren Functionszweig von einer solchen Substitution sprechen, die der *Ueberschreitung* einer unserer Querschnitte correspondirt. In der That wird diese Substitution dieselbe sein, an welcher Stelle auch wir den einzelnen Querschnitt überschreiten mögen. Wir werden hiernach bestimmte Substitutionen S_i, T_i, resp. U_k haben, welche η erleidet, wenn wir von A_i^-, B_i^-, L_k^- beziehungsweise zu A_i^+, B_i^+, L_k^+ hinüberschreiten. Es sind diese $2p + n$ Substitutionen die *erzeugenden* Substitutionen, aus denen sich alle anderen, die η erfährt, zusammensetzen.

Die hiermit eingeführten Betrachtungen haben die grösste Aehnlichkeit mit denjenigen, vermöge deren man die Periodicitätsmoduln

algebraischer Integrale zu bestimmen pflegt. Es will beim weiteren Verfolg derselben inzwischen ein wesentlicher Unterschied scharf erkannt sein. Bei den Integralen erscheinen beliebige geschlossene Wege, welche wir auf der Fläche hinter einander durchlaufen mögen, eben weil sie beide einen additiven Periodicitätsmodul liefern, mit einander vertauschbar. Eine solche Vertauschbarkeit tritt aber bei unseren Functionen im Allgemeinen keineswegs ein.

Uebrigens finden wir für unsere S_i, T_i, U_k, indem wir die Punkte a_k, O unserer Fläche umkreisen, noch gewisse Relationen. Zunächst, wenn wir um a_k herumgehen, so kommt diess auf dasselbe hinaus, als wenn wir den Querschnitt L_k überschreiten. Aber η reproducirt sich identisch, wenn wir a_k im Ganzen l_k-mal umkreisen, wo l_k der Index des betr. Verzweigungspunktes ist. *Daher kommt:*

$$U_k^{l_k} = 1.$$

Wir umgehen nun ferner den Punkt O. Da dieser Punkt durchaus zufällig gewählt ist und für unsere η-Function gar keine specifische Bedeutung hat, so reproducirt sich η dabei jedenfalls identisch. Nun werden bei dieser Gelegenheit die Querschnitte A_i, B_i, L_k, wie Figur 7 aufweist, in bestimmter Reihenfolge überschritten. Indem wir letztere markiren, gewinnen wir folgende Beziehung, die späterhin als *Fundamentalrelation* bezeichnet sein soll:

$$S_1^{-1} T_1^{-1} S_1^{+1} T_1^{+1} S_2^{-1} T_2^{-1} S_2^{+1} T_2^{+1} \ldots$$
$$\ldots S_p^{-1} T_p^{-1} S_p^{+1} T_p^{+1} U_1^{-1} U_2^{-1} \ldots U_n^{-1} = 1.$$

Hier bezeichnet die Aufeinanderfolge der Buchstaben (von links nach rechts) die hintereinander auszuführenden Operationen.

Vermöge dieser Relationen können wir die Benennung jeder Substitution, die sich aus den S_i, T_i, U_k zusammensetzt, beliebig modificiren, wovon noch wiederholt Gebrauch gemacht werden soll.

Es muss übrigens hervorgehoben werden, dass diese Relationen das Verhalten von η in den Punkten a_k, resp. in O keineswegs vollkommen charakterisiren. In nächster Umgebung von a_k sollte sich η verhalten, wie $\sqrt[l_k]{\varepsilon_k}$ in der Umgebung von $\varepsilon = 0$. Die Relation $U_k^{l_k} = 1$ würde bestehen bleiben, wenn wir hier $\sqrt[l_k]{\varepsilon}$ durch irgend eine ganzzahlige Potenz ersetzten. Ebenso würde unsere Fundamentalrelation richtig bleiben, wenn η sich nicht erst bei voller Umkreisung des Punktes O, sondern schon auf einem beliebigen ganzzahligen Theile dieses Weges identisch reproducirte.

§ 10.

Der kanonische Fundamentalbereich in der η-Ebene.

Indem wir jetzt zur η-Ebene zurückgehen, bemerken wir vorab, dass die linearen Substitutionen, welche η erleidet, in dem von uns zu betrachtenden Falle jedenfalls nicht loxodromisch sind. Denn alle sollen ja einen bestimmten Kreis, den Hauptkreis, ungeändert lassen. Ist nun die Substitution, welche uns vorgelegt wird, *elliptisch*, so wird der Hauptkreis für sie ein Breitenkreis sein, die beiden Fundamentalpunkte der Substitution sind conjugirte Pole in Bezug auf den Hauptkreis, und es liegt also der eine, aber auch nur der eine Fundamentalpunkt der Substitution auf derjenigen Seite unseres Hauptkreises, auf der sich unsere Fundamentalbereiche befinden. Wird die Substitution (im Grenzfalle) *parabolisch*, so rücken die beiden Fundamentalpunkte in einen Punkt des Hauptkreises zusammen. — Ist dagegen die vorgelegte Substitution *hyperbolisch*, so wird der Hauptkreis die Bedeutung eines Meridians haben und also durch beide Fundamentalpunkte der Substitution hindurchlaufen.

Wir entwerfen jetzt vermöge unserer η-Function (deren Existenz wir hier als vorgegeben betrachten) ein erstes Bild der im vorigen Paragraphen zerschnittenen Fläche, und gewinnen so, was wir den *kanonischen Fundamentalbereich* in der η-Ebene, und zwar als *ursprünglichen* Fundamentalbereich bezeichnen wollen. Es ist ein einfach zusammenhängendes, nirgends über den Hauptkreis hinausgreifendes*), mit $4p + 2n$ Begrenzungslinien und also ebenso viel Ecken versehenes, allgemein zu reden, krummliniges Polygon. Von diesen Ecken entsprechen $4p + n$, die ich als *Ecken erster Art* bezeichnen will, dem Punkte O unserer Riemann'schen Fläche; die Conformität der Abbildung erleidet in ihnen keine Unterbrechung und *es beträgt also die Winkelsumme der Ecken erster Art insgesammt* 2π. Dagegen bieten die Ecken der *zweiten* Art, die den Verzweigungspunkten $a_1, a_2, \cdots, a_n$ der Riemann'schen Fläche entsprechen und demnach mit $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ resp. bezeichnet sein sollen, eine Abweichung von der Conformität. *Der Winkel* 2π, *welcher auf unserer Riemann'schen Fläche zwischen* L_k^+ *und* L_k^- *eingeschlossen ist, erscheint in der* η*-Ebene durch* $\frac{2\pi}{l_k}$ *ersetzt.* Die Ecke α_k ist dann zugleich Fundamentalpunkt der elliptischen Substitution U_k. Es geht daraus hervor, *dass unser Fundamentalbereich sich in* α_k *an den Hauptkreis hinanerstreckt, wenn* U_k *parabolisch ist.* Dagegen liegen die $(4p + n)$ Ecken erster Art noth-

*) Alles dieses, weil wir *voraussetzen*, unsere Riemann'sche Fläche sei in η eindeutig und der Hauptkreis sei die natürliche Grenze für die Reproductionen der Fundamentalbereiche.

wendig immer im Inneren des Hauptkreises. Denn da jede von ihnen dem Punkte O entspricht, so müssen sich von jeder derselben aus, wie wir unten noch genauer sehen werden, ganz ähnlich $(4p + n)$ Fundamentalbereiche in der η-Ebene erstrecken, wie vom Punkte O aus auf der Riemann'schen Fläche die $(4p + n)$ durch die A_i, B_i, L_k begrenzten Winkelräume.

Wir wollen uns die Gestalt der A_i, B_i, L_k jetzt so bestimmt denken, dass die Begrenzungslinien unseres Fundamentalbereiches Kreise werden, welche verlängert gedacht auf dem Hauptkreise senkrecht stehen. Und zwar sollen die Kreisbogen, welche den verschiedenen Ufern $A_i^{\pm}$, $B_i^{\pm}$, $L_k^{\pm}$ entsprechen, mit den correspondirenden griechischen Buchstaben $\mathsf{A}_i^{\pm}$, $\mathsf{B}_i^{\pm}$, $\Lambda_k^{\pm}$ bezeichnet sein. Die Figuren 8 — 10 (auf der zweiten beigegebenen Tafel) sollen die Aufeinanderfolge und Zusammengehörigkeit dieser Kreisbogenstücke an den schon oben gewählten Beispielen $p = 2$, $n = 3$ schematisch erläutern. Der Hauptkreis ist in allen Fällen stärker ausgezogen, desgleichen sind die Winkel an den Ecken α_k durch besondere Markirung kenntlich gemacht. Die Pfeile bezeichnen die Zusammengehörigkeit der Kanten und giebt überdiess die Pfeilspitze jedesmal den Sinn, in welchem die durch das beigesetzte Symbol bezeichnete Operation, positiv genommen, wirksam ist. *Durch* S_i^{+1}, T_i^{+1}, U_k^{+1} *geht beziehungsweise* A_i^{+} *aus* A_i^{-}, B_i^{+} *aus* B_i^{-}, Λ_k^{+} *aus* Λ_k^{-} *hervor.* Unter sich differiren die drei Zeichnungen nur durch ihre Beziehung zum Unendlichkeitspunkte der η-Ebene. Es sind verschiedene stereographische Projectionen einer und derselben auf einer Kugel zu denkenden Figur. Ich habe sie alle drei hergesetzt, weil es im Folgenden unerlässlich ist, sich unseren Fundamentalbereich bald in der einen, bald in der anderen Gestalt zu denken.

§ 11.

Die Gruppirung der Fundamentalbereiche.

Man versuche nun, sich ein deutliches Bild davon zu machen, wie sich unser Fundamentalbereich vermöge der erzeugenden Substitution $S_i^{\pm 1}$, $T_i^{\pm 1}$, $U_k^{\pm 1}$ vervielfältigt und nach und nach (der Voraussetzung gemäss) die ganze Ebene bis an den Hauptkreis überdeckt. Dabei erinnere man sich der allgemeinen Erläuterungen, die in § 2. des vorigen Abschnitts gegeben wurden, übrigens aber der in § 9. dieses gegenwärtigen Abschnitts aufgestellten Relationen. Um eine bestimmtere Ausdrucksweise zu ermöglichen, *wollen wir jeden Fundamentalbereich vermöge derjenigen linearen Substitution benennen, durch welche er aus dem ursprünglichen Fundamentalbereiche herausgeht.* Der ursprüngliche Fundamentalbereich selbst ist hiernach $= 1$.

Was zuvörderst die Bereiche angeht, die sich an den ursprünglichen längs einer *Kante* anschmiegen, so sind diess offenbar $S_i^{\pm 1}$, $T_i^{\pm 1}$, $U_k^{\pm 1}$ selbst. Wir leiten hieraus sofort die folgende allgemeine Regel ab: *dass nämlich der Bereich* Π (unter Π ein beliebiges symbolisches Product der S, T, U verstanden) *von den* $S_i^{\pm 1}\Pi$, $T_i^{\pm 1}\Pi$, $U_k^{\pm 1}\Pi$ *unmittelbar umgeben ist.* In der That, bei der *Operation* Π, die den Bereich 1 in den *Bereich* Π überführt, geht $S_i^{\pm 1}$ in $S_i^{\pm 1}\Pi$ über, etc.

Wir suchen nun ferner die Bereiche, welche mit dem ursprünglichen, wo nicht eine Kante, so doch eine *Ecke* gemein haben.

Ist diese Ecke von der zweiten Art, so ist die Sache sehr einfach. *Wir haben, indem wir etwa* α_k *in positivem Sinne umkreisen, der Reihe nach die Bereiche:*

$$1,\ U_k,\ U_k^2,\ \cdots,\ U_k^{l_k-1}.$$

Die Relation $U_k^{l_k} = 1$ entspricht dem Umstande, dass der $(l_k+1)^{te}$ Bereich wieder der erste ist. — Die Sache muss etwas anders dargestellt werden, wenn l_k unendlich, die Substitution U_k also parabolisch ist. Dann haben wir von 1 ausgehend nach der einen Seite die Bereiche U_k, U_k^2, U_k^3, $\cdots$, nach der anderen U_k^{-1}, U_k^{-2}, etc.

Etwas complicirter ist die Behandlung der Ecken erster Art. Wir betrachten einen Augenblick nicht den Fundamentalbereich 1 selbst, sondern nur seine Eckpunkte erster Art, und zwar zuvörderst den Eckpunkt (A_1^+, Λ_n^-). Durch S_1^{-1} wird aus ihm (A_1^-, B_1^+) [vergl. die Figuren 8 — 10]. Hieraus durch T_1^{-1}: (A_1^-, B_1^-), sodann durch S_1^{+1}: (A_1^+, B_1^-), endlich durch T_1^{+1}: (A_2^+, B_1^+). Die weitere Hinzufügung der Operationen S_2^{-1}, T_2^{-1}, S_2^{+1}, T_2^{+1} bringt den Punkt der Reihe nach in folgende Lagen: (A_2^-, B_2^+), (A_2^-, B_2^-), (A_2^+, B_2^-), (A_3^+, B_2^+). So fortfahrend kommen wir schliesslich, indem wir zwischendurch alle anderen Eckpunkte (A, B) einmal berühren, zu (B_p^-, Λ_1^+). Von hier bringen wir unseren Punkt durch U_1^{-1} nach $(\Lambda_1^-, \Lambda_2^+)$, dann durch U_2^{-1} nach $(\Lambda_2^-, \Lambda_3^+)$, $\cdots$, endlich durch U_n^{-1} zur Anfangslage (Λ_n^-, A_1^+) zurück. *So haben wir aus dem ersten Eckpunkte erster Art alle anderen durch gewisse Operationen hergestellt, die wir* $\pi_0, \pi_1, \pi_2, \cdots$ *nennen wollen.* Dabei ist:

$$\pi_0 = 1;\quad \pi_1 = S_1^{-1};\quad \pi_2 = S_1^{-1}T_1^{-1};\quad \pi_3 = S^{-1}T_1^{-1}S_1^{+1},\ \cdots;$$
$$\pi_{4p-1} = S_1^{-1}T_1^{-1}S_1^{+1}T_1^{+1}\ \cdots\ S_p^{-1}T_p^{-1}S_p^{+1}T_p^{+1};\quad \pi_{4p} = \pi_{4p-1}U_1^{-1};$$
$$\cdots\ \pi_{4p+n-1} = S_1^{-1}T_1^{-1}\ \cdots\ S_p^{+1}T_p^{+1}U_1^{-1}U_2^{-1}\ \cdots\ U_n^{-1}.$$

Hier unterscheidet sich jedes π von dem unmittelbar vorhergehenden dadurch, dass rechter Hand ein einzelnes Symbol S, T oder U zugetreten ist. Es gilt diess auch, wenn wir auf π_{4p+n-1} wieder $\pi_0 = 1$

folgen lassen. *Denn zufolge unserer Fundamentalrelation resultirt gerade* 1, *wenn wir dem* π_{4p+n-1} *rechter Hand noch* U_n^{-1} *hinzusetzen.*

Ich sage nun, *dass wir alle Bereiche erhalten, die in positivem Sinne aufeinander folgend im Punkte* (A_1+, Λ_n-) *an den ursprünglichen Fundamentalbereich anstossen, wenn wir einfach die vorstehende Tabelle umkehren.* Mit anderen Worten, ich behaupte, dass Folgendes die Tabelle jener Bereiche ist:

$$1,\ \pi_1^{-1},\ \pi_2^{-1},\ \cdots,\ \pi_{4p-1}^{-1},\ \pi_{4p}^{-1},\ \cdots,\ \pi_{4p+n-1}^{-1}.$$

In der That: die hiermit aufgezählten Bereiche gehen aus dem ursprünglichen durch eine Operation hervor, welche je aus einer bestimmten Ecke erster Art des ursprünglichen Bereiches die erste Ecke macht: die neuen Bereiche haben also mit dem ursprünglichen diese Ecke gemein. Ferner: Jeder folgende Bereich geht, in Folge unserer Tabelle, aus dem vorangehenden dadurch hervor, dass *linker* Hand ein einzelnes Symbol S, T, U zutritt (insofern wir es jetzt mit den inversen Operationen zu thun haben); unsere Bereiche folgen sich also lückenlos. *Insbesondere wird die Fundamentalrelation das Aequivalent dafür, dass der* $(4p+n)^{te}$ *Bereich sich an den ersten unmittelbar anschliesst.* Dass aber auch die Aufeinanderfolge der Bereiche in positivem Sinne statt hat, zeigt ein Blick auf die Figur.

Wir wählen nun eine neue Ecke erster Art des ursprünglichen Bereiches, etwa diejenige, die aus (A_1+, Λ_n-) durch die Operation π' hervorgeht. Wollen wir alle Bereiche haben, die in dieser Ecke zusammen stossen, so brauchen wir offenbar die π^{-1} der letzten Tabelle rechter Hand nur mit dem Factor π' zu multipliciren. Wir erhalten dann die Aufeinanderfolge der gewünschten Bereiche, nur nicht (was übrigens sofort durch cyklische Umstellung zu erreichen ist) mit dem Bereiche 1 beginnend.

Nachdem wir so alle Bereiche bestimmt haben, welche mit dem ursprünglichen eine Ecke gemein haben — ich will sie alle unter der Gesammtbezeichnung P zusammenfassen — erledigen wir die gleiche Aufgabe für einen beliebigen anderen Bereich sofort. Wir brauchen nämlich wieder nur das Symbol Π dieses Bereiches linker Hand mit den einzelnen P zu multipliciren.

Und nun können wir uns folgende Vorstellung von der Gesammtheit der Fundamentalbereiche in der η-Ebene machen. Wir beginnen mit dem Bereiche 1 und umgeben ihn zuvörderst mit dem Kranze der anstossenden Bereiche P. Man versteht diess am besten, wenn alle U_k elliptisch sind und also die Zahl der P endlich ist. Hernach betrachte man den Fall, dass einige U_k parabolisch sein mögen, als einen Grenzfall. Um diesen ersten Kranz herum legen wir einen zweiten: das sind diejenigen Bereiche, welche an irgend einen Bereich P an-

stossen, und die wir also mit PP' bezeichnen können. Dann folgt ein dritter Kranz von Fundamentalbereichen $PP'P''$ etc. Und so streben wir je länger je mehr der natürlichen Grenze des Hauptkreises zu, ohne denselben irgendwo anders, als in den Fundamentalpunkten der etwa vorhandenen parabolischen Substitutionen U_k und der mit ihnen gleichberechtigten Substitutionen, wirklich zu erreichen.

§ 12.

Ueber die zugehörige Substitutionsgruppe.

Wir ergänzen die Schilderung, welche wir nunmehr von dem Verlaufe der η-Function gegeben haben, noch durch gewisse Sätze über die zugehörige Substitutionsgruppe.

Wir fanden oben die Relationen $U_k^{l_k} = 1$, wir hatten ferner die Fundamentalrelation. Aus ihnen folgen unendlich viele andere durch Transformation und Combination*). *Ich sage nun zunächst, dass hierüber hinaus zwischen unseren S_i, T_i, U_k keine anderen Relationen möglich sind.*

Sei nämlich $R = 1$ eine Relation (wo R ein Aggregat der S, T, U ist), so werden wir dieselbe geometrisch deuten**), indem wir zunächst alle diejenigen Bereiche in der η-Ebene markiren, welche, mit 1 beginnend, der Reihe nach durch das letzte Symbol von R, durch die Zusammenstellung der *zwei* letzten Symbole, der *drei* letzten Symbole etc. gegeben sind. Von diesen Bereichen hat jeder folgende mit dem vorangehenden eine Kante gemein, und die Aufeinanderfolge ist *geschlossen*, eben weil $R = 1$ ist. Statt von der Aufeinanderfolge der Bereiche werden wir bequemer von einer geschlossenen *Curve* sprechen, die der Reihe nach jene Bereiche durchsetzt. Und nun ist die Sache die, dass wir diese Curve, ohne ihre Bedeutung zu ändern, unter der einen Bedingung beliebig verzerren können, dass wir, bei der Verzerrung, die Eckpunkte der Fundamentalbereiche als unüberschreitbare Hindernisse betrachten. Denn eine jede solche Verzerrung hat nur den Effect, dass in die Aufeinanderfolge der Symbole, welche wir R nennen, an irgend welchen Stellen andere Symbolaggregate, die wir r nennen mögen, zusammen mit dem jedesmaligen, unmittelbar dahinter folgenden r^{-1} eingeschaltet werden, wodurch offenbar an der Richtigkeit und dem Wesen der Relation gar Nichts geändert wird. *Nun zeigt uns aber die geometrische Anschauung, dass nicht nur der einzelne Fundamentalbereich, sondern auch die Gesammtheit aller Bereiche in unserem Falle*

*) Ist $R = 1$ eine Relation, π irgend eine Operation der Gruppe, so heisst $\pi R \pi^{-1} = 1$ die transformirte Relation.

**) Vergl. hierzu Hrn. Dyck's „Gruppentheoretische Studien" im XX. Bande dieser Annalen.

eine einfach zusammenhängende Fläche bildet. Daher können wir, indem wir innerhalb des von unserer Curve umspannten Flächenstückes einen Punkt markiren, die Curve durch eine Reihenfolge von Schleifen ersetzen, welche von dem markirten Punkte aus nach den verschiedenen von der Curve umspannten Eckpunkten von Fundamentalbereichen hinlaufen, um je nach Umkreisung eines einzelnen Eckpunktes zum Ausgangspunkte zurückzukehren. Das heisst aber: unsere Curve ist mit der aufeinanderfolgenden Umkreisung gewisser Eckpunkte äquivalent. Nun entsprechen die früher aufgestellten Relationen zwischen den S, T, U den Umkreisungen der Eckpunkte des ursprünglichen Fundamentalbereiches. Umkreisen wir die Eckpunkte eines anderen Bereiches, so erhalten wir nothwendig — weil dieser Bereich aus dem ursprünglichen durch Transformation hervorgeht — die transformirten Relationen. *Daher ist* $R = 1$ *ohne Weiteres mit einem Aggregate solcher transformirter Relationen äquivalent*, und hat also in der That keine selbständige Bedeutung, w. z. b. w.

Wir fragen ferner nach denjenigen Substitutionen unserer Gruppe, welche *elliptisch* sind. Man kann diese Frage auf die eben beantwortete zurückführen. Doch ist es noch einfacher, sie direct zu beantworten. Eine elliptische Substitution unserer Gruppe hat einen ihrer Fundamentalpunkte nothwendig in demjenigen Gebiete, welches von unseren Fundamentalbereichen überdeckt wird (siehe oben). Daher stossen in diesem Punkte verschiedene Fundamentalbereiche zusammen, welche vermöge der elliptischen Substitution äquivalent sind. Mit anderen Worten: *Die elliptische Substitution muss sich in der Gestalt* $\pi U_k^{\mu} \pi^{-1}$ *darstellen lassen, wo* U_k *eine derjenigen erzeugenden Substitutionen ist, die selber elliptisch sind.*

Zu demselben Resultate führt vermöge einer Hülfsbetrachtung der Fall einer *parabolischen* Transformation. Um uns prägnanter ausdrücken zu können, mögen wir einen Augenblick den Hauptkreis der η-Ebene mit der Axe der reellen Zahlen, den Fundamentalpunkt der parabolischen Substitution mit dem Unendlichkeitspunkte zusammen fallen lassen. Unsere Transformation wird dann die Gestalt $\eta' = \eta + C$ annehmen. Wir zerlegen entsprechend die Ebene η durch gerade Linien, welche zur Axe der reellen Zahlen senkrecht sind, in Parallelstreifen von der Breite C. Ich sage dann, *dass in jedem dieser Streifen nothwendig ein Fundamentalbereich vorhanden ist, oder auch eine Anzahl solcher Bereiche, die sich parallel neben einander in's Unendliche ziehen.* Wäre diess nämlich nicht der Fall, so müssten wir, wenn wir einen solchen Streifen in's Unendliche verfolgten, auf andere und andere Fundamentalbereiche stossen. Es würde dann, ausser unserer parabolischen Substitution, noch eine zweite Substitution geben müssen, welche den einzelnen Fundamentalbereich in der Weise reproducirte,

dass sich die reproducirten Bereiche gegen den Punkt $\eta = \infty$ anhäufen. Diese Substitution wird parabolisch oder hyperbolisch sein können, aber $\eta = \infty$ zum Fundamentalpunkte haben. Wir combiniren sie mit $\eta' = \eta + C$ und erhalten eine discontinuirliche Gruppe, welche in unserer Gruppe mit Hauptkreis als Untergruppe enthalten ist. Diese Gruppe müsste eine von denen sein, die wir in § 6. des gegenwärtigen Abschnittes an zweiter Stelle aufgezählt haben. Aber keine dieser Gruppen lässt die Axe der reellen Zahlen invariant; es kann also auch keine solche Gruppe in unserer Substitutionsgruppe enthalten sein. — Wir haben dabei ausser Acht gelassen, dass die zutretende Substitution vielleicht selbst in der Gestalt $\eta' = \eta + C'$ enthalten sein kann (unter C' eine reelle Constante verstanden). Aber dann wird sie, mit $\eta' = \eta + C$ combinirt, unsere anfänglichen Parallelstreifen nur in schmalere Streifen zerlegen, und unser eigentlicher Schluss erleidet keine Aenderung. Also folgt: *So oft in unserer Gruppe eine parabolische Substitution vorhanden ist, so giebt es auch zugehörige Fundamentalbereiche, welche sich mit einer Ecke bis an den Fundamentalpunkt der parabolischen Substitution erstrecken.* — Wenn aber Letzteres bei *einem* Fundamentalbereiche der Fall ist, so reicht auch der ursprüngliche Fundamentalbereich an den Hauptkreis hinan; es giebt also unter den U_k eine parabolische Substitution, und die vorgelegte parabolische Substitution lässt sich in die Gestalt $\pi U_k^{\mu} \pi^{-1}$ setzen, unter μ eine positive oder negative ganze Zahl verstanden.

Daher, wenn wir zusammenfassen: *Unsere Gruppe enthält keine anderen elliptischen oder parabolischen Substitutionen, als diejenigen, die sich in der Gestalt $\pi U_k^{\mu} \pi^{-1}$ schreiben lassen.*

Hieraus folgt insbesondere, dass auch die erzeugenden Substitutionen S_i, T_i nothwendig *hyperbolische* Substitutionen sind. Sollte nämlich, wie man vielleicht denken möchte, im einzelnen Falle S_i (oder T_i) einem $\pi U_k^{\mu} \pi^{-1}$ gleich sein, so wäre diess eine zwischen den erzeugenden Substitutionen bestehende besondere Relation, und eine solche kann, wie eben bewiesen, in keinem Falle statt haben. Wir schliessen daraus noch den hübschen Satz, dass von den Begrenzungskreisen des ursprünglichen Polygons die zusammengehörigen A_i^+ und A_i^{-1} (oder auch B_i^+ und B_i^-) einander nie schneiden können. Denn A_i^+ geht aus A_i^- (wie die Figur zeigt) in der Weise vermöge der hyperbolischen Substitution S_i hervor, dass die beiden Fundamentalpunkte von S_i durch A_i^+ (d. h. durch den Vollkreis, der das Stück A_i^+ enthält) und ebenso durch A_i^- von einander getrennt werden. Uebt man aber auf einen so gelegenen Kreis die hyperbolische Substitution aus, so geht er gewiss in einen anderen über, der ihn nicht schneidet.

§ 13.

Umkehr der bisherigen Betrachtungen.

Die Voraussetzung, mit der wir in den letzten drei Paragraphen operirt haben, war die *Existenz* der η-Function (p, n, l_k). Wir werden uns jetzt fragen, ob wir den ganzen Gedankengang nicht umkehren und also jede η-Function (p, n, l_k) der in Betracht gezogenen Art a priori construiren können.

Zu dem Zwecke bemerken wir zunächst, dass mit dem ersten Fundamentalbereiche des § 10. die zugehörigen Substitutionen S, T, U und also der Gesammtverlauf der η-Function bereits gegeben sind. Denn jede dieser Substitutionen hängt, bei gegebenem Hauptkreise, von höchstens drei reellen Constanten ab; sie hat aber zwei Ecken des betreffenden Bereiches in zwei andere bestimmte Ecken desselben Bereiches überzuführen, was vier Bestimmungsstücke abgiebt und also zur Fixirung der Substitution jedenfalls ausreicht.

Aber ich sage, *dass bei richtig angenommenem Fundamentalbereiche allemal auch eine brauchbare η-Function der vorgegebenen Signatur resultirt.* Als richtig angenommen bezeichne ich dabei einen Bereich, der von Kreisbogen $A_i\pm$, $B_i\pm$, $\Lambda_k\pm$ begrenzt, Substitutionen S_i, T_i, U_k gestattet, welche den betreffenden Hauptkreis ungeändert lassen, und dabei nicht nur in den Ecken α_k die vorgeschriebenen Winkel $\frac{2\pi}{l_k}$, sondern auch als Winkelsumme der Ecken erster Art 2π besitzt.

In der That: Zuvörderst ist deutlich, dass zwischen den S, T, U in diesem Falle die früher besprochenen Relationen bestehen müssen. Denn diese waren nur eine Folge von Dem, was gerade hinsichtlich der Winkel postulirt wurde. Wir reproduciren daraufhin unseren ersten Bereich vermöge der S, T, U. Es ergiebt sich dann zunächst, dass unser ursprünglicher Bereich genau nach dem Schema des § 11. von einem Kranze neuer Bereiche umgeben ist, von denen keiner über ihn hinübergreift. Aber das Gleiche gilt dann nothwendig von jedem anderen Bereiche. Daher haben wir jedenfalls, *dass die Riemann'sche Fläche (p, n, l_k), welche durch den ersten Bereich vermöge der Zusammengehörigkeit seiner Kanten definirt wird, eine unverzweigte Function von η ist.*

Aber wird unsere Riemann'sche Fläche in Folge dessen in η *eindeutig* sein*) und wirklich den vorgegebenen *Hauptkreis* zur natürlichen Grenze haben? Ich behaupte, dass Beides in der That der Fall ist.

*) Functionen mit natürlicher Grenze können sehr wohl unverzweigt und doch nicht eindeutig zu sein, wie einfache Beispiele beweisen und im Folgenden noch öfter zur Sprache kommt. Man braucht z. B. nur den Bereich, in welchem die Function existirt, an irgend einer Stelle über sich selbst hinübergreifen zu lassen.

Und hier ist es nun, dass ich zum Beweise jene Nicht-Euklidische Maassbestimmung brauche, welche am Ende von § 7. dieses Abschnitts entwickelt wurde. Dabei beschränke ich mich, der Kürze halber, auf den Fall, dass alle Substitutionen U_k *elliptisch* sind. Sollten einige derselben parabolisch sein, so müsste man eine Hülfsbetrachtung anstellen, die derjenigen nicht unähnlich ist, welche wir am Schlusse des vorigen Paragraphen entwickelten.

Im Sinne der erwähnten Maassbestimmung sind alle aus dem ursprünglichen abzuleitenden Fundamentalbereiche congruent. Wir wollen uns nun zuvörderst die Fundamentalbereiche so angeordnet denken, wie in § 11. gegen Schluss besprochen. Sei δ die kleinste Entfernung, welche von einem Eckpunkte des einzelnen Fundamentalbereiches bis zu einem Punkte einer nicht anstossenden Begrenzungskante hinreicht. Dann hat jeder der unendlich vielen Ringe, mit denen wir successive den ersten Fundamentalbereich umgeben, eine Breite, die an keiner Stelle unter δ herabsinkt. Jeder Punkt daher, welcher in *endlicher* Entfernung von dem ursprünglichen Fundamentalbereiche angenommen werden mag, wird schliesslich von den Reproductionen des Ausgangsbereiches überdeckt, und nur der Hauptkreis selbst, als Ort der unendlich fernen Punkte, kann die natürliche Grenze der Reproductionen sein, womit also dieser Punkt erledigt ist.

Wollen wir jetzt ferner beweisen, dass unsere Riemann'sche Fläche (p, n, l_k) in η eindeutig ist, so haben wir zu zeigen, dass bei dem geschilderten Reproductionsverfahren (bei dem gewiss niemals benachbarte Bereiche übereinandergreifen können) auch nie *entfernte* Bereiche übereinandergreifen. Gesetzt, es gäbe zwei solche Bereiche Π_1 und Π_N, so würden wir zwischen dieselben eine endliche Zahl unmittelbar aufeinanderfolgender Bereiche: $\Pi_2, \Pi_3, \cdots, \Pi_{N-1}$ einschalten können. Diese Reihenfolge, welche mit ihren Endgliedern, Π_1 und Π_N, über sich selbst hinübergreift, umspannt, im Sinne unserer Maassbestimmung, jedenfalls nur einen endlichen Theil der Ebene. Nach dem, was eben bewiesen wurde, ist letzterer mit Fundamentalbereichen vollkommen ausgefüllt. Von diesen Fundamentalbereichen müssen aber zwei, welche bez. an Π_1 und Π_N angrenzen, selbst wieder übereinandergreifen. Indem wir sie an die Stelle von Π_1 und Π_N setzen und durch die Reihenfolge derjenigen Fundamentalbereiche verbinden, welche an $\Pi_2, \Pi_3, \cdots, \Pi_{N-1}$ von der Innenseite angrenzen, wiederholen wir denselben Schluss für einen Theil der Ebene, der um ein Endliches *kleiner* ist, als der gerade betrachtete. Offenbar müssen wir, so fortschreitend, schliesslich zu einem Verzweigungspunkte der η-Ebene gelangen. Ein solcher aber ist, wie wir wissen, unmöglich. Daher war unsere Voraussetzung betreffs der Π_1, Π_N unzulässig.

Hiermit aber ist die Behauptung, welche wir zu Anfang des Paragraphen voranstellten, sofern wir von der Möglichkeit parabolischer U_k absehen, in allen Stücken bewiesen.

§ 14.

Die independenten Bestimmungsstücke der η-Function mit Hauptkreis.

Auf Grund der vorangehenden Entwickelungen fragen wir jetzt zunächst, von wievielen Constanten ein geeigneter Fundamentalbereich (p, n, l_k) abhängen mag, und suchen sodann nach zweckmässigen Bestimmungsstücken der zugehörigen η-Function.

Was die erstere Frage anlangt, so können wir, bei gegebenem Hauptkreis, etwa folgendermassen vorgehen.

Sei (um die Ideen zu fixiren) $p > 0$. So beginnen wir etwa mit der Construction des ersten Quadrupels von Begrenzungskreisen: A_1^+, B_1^-, A_1^-, B_1^+. Den Kreis A_1^+ und die beiden Eckpunkte auf ihm werden wir beliebig annehmen*): vier Constante. Für B_1^- ist dann schon der erste Eckpunkt gegeben; indem wir B_1^- beliebig durch ihn hindurchlegen und auf B_1^- den zweiten Eckpunkt annehmen, verfügen wir über weitere zwei Constante. Der Kreis A_1^- ist dann, weil er durch den zweiten Eckpunkt auf B_1^- hindurchmuss, bis auf eine Constante bestimmt. Mit ihm zusammen ist dann aber auch die Substitution S_1^{-1}, durch welche A_1^- aus A_1^+ hervorgeht, fixirt. Denn wir wissen, dass sie zwei Kreise (A_1^+ und A_1^-) und insbesondere deren Schnittpunkte mit B_1^- in einander überführen muss. Vermöge S_1^{-1} erfahren wir sodann die Lage des zweiten auf A_1^- gelegenen Eckpunktes. Durch diesen muss nun B_1^+ hindurchlaufen, was abermals eine Willkürlichkeit frei lässt. Haben wir über sie verfügt, so kennen wir wieder die zugehörige Substitution (T_1) und aus ihr die Lage des zweiten Eckpunktes auf B_1^+. *Das erste Quadrupel mit seinen Endpunkten hängt also im Ganzen von* 8 *Constanten ab.*

Bei jedem weiteren Quadrupel A_i^+, B_i^-, A_i^-, B_i^+ ist diese Zahl nur 6. Denn der Anfangspunkt der ersten Seite, der beim ersten Quadrupel willkürlich war, ist bei den folgenden Quadrupeln durch den Endpunkt des jeweils vorangehenden Quadrupels mitgegeben. *So hängen also die p Quadrupel zusammen von* $6p + 2$ *Constanten ab.*

Durch den letzten Eckpunkt des letzten Quadrupels legen wir jetzt beliebig den Kreis Λ_1^+ (1 Const.) und nehmen auf ihm den zweiten Eckpunkt ebenfalls beliebig an (wieder 1 Const.). Dann ist Λ_1^- vollkommen bestimmt, weil er, durch den letzteren Punkt hin-

*) Es wird also selbstverständlich daran festgehalten, dass alle Begrenzungskreise auf dem Hauptkreise senkrecht stehen.

durchgehend, mit Λ_1^+ den Winkel $\frac{2\pi}{l_1}$ bilden soll. Ebenso ist die Substitution U_1 und also auch der zweite Eckpunkt auf Λ_1^- festgelegt. Durch letzteren Punkt hindurch construiren wir jetzt Λ_2^+, nehmen auf ihm den zweiten Eckpunkt an, etc. etc. *Die n Paare* Λ_k^+, Λ_k^- *liefern zusammen, wie man sieht,* $2n$ *Constante.*

Von den so aufgezählten $6p + 2n + 2$ Constanten gehen nun noch 3 verloren, weil unser Bereich erstens ein geschlossener sein muss, also der erste Eckpunkt des ersten Quadrupels mit dem letzten Eckpunkte auf Λ_n^- coincidiren muss (zwei Bedingungen) und überdiess als Winkelsumme der $(4p + n)$ Ecken erster Art 2π aufweisen soll (eine Bedingung).

Unser Fundamentalbereich hängt also, bei gegebenem Hauptkreise, definitiv von $6p + 2n - 1$ *willkürlichen Constanten ab.*

Aber diese Constanten sind nicht ohne Weiteres Bestimmungsstücke der η-Function. Wir müssen nämlich beachten, dass wir die Riemann'sche Fläche (p, n, l_k) bei vorgegebener η-Function noch in sehr verschiedener Weise kanonisch zerschneiden und also durch einen kanonischen Fundamentalbereich ersetzen können. Die hierin liegende Willkürlichkeit ist eine doppelte. Einmal können wir jenen Punkt O, den wir bei Construction des Schnittsystems auf der Fläche zu Grunde legten, beliebig wandern lassen. Dann aber können wir die Art und Reihenfolge der zugehörigen Querschnitte A_i, B_i, L_k in hohem Maasse abändern. Den ersteren Umstand müssen wir (da wir hier durchaus *reelle* Bestimmungsstücke abzählen) mit zwei Einheiten in Rechnung stellen. Der zweite Umstand dagegen bringt eine Reduction der Constantenzahl nicht mit sich. Denn die Anzahl der bei ihm zu unterscheidenden Möglichkeiten ist nur eine discrete. Wir wollen sogar für die Folge festsetzen (sofern nicht ausdrücklich das Gegentheil stipulirt wird), *dass wir diesen zweiten Umstand ganz ausser Acht lassen wollen.* Es kommt diess darauf hinaus, dass wir jede η-Function so oft zählen, als die zugehörige Riemann'sche Fläche in kanonischer Weise zerschnitten werden kann, oder auch — da durch die Zerschneidung jene Substitutionen S_i, T_i, U_k erst fixirt werden, aus denen sich die zugehörige Gruppe linearer Substitutionen zusammensetzt — so oft zählen, als die zugehörige Gruppe linearer Substitutionen aus Operationen S_i, T_i, U_k zusammengesetzt werden kann.

Jedenfalls haben wir: *Die einzelne* η*-Function* (p, n, l_k) *hängt bei gegebenem Hauptkreise von* $6p + 2n - 3$ *reellen Bestimmungsstücken ab.*

Es bieten sich aber auch sofort diejenigen Grössen dar, welche wir zweckmässigerweise als Bestimmungsstücke einführen. Wir wollen der Einfachheit halber den Hauptkreis mit der Axe der reellen Zahlen

zusammenfallen lassen. Dann hängt jede Substitution S_i oder T_i von drei, jede U_k (insofern sie eine primitive elliptische Substitution von der Periode l_k vorstellt) von zwei reellen und independenten Constanten ab. *Aber zwischen der S_i, T_i, U_k besteht unsere Fundamentalrelation.* Ich will annehmen, dass $p > 0$ sei*). So schreiben wir die Fundamentalrelation, indem wir einige Factoren von links nach rechts hinübersetzen, in der Art, dass etwa S_1 (oder T_1) beiderseits in der positiven ersten Potenz auftritt. Die Fundamentalrelation liefert uns dann drei lineare Gleichungen zur Bestimmung von S_1 (resp. T_1). *Daher können wir geradezu* (im Anschluss an die eben getroffene Festsetzung) *die $6p + 2n - 3$ Substitutionscoefficienten der erzeugenden Substitutionen T_1 (oder S_1), S_2, T_2, $\cdots$, S_p, T_p, U_1, U_2, $\cdots$, U_n als die willkürlichen Bestimmungsstücke der η-Function betrachten.* — Willkürlich sind die Bestimmungsstücke insofern, als sie *innerhalb gewisser Ungleichungen* sich beliebig ändern können. Diese Ungleichungen, deren arithmetische Fixirung hier unerledigt bleibt, finden ihr geometrisches Aequivalent in der Forderung, dass zu den angenommenen S_i, T_i, U_k jedesmal ein zugehöriger kanonischer Fundamentalbereich soll construirt werden können.

Wesentlich sind übrigens von den genannten $6p + 2n - 3$ Constanten nur $6p + 2n - 6$.

Denn wir werden weiterhin alle solche η-Functionen im Wesentlichen als identisch betrachten, welche linear von einander abhängen. Nun verlegten wir bereits den Hauptkreis der η-Functionen in die Axe der reellen Zahlen. Aber diese selbst geht noch durch dreifach unendlich viele Transformationen in sich über. Indem wir dieselben zu Hülfe nehmen, können wir z. B. bestimmen, dass von den Fundamentalpunkten unserer erzeugenden Substitutionen bestimmte drei in 0, 1, ∞ fallen sollen. Dadurch kommen dann in der That von den früher aufgezählten (reellen) Constanten drei weitere noch in Abzug. Die übrigen $6p + 2n - 6$ bleiben in dem erwähnten Sinne unabhängig.

§ 15.

Die Variation der Constanten, an einem Beispiele erläutert.

Die Constanten, welche wir soeben zur Bestimmung der η-Function einführten, sind ihrer Bedeutung nach zuvörderst wesentlich *reelle* Grössen. Aber es liegt nahe, zu fragen, was die Bedeutung sein mag, wenn wir ihnen gestatten, *complexe* Werthe anzunehmen. Wird der Gruppe, die aus den S_i, T_i, U_k durch Combination entsteht, auch

*) Den Fall $p = 0$, der auch nicht schwer zu behandeln ist, übergehe ich der Kürze wegen.

dann noch eine brauchbare Gebietseintheilung entsprechen? Wir finden, dass diess in der That der Fall ist, so lange die Umänderung der Constanten nicht sehr beträchtlich ist. *Es tritt nun an die Stelle des früheren Hauptkreises eine andere, nicht analytische, Begrenzungslinie und die hyperbolischen Substitutionen der Gruppe sind, allgemein zu reden, in loxodromische übergegangen.*

Um diese etwas unbestimmt gefasste Aussage zu verstehen, betrachten wir ein möglichst einfaches Beispiel. Ich wähle hierzu diejenige symmetrische Gruppe, welche aus einem Kreisbogenpolygone, dessen sämmtliche Winkel gleich Null sind, durch fortgesetzte Spiegelung entsteht. Sind sämmtliche Begrenzungskreise des Polygons gegen einen Hauptkreis senkrecht, so entsteht bei diesem Spiegelungsverfahren gewiss eine brauchbare Gebietseintheilung, wie diess oben (§ 8) in allgemeinerer Fassung schon bemerkt wurde. Der Hauptkreis, welcher seinerseits bei allen Spiegelungen invariant bleibt, giebt dabei die natürliche Grenze der fortgesetzten Reproductionen ab. Es mag dieser Fall durch das Kreisbogensechseck der Figur 11 auf Tafel 2 erläutert sein. Ich habe dabei, um den Vergleich mit den folgenden Fällen zu erleichtern, die Begrenzungskreise über den Hauptkreis hinaus vollständig ausgezogen.

Wir modificiren jetzt (um bei dem Beispiele der Figur zu bleiben) unser Kreisbogensechseck, zunächst etwa in der Art, wie Figur 12 angiebt. Die Begrenzungskreise haben jetzt keineswegs mehr einen gemeinsamen Orthogonalkreis. Aber die Figur ist der früheren doch dadurch noch ähnlich, dass nicht auf einander folgende Begrenzungskreise sich überhaupt nicht treffen. *Hieraus folgt unmittelbar, dass die Reproductionen unseres Polygons, wie in dem früheren Falle einen einfach zusammenhängenden (aber allerdings nicht kreisförmigen) Bereich bedecken, der nirgendwo über sich selbst hinübergreift.* Denn so oft wir an einem der Begrenzungskreise des ursprünglichen Sechsecks oder irgend eines der aus ihm abgeleiteten spiegeln, das Spiegelbild nicht nur der angrenzenden Sechsecks sondern auch aller übrigen Begrenzungskreise fällt in das Innere des spiegelnden Kreises hinein und collidirt also weder mit dem angrenzenden Sechseck, noch mit irgend einem früheren, das wir bereits durch anderweitige Spiegelung construirt haben mögen. — Was die natürliche Grenze angeht, der diese fortgesetzten Reproductionen zustreben, so können wir beliebig viele Punkte derselben construiren: die Berührungspunkte nämlich auf einander folgender Begrenzungskreise irgend eines an der Figur betheiligten Sechsecks. Diese Grenze ist natürlich in keiner Weise mehr eine *analytische* Curve.

Wie aber, wenn wir das Sechseck weiter deformiren und also den Begrenzungskreisen gestatten, zum Theil übereinanderzugreifen?

Unmittelbar auf einander folgende Sechsecke werden sich auch dann noch lückenlos neben einander legen und die durch den Fundamentalbereich versinnlichte Riemann'sche Fläche wird nach wie vor eine *unverzweigte* Function jener Variabelen η sein, in deren Ebene wir unsere Sechsecke construiren. *Aber sie wird, von besonderen Fällen abgesehen, keineswegs mehr eine eindeutige Function sein.* Man versuche etwa, sich die Gesammtheit der Reproductionen des Sechsecks in Figur 13 vorzustellen. — Ein noch frappanteres (aber weniger übersichtliches) Beispiel würde man erhalten, wenn man dem ursprünglichen Sechsecke selbst bereits eine solche Gestalt ertheilt hätte, dass es für sich genommen einen Theil der Ebene doppelt überdeckt.

In derselben Weise nun, wie hier im Beispiele, müssen wir uns die Sache allgemein denken. Indem wir die Constanten einer η-Function p, n, l_k, unter Festhaltung dieser Signatur, complex lassen werden, behalten wir fürs Erste noch eine brauchbare Gebietseintheilung. Es greifen nur die fortgesetzten Reproductionen des ursprünglichen Fundamentalbereichs, sozusagen, über den Hauptkreis hinaus oder bleiben, an anderen Stellen, hinter ihm zurück: die natürliche Grenze aber, der sie zustreben, ist zuvörderst noch eine einheitliche Contour, welche sich selbst nicht schneidet.

Auf eine genauere Untersuchung der Ungleichungen, denen unsere complexen Constanten genügen müssen, damit die natürliche Grenze den angegebenen Charakter behält, gehe ich an dieser Stelle nicht ein*). Es muss genügen, die allgemeine Möglichkeit gewisser η-Functionen bezeichnet zu haben. Wir sehen, dass es bei gegebenen p, n, l_k eine unendliche Anzahl brauchbarer Gebietseintheilungen sozusagen von demselben *Typus* giebt; unter ihnen bilden die Gruppen mit Hauptkreis, die wir seither allein betrachteten, wie ich fortan sagen will, den *Normalfall.* Offenbar sind unter den eindeutig umkehrbaren η-Functionen derselben Signatur p, n, l_k die hier in Betracht gezogenen dadurch charakterisirt, dass ihnen nicht nur ein *einfach zusammenhängender* Fundamentalbereich eignet, sondern dass auch von der Gesammtheit der Fundamentalbereiche ein *einfach*

*) Was die explicite Formulirung derartiger Ungleichungen betrifft, so möchte ich hier auf die schon oben genannten Untersuchungen von Herrn Rausenberger im 20ten und 21ten Bande der Annalen verweisen. Uebrigens subsumiren sich seine Gruppen weder sämmtlich unter die hier im Texte betrachteten noch auch unter die anderen, welche im folgenden Paragraphen durch Ineinanderschiebung hergestellt werden. Man kann seine Ausgangsgruppen alle dadurch erhalten, dass man ein Kreisbogendreieck mit *reellen* oder beliebig *imaginären* Winkeln durch Spiegelung vervielfältigt (wobei die reellen Winkel natürlich ganzzahlige Theile von π sein müssen). Hernach dürfen die reellen Constanten, welche zur Fixirung der imaginären Winkel dienen, ins Complexe hinein variirt werden.

zusammenhängendes Flächenstück überdeckt wird. Dem entspricht, dass zwischen ihren erzeugenden Substitutionen S_i, T_i, U_k keine anderen Relationen existiren und überhaupt für sie ganz ähnliche Betrachtungen gelten, wie wir sie in § 12 für die Gruppen mit Hauptkreis dargelegt haben.

Wollen wir andere eindeutig umkehrbare η-Functionen finden, so müssen wir also dafür sorgen, dass entweder bereits der ursprüngliche Fundamentalbereich in der η-Ebene einen mehrfachen Zusammenhang hat, oder doch, dass ein mehrfacher Zusammenhang bei den Reproductionen desselben resultirt. Ich erläutere im folgenden Paragraphen einen Process, der uns mit unendlich vielen neuen η-Functionen der ersteren Art versieht. Es sind diess die allgemeinsten η-Functionen, mit denen ich mich im vorliegenden Aufsatze beschäftigen will, und mit ihrer Besprechung (§ 16–18) schliesst daher der gegenwärtige Abschnitt.

§ 16.

Der Process der Ineinanderschiebung.

Neben den Gruppen des vorangehenden Paragraphen, denen wir alle diejenigen zuzählen wollen, die wir in § 6 besprochen haben, kennen wir von früher her noch jene einfachen discontinuirlichen Gruppen, welche durch Wiederholung einer einzelnen linearen Substitution erzeugt werden. Ist diese Substitution *elliptisch* oder *parabolisch*, so ist der Fundamentalbereich eine Sichel, hat also ebenfalls den Zusammenhang Eins. Dagegen wird der Fundamentalbereich ringförmig und somit zweifach zusammenhängend, wenn die Substitution *hyperbolisch* oder *loxodromisch* ist.

Es giebt nun einen allgemeinen Process, vermöge dessen wir aus irgendwie vorgegebenen brauchbaren Gruppen andere, gleichfalls brauchbare zusammensetzen können, deren Fundamentalbereich einen beliebig hohen Zusammenhang aufweist. *Man grenze nämlich ein Stück der η-Ebene durch mehrere solche Contouren ab, wie sie, einzeln genommen, vermöge der Substitutionen der vorgegebenen Gruppen, als Begrenzung zugehöriger Fundamentalbereiche auftreten können. Combinirt man dann die auf die verschiedenen Contouren bezüglichen erzeugenden Substitutionen, so entsteht von selbst eine brauchbare Gebietseintheilung, deren erster Fundamentalbereich jenes abgegrenzte Stück ist.*

Ich bezeichne dieses Verfahren als *Ineinanderschiebung*, und erläutere dasselbe zunächst an einigen Beispielen*).

Wir betrachten zuvörderst etwa (Figur 14) einen solchen Theil

*) Eben hier kommt die Anschauungsweise zur Geltung, welche durch die Figuren 2, 3, 5, 6, 10 entwickelt werden sollte.

der η-Ebene, welcher durch zwei Kreispaare: R_1', R_1'' und R_2', R_2'', begrenzt ist. Die Kreise R_1' und R_1'', sowie R_2' und R_2'' (die in der Figur durch Pfeile verbunden sind) ordnen wir je durch eine hyperbolische oder loxodromische Substitution, S_1 bez. S_2 zusammen, so zwar, dass unser Gebiet ein gemeinsames Stück der beiden ringförmigen, auf letztere Substitutionen bezüglichen Fundamentalbereiche ist. Dann finden die Gebiete $S_1^{\pm\alpha}$, $S_2^{\pm\beta}$, welche wir aus dem vorgegebenen Bereiche durch positive oder negative Anwendung der einzelnen erzeugenden Substitution ableiten können, gewiss lückenlos neben einander Platz: die ersteren sind den aufeinanderfolgenden Werthen von α entsprechend alle in R_1', bez. R_1'' eingeschlossen, die anderen in R_2', bez. R_2'', je nach den Werthen von $\pm\beta$. *Aber jedes dieser neuen Gebiete trägt in seinem Inneren wieder zwei kreisförmige Oeffnungen.* Und in diese Oeffnungen hinein legen sich, wiederum in lückenloser Aufeinanderfolge, die Gebiete $S_1^{\pm\alpha} S_2^{\pm\beta}$, bez. $S_2^{\pm\beta} S_1^{\pm\alpha}$; die ersteren sind jeweils in ein bestimmtes $S_2^{\pm\beta}$, die anderen in ein bestimmtes $S_1^{\pm\alpha}$ eingeschlossen. *Innerhalb der so gewonnenen Gebiete finden nun wieder die neuen* $S_2^{\pm\beta} S_1^{\pm\alpha} S_2^{\pm\beta}$ *resp.* $S_1^{\pm\alpha} S_2^{\pm\beta} S_1^{\pm\alpha}$ *Platz.* Und so geht der Process fort in's Unendliche. Eine Collision kann niemals eintreten, weil die neu construirten Bereiche immer solche Theile der η-Ebene überdecken, welche bis dahin noch nicht benutzt waren. Daher erzielen wir eine in der That brauchbare Gebietseintheilung. Alle Substitutionen der zugehörigen Gruppe sind loxodromisch (oder hyperbolisch) und die unendlich vielen, übrigens zerstreut liegenden Fundamentalpunkte dieser Substitutionen sind es, welche als natürliche Grenze des von den Fundamentalbereichen überdeckten Gesammtgebietes zu gelten haben.

Nicht anders ist die Sache, wenn wir als Ausgangsbereich z. B. denjenigen Raum nehmen, der nach Art von Figur 15 zwei *Sicheln* gemeinsam ist. Die eine mag die Winkelöffnung $\frac{2\pi}{m}$, die andere die Oeffnung $\frac{2\pi}{n}$ besitzen, unter m, n ganze Zahlen verstanden; die zugehörigen Substitutionen, welche in der Figur durch Pfeile angedeutet sind, mögen Σ_1, Σ_2 heissen. Wir verfahren dann genau so, wie eben mit den S_1, S_2. Nur haben wir jetzt die Relationen $\Sigma_1^m = 1$, $\Sigma_2^n = 1$ und können dementsprechend die Exponenten $\pm\alpha$, $\pm\beta$ auf den Spielraum von 0 bis $(m-1)$, resp. von 0 bis $(n-1)$ beschränken. Es ist wohl kaum nöthig, den ganzen Process hier noch einmal geometrisch zu schildern. In gewissen Eckpunkten laufen nun jedesmal m Sicheln, in anderen n zusammen. Die zugehörige Gruppe enthält jetzt unendlich viele elliptische Substitutionen, aber keine anderen als diejenigen, die sich in der Gestalt $\pi \Sigma_1^{\alpha} \pi^{-1}$, oder $\pi \Sigma_2^{\beta} \pi^{-1}$ darstellen. Die natürliche Grenze für die Gesammtheit der Fundamental-

bereiche wird wiederum von den Fundamentalpunkten derjenigen hyperbolischen oder loxodromischen Substitutionen gebildet, die an der Gruppe participiren. —

Nehmen wir endlich an (wobei ich keine nähere Specification eintreten lassen will), dass irgend eine Gruppe mit reellem Hauptkreis bei dem Ineinanderschiebungsprocesse betheiligt sei*). So wird auch dieser Kreis selbst bei den fortgesetzten Reproductionen des ursprünglichen Fundamentalbereiches unendlich oft vervielfältigt werden. Das Gebiet also, welches von der Gesammtheit der Fundamentalbereiche überdeckt wird, zählt unter den Bestandtheilen seiner natürlichen Grenze neben anderen hier nicht näher bezeichneten Stücken jedenfalls unendlich viele Kreislinien. —

Diese Beispiele werden genügen, um den Begriff der Ineinanderschiebung beliebiger Theilgruppen geläufig zu machen. Wir wenden denselben nunmehr auf beliebige Zusammenstellungen der eben aufgezählten uns bekannten Gruppen an. Dabei lassen wir, in Uebereinstimmung mit früheren Festsetzungen, nur *die* Beschränkung eintreten, dass immer bloss eine *endliche* Zahl von Theilgruppen combinirt werden soll. Die neu entstehenden Gruppen, resp. Gebietseintheilungen, ordnen wir nach *Typen*, indem wir alle solche Gruppen zu demselben Typus rechnen, deren einzelne Theilgruppen resp. demselben Typus angehören. Innerhalb des einzelnen Typus bilden diejenigen Gruppen den *Normalfall*, welche, neben beliebig vielen isolirten Substitutionen, nur Theilgruppen mit Hauptkreis enthalten.

Es gilt jetzt, die Riemann'sche Fläche zu charakterisiren, welche der einzelnen so erzeugten discontinuirlichen Gruppe entspricht, und zugleich anzugeben, wie sich auf ihr unser η, als complexe Function des Ortes aufgefasst, verhält.

§ 17.

Die neue η-Function auf der zugehörigen Riemann'schen Fläche.

Ich will annehmen, dass folgende Gruppen durch Ineinanderschiebung vereinigt wurden: zunächst q Gruppen, welche aus einer einzelnen elliptischen oder parabolischen Substitution, dann ferner r Gruppen, welche aus einer einzelnen hyperbolischen oder loxodromischen Substitution durch Wiederholung erwachsen, endlich aber s Gruppen vom Hauptkreistypus, die also entweder selbst einen Hauptkreis besitzen oder aus einer Gruppe mit Hauptkreis durch Variation der Constanten abgeleitet wurden. Die einzelne Gruppe unter den

*) Vielleicht ist es nützlich, auch solche Beispiele durchzudenken, wo der Hauptkreis imaginär oder in einen Punkt ausgeartet ist.

letztgenannten mag die Signatur π, ν besitzen (wo ich also die früheren lateinischen Buchstaben durch griechische ersetzt und der Kürze halber die Indices der einzelnen Verzweigungspunkte fortgelassen habe). Dann ist der Fundamentalbereich in der η-Ebene von $q + 2r + s$ verschiedenen Curven begrenzt. Jede Curve der ersten Art besteht aus zwei Stücken Q', Q'', welche, für sich genommen, eine Sichel von einer gewissen Winkelöffnung begrenzen*). Die $2r$ Curven zweiter Art gehören paarweise als R' und R'' vermöge der betreffenden hyperbolischen oder loxodromischen Substitution zusammen (vergl. noch einmal Fig. 14). Endlich die s Curven der letzten Art bestehen nach dem in § 10. geschilderten Schema aus $4\pi + 2\nu$ paarweise zusammengehörigen Stücken, die wir kurzweg wieder mit $A_i\pm$, $B_i\pm$, $\Lambda_k\pm$ bezeichnen mögen. — Den so definirten Fundamentalbereich denken wir uns nun durch eine äquivalente Riemann'sche Fläche ersetzt. So entspricht dem Linienpaare Q', Q'' je ein *Einschnitt* Q, der von einem beliebigen Punkte der Fläche beginnend zu einem anderen hinläuft: die beiden Endpunkte des einzelnen Einschnittes sind Verzweigungspunkte unserer η-Function. Den zusammengehörigen R', R'' dagegen correspondiren gewisse r auf der Fläche verlaufende und dieselbe nicht zerstückende *Rückkehrschnitte* R. Endlich jeder der weiteren Begrenzungscurven (π, ν) entspricht ein ganzes auf der Fläche befindliches *Schnittsystem*, welches in der früher beschriebenen Art einmal aus 2π Querschnitten A_i, B_i besteht, die von einem gewissen Punkte O auslaufend später in denselben wieder einmünden, dann aber aus ν Einschnitten, die von demselben Punkte O aus sich nach ν Verzweigungspunkten der η-Function hinziehen. *Hiernach haben wir, unter n die Gesammtzahl der Verzweigungspunkte unserer η-Function verstanden, sofort die folgende erste Formel:*

$$n = 2q + \sum \nu.$$

Des Ferneren berechnen wir [nach § 4. des ersten Abschnitts] das Geschlecht p der Riemann'schen Fläche folgendermassen. Unser Fundamentalbereich hat als schlichtes Stück der Ebene eine Grundzahl, welche der Anzahl $q + 2r + s$ der Begrenzungscurven gleichkommt. Aber die Grundzahl unserer Riemann'schen Fläche, die wir gleich $2p$ setzen, wird durch jeden Einschnitt Q um eine Einheit vermehrt und durch jedes Schnittsystem (π, ν) um $(2\pi - 1)$ vermindert. Die Rückkehrschnitte R sind auf die Grundzahl ohne Einfluss. *Daher folgt:*

$$2p = (q + 2r + s) - q + \sum_1^s (2\pi - 1),$$

*) Ich nenne diese Stücke Q', Q'' nicht ausdrücklich *Kreisbogen*, weil es mit Rücksicht auf die anderen Begrenzungsstücke bequem sein kann, ihnen eine andere Form zu ertheilen. Aehnliche Bewandtniss hat es mit der R', R'' etc.

oder kürzer geschrieben:

$$p = r + \sum_{1}^{s} \pi.$$

Wir fragen nun billig, wodurch sich die neue η-Function (p, n) von den früheren mit der gleichen Signatur unterscheidet. In dieser Hinsicht betonten wir schon oben, dass jetzt der Fundamentalbereich in der η-Ebene *mehrfach* zusammenhängend ist, während er es früher nicht war. *In Folge dessen giebt es jetzt auf der Riemann'schen Fläche p, n gewisse geschlossene, sich selbst nicht schneidende Wege, die sich nicht auf einen einzelnen Punkt zusammenziehen lassen und bei deren Durchlaufung sich η trotzdem identisch reproducirt.* Als solche Wege finden wir zunächst diejenigen, die um einen einzelnen Einschnitt Q herumlaufen, dann ferner die Rückkehrschnitte R selbst, endlich diejenigen Curven, welche das einzelne Schnittsystem (π, ν) umgeben. Von diesen Curven kann übrigens noch eine weggelassen werden. Denn eine Durchlaufung aller der genannten Curven hintereinander ist offenbar auf der Fläche mit der Umkreisung eines einzelnen Punktes äquivalent. *Diesem Verhalten entsprechend haben wir jetzt nur* $q + r + \sum_{1}^{s} (2\pi + n)$ *erzeugende Substitutionen und zwischen ihnen s Relationen vom Typus der früheren Fundamentalrelation.* Denn für die erzeugenden Substitutionen jeder Theilgruppe (π, ν) ergiebt sich jetzt eine solche Beziehung, indem wir den zugehörigen Punkt O auf der Riemann'schen Fläche umkreisen. Hierzu treten dann noch die weiteren Relationen, welche die Periodicität gewisser elliptischer Substitutionen aussagen.

Wir präcisiren zugleich den Unterschied, der zwischen den hier erzeugten η-Functionen und den allgemeinsten von derselben Signatur, die eindeutige Umkehrung gestatten, bestehen wird. Dieser Unterschied wurde schon in § 15. angedeutet. Unsere neuen η-Functionen haben Fundamentalbereiche von beliebig hohem Zusammenhange, aber es entstehen keine neuen Zusammenhänge, wenn wir den Fundamentalbereich vervielfältigen. Es kommt diess darauf hinaus, dass unter den Substitutionen der zugehörigen Gruppe keine anderen elliptisch oder parabolisch sind, als diejenigen, denen auf unserer Riemann'schen Fläche eine Umkreisung des einzelnen Verzweigungspunktes entspricht, und dass überhaupt für sie keine anderen Relationen statt haben, als die soeben angegebenen. [Man zeigt diess ganz ähnlich, wie es betreffs der η-Function mit Hauptkreis in § 12. geschehen ist]. Für die allgemeinsten eindeutig umkehrbaren η-Functionen müssen wir aber eine solche Möglichkeit offenhalten. Inzwischen gehen wir auf genauere Untersuchung in der hiermit angedeuteten Richtung an dieser Stelle nicht ein.

§ 18.

Constantenzahl des jeweiligen Normalfalles.

Wir bestimmen zum Schlusse noch, wie gross die Anzahl der Constanten ist, von denen die neue η-Function (p, n) im Normalfalle abhängt. Im genauen Anschlusse an die Entwickelungen des § 14. wollen wir dabei jede η-Function so oft zählen, als die zugehörige Riemann'sche Fläche (p, n) in verschiedener Weise den Vorstellungen des § 15. entsprechend zerschnitten werden kann. *Wir betrachten also geradezu als Bestimmungsstücke der η-Function diejenigen Coefficienten der zugehörigen erzeugenden Substitutionen, welche unabhängig bleiben, nachdem wir die zwischen den Substitutionen bestehenden Relationen identisch erfüllt haben.*

Für die einzelne Gruppe mit Hauptkreis fanden wir in § 14., unter (π, ν) die Signatur der Gruppe verstanden und übrigens unter der Voraussetzung, dass der Hauptkreis mit der Axe der reellen Zahlen coincidire, $6\pi + 2\nu - 3$ reelle Bestimmungsstücke. Diesen haben wir jetzt 3 weitere hinzuzufügen, da wir dem einzelnen Hauptkreise zuvörderst eine beliebige Lage ertheilen müssen. So kommen auf Rechnung der verschiedenen Gruppen mit Hauptkreis, die wir dem Ineinanderschiebungsprocesse unterworfen haben, $6\Sigma\pi + 2\Sigma\nu$ reelle Constante. Die q elliptischen (oder parabolischen) Substitutionen, welche beim Ineinanderschiebungsprocesse betheiligt sind, bringen ihrerseits $2q$, die r loxodromischen Substitutionen $3r$ Constante, aber *complexe* Constante mit sich. Da wir übrigens durchaus reelle Bestimmungsstücke zählen, werden wir beide zusammen als $(4q + 6r)$ in Rechnung stellen. Nun ist, dem vorigen Paragraphen zufolge, $(r + \Sigma\pi) = p$ und $(2q + \Sigma\nu) = n$. Daher haben wir im Ganzen $6p + 2n$ Constante. Aber von ihnen werden wir noch 6 Einheiten als unwesentlich in Abzug bringen, indem wir nämlich, wie in § 14., alle derartige η-Functionen als identisch erachten, welche linear von einander abhängen, jetzt aber die in $\frac{\alpha\eta + \beta}{\gamma\eta + \delta}$ enthaltenen Constanten als complex betrachten müssen. Daher haben wir schliesslich:

Die Anzahl der reellen Constanten, von denen eine Normalgruppe (p, n) abhängt, ist, unabhängig von dem Typus, welchem die Gruppe angehören mag, gleich $(6p + 2n - 6)$.

Diese Constanten müssen natürlich wieder gewissen Ungleichungen genügen. Zu den Ungleichungen, welche wir oben bei der einzelnen Gruppe mit Hauptkreis andeuteten, treten hier weitere, von denen die einen aussagen, dass gewisse einzelne Substitutionen loxodromisch (oder hyperbolisch) sind, während sich die anderen auf die gegenseitige Stellung der Theilgruppen beziehen, die nothwendig ist, damit der

Process der Ineinanderschiebung Platz greifen kann. Auf eine nähere Discussion dieser Ungleichungen gehe ich aber hier ebenso wenig ein, als es früher bei den analogen Fragen geschehen ist.

Abschnitt IV.

Das Fundamentaltheorem.

§ 1.

Formulirung desselben.

Das allgemeine Theorem, welches ich nunmehr aussprechen werde und das ich wegen seiner Wichtigkeit (die im folgenden Abschnitte noch ausführlicher erläutert werden soll) das *Fundamentaltheorem* nenne, wird durch die eben bestimmte Zahl reeller Constanten: $(6p+2n-6)$ nahe gelegt. Es ist diess genau dieselbe Anzahl reeller Constanten, von der eine beliebige Riemann'sche Fläche des Geschlechtes p mit n nach Willkür auf ihr angenommenen Punkten abhängt; man hat sich nur zu erinnern, dass die $3p-3$ *Moduln*, welche man, der gewöhnlichen Sprechweise nach, der Fläche beilegt, allgemein zu reden, complexe Grössen sind*). Die Frage ist, auf welchen Riemann'schen Flächen des Geschlechtes p mit n vorgegebenen Verzweigungspunkten von bestimmtem Index Normalfunctionen**) η von einem gewissen Typus existiren mögen. Der Typus wird festgelegt, indem wir auf unserer Fläche gewisse Paare von Verzweigungspunkten durch Einschnitte Q verbinden, dann irgendwelche, die Fläche nicht zerstückende Rückkehrschnitte R hinzufügen und endlich soviele Schnittsysteme (π, ν) construiren, dass die zerschnittene Fläche durchaus schlicht auf ein Stück der Ebene übertragen werden kann. Functionen η, welche linear von einander abhängen, will ich der Kürze halber wieder als identisch betrachten. Dann besagt unser Fundamentaltheorem:

Dass auf jeder Riemann'schen Fläche (p, n, l_k) immer eine und nur eine Normalfunction von beliebig vorgegebenem Typus existirt.

Zwei Specialfälle dieses Theorems mögen als besonders wichtig gleich hier hervorgehoben werden.

Der erste Fall sei derjenige, in welchem die Einschnitte Q und die Rückkehrschnitte R überhaupt in Wegfall kommen, die Schnittsysteme (π, ν) aber sich auf ein einziges reduciren, welches mit (p, n) zu bezeichnen sein wird. Dann ist also das zugehörige η eine Func-

*) Der leichteren Ausdrucksweise wegen schliesse ich im Texte wieder die einfachsten Fälle $p = 0, 1$ aus.

**) Befindet sich η, wie ich früher sagte, im Normalfall, so nenne ich es hier kurz eine Normalfunction.

tion mit festem Hauptkreis. Zugleich können wir von der speciellen Art der Zerschneidung hier durchaus absehen. Denn eine Umänderung des Schnittsystems bedeutet im vorliegenden Falle nur, dass die erzeugenden Substitutionen jener Gruppe, die zu η gehört, in anderer und anderer Weise gewählt werden, nicht aber, dass η selbst modificirt wird. Daher will ich ein solches η an dieser Stelle als *Hauptfunction* bezeichnen, übrigens im Folgenden durch einen Index 1 (η_1) kenntlich machen. Wir haben:

Auf jeder Riemann'schen Fläche (p, n, l_k) *giebt es eine und nur eine Hauptfunction.*

Es ist diess derjenige Specialfall des vorhin ausgesprochenen, allgemeinen Fundamentaltheorems, den ich in meiner zweiten Note über eindeutige Functionen mit linearen Transformationen in sich (Bd. XX dieser Annalen, pag. 49—51, dat. 27. 3. 82) mitgetheilt habe. Allerdings wurden dort der Einfachheit halber alle Indices l_k unendlich gesetzt und also nur von logarithmischen Verzweigungspunkten gesprochen. Dass die Indices der Verzweigungspunkte irgend welche sein können, hat Hr. Poincaré in seiner bezüglichen Note vom 10. April 1882 (Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, t. 94) hervorgehoben. In dem besonderen Falle $p = 0$ hatte Hr. Poincaré die Existenz der Hauptfunction schon vor längerer Zeit erkannt, man sehe die aufeinanderfolgenden und immer allgemeiner werdenden Angaben vom 18. April und 8. August 1881 (Comptes Rendus t. 92, 93) sowie in Nr. 10 seines Annalenaufsatzes (Bd. XIX, pag. 561, dat. 17. Dec. 1881).

Der zweite Specialfall unseres Fundamentaltheorems, der hier zur Sprache gebracht werden soll, ist derjenige, in welchem die Theilgruppen mit Hauptkreis überhaupt in Wegfall kommen, also, auf der Riemann'schen Fläche, nur die Einschnitte Q und im Ganzen p Rückkehrschnitte R vorhanden sind. Unser Satz behauptet:

Dass es allemal eine auf der so zerschnittenen Fläche eindeutige, eindeutig umkehrbare η*-Function giebt, welche bei Ueberschreitung der* Q *elliptische Substitutionen von resp. vorgegebener Periode erleidet.*

Diese Art von η-Function soll weiterhin mit η_2 bezeichnet werden. Auf ihre Existenz bezieht sich die erste der beiden von mir über eindeutige Functionen mit linearen Transformationen in sich veröffentlichten Noten (Annalen t. XIX, pag. 565—568, dat. 12. 1. 82). Ich habe dort nur, um die Sache etwas zu vereinfachen, jene Einschnitte Q, die wir auf der Riemann'schen Fläche beliebig construiren können, überhaupt weggelassen und also nur von irgend p auf der Fläche verlaufenden und dieselbe nicht zerstückenden Rückkehrschnitten gesprochen.

§ 2.

Ansatz zum Beweise.

Um für das hiermit formulirte Fundamentaltheorem wo nicht einen expliciten Beweis, so doch die allgemeinen Beweisgründe zu geben, verwende ich Vorstellungen der Mannigfaltigkeitslehre. Wir haben einerseits die Riemann'schen Flächen (p, n, l_k), die wir uns nach bestimmtem Typus zerschnitten denken. Sie bilden eine erste Mannigfaltigkeit M_1. Die Gestalt der einzelnen Querschnitte, sowie die Lage jener Punkte O, von denen aus sich die einzelnen Schnitte eines Systemes (π, ν) erstrecken werden, bringen wir bei dieser Auffassung nicht mit in Rechnung. Wohl aber zählen wir zwei Schnittsysteme auf derselben Fläche, auch wenn sie für die schliesslich in Betracht kommende η-Function äquivalent sein mögen, allemal dann als unterschiedene Individua von M_1, wenn sie sich nicht durch stetige Verschiebung über die Fläche hin zur Deckung bringen lassen. — Wir haben andererseits die Gesammtheit der zu dem betreffenden Typus gehörigen Normalfunctionen η, deren einzelne wir in Uebereinstimmung mit dem gerade Gesagten, und übrigens auch mit den früheren Festsetzungen, so oft zählen werden, als die zugehörige Gruppe linearer Substitutionen in der früher geschilderten Weise aus erzeugenden Substitutionen zusammengesetzt werden kann. Die so gezählten η-Functionen bilden eine zweite Mannigfaltigkeit, M_2.

Die im vorigen Abschnitte gegebene Constantenzählung zeigt, dass M_1 und M_2 gleich viele Dimensionen haben (nämlich $6p - 6 + 2n$). Zudem sieht man mit leichter Ueberlegung, dass jede Mannigfaltigkeit, für sich genommen, ein einziges, zusammenhängendes Ganze bildet. Hinsichtlich der M_2 ist diess auf Grund der früheren Entwickelungen an sich klar. Denn wir können die einzelnen Theilgruppen, die, ineinandergeschoben, unsere Gruppe erzeugen, einzeln so variiren und übrigens in ihrer Stellung derart gegen einander verschieben, dass eine beliebige andere Gruppe desselben Typus resultirt. Hinsichtlich der M_1 aber beweist man es (wenn man es nicht als bekannt ansehen will) durch folgende Betrachtung der Analysis situs. Es soll möglich sein, jede Fläche (p, n) mit irgend vorgegebener Zerschneidung in jede andere desselben Typus derart continuirlich überzuführen, dass die zweierlei Zerschneidungen zur Deckung kommen. Zu dem Zwecke ergänze man die auf den beiden Flächen vorgegebenen Schnittsysteme in der Weise durch weitere an correspondirenden Stellen eingeschaltete Schnitte, dass zwei einfach zusammenhängende Flächen entstehen, deren Randcurven in genau derselben Reihenfolge aus gewissen, paarweise zusammengehörigen Stücken bestehen. Diese beiden Flächen bilde man jetzt je auf eine Kreisfläche conform ab. Die Peripherie

des einzelnen Kreises wird dann in eine Anzahl Stücke zerlegt erscheinen, die paarweise durch irgend ein analytisches Gesetz zusammengeordnet sind. Und zwar ist die Aufeinanderfolge der zusammengehörigen Stücke bei beiden Kreisen genau dieselbe. Wir denken uns jetzt, dass der einzelne Kreis (im Sinne der Entwickelungen des ersten, hier vorangehenden Abschnittes) vermöge der Zusammengehörigkeit seiner Peripheriestücke die betreffende Riemann'sche Fläche (p, n) als Fundamentalbereich vertritt. Wir haben also nur zu zeigen, dass man, durch allmähliche Aenderung der Constanten, die eine Kreisfläche mitsammt der Zuordnung ihrer einzelnen Peripheriestücke in die andere Kreisfläche und deren Zuordnung überführen kann. Diess aber ist anschauungsmässig evident.

Auf Grund des hiermit Gesagten stellt sich unsere Aufgabe jetzt folgendermassen. Aus dem ersten Abschnitte des Früheren wissen wir, dass jedem Individuum in M_2 ein und nur ein Individuum in M_1 entspricht. *Es gilt zu zeigen, dass umgekehrt jedem Individuum von* M_1 *ein und nur ein Individuum in* M_2 *correspondirt.*

Hierzu entwickele ich im folgenden Paragraphen zuvörderst einen Hülfssatz, welcher zeigt, dass niemals *mehrere* Individua in M_2 ein und demselben Individuum in M_2 entsprechen können.

Sodann bringt § 4. die allgemeinen Continuitätsgründe, aus denen ich glaube, unser Fundamentaltheorem erschliessen zu können.

§ 3.

Hülfssatz, betreffend die Eindeutigkeit der Beziehung.

Ich werde jetzt, wie in Aussicht gestellt, zuvörderst nachweisen, *dass auf einer in bestimmter Weise zerschnittenen Fläche* (p, n, l_k) *immer nur eine zugehörige Normalfunction* η *existiren kann.* Was die Formulirung dieser Behauptung angeht, so erinnere ich an die frühere Verabredung, derzufolge zwei η-Functionen, welche linear von einander abhängen, schlechthin als identisch bezeichnet werden sollen.

Zum Beweise denke man sich die vorgegebene und in bestimmter Weise zerschnittene Riemann'sche Fläche auf die Ebenen beider Variabeln η, η' (deren Existenz wir hier voraussetzen mögen) simultan abgebildet. Wir erhalten dann in den zweierlei Ebenen zwei erste Fundamentalbereiche, die ausnahmslos conform und zwar in der Weise auf einander bezogen sind, dass der analytischen Fortsetzung des einen, die durch geeignete lineare Substitution des η bewirkt wird, genau diejenige analytische Fortsetzung des anderen entspricht, welche vermöge der correspondirenden linearen Substitution des η resultirt. Indem wir jetzt den Process der analytischen Fortsetzung, so wie er durch die erzeugenden linearen Substitutionen vermittelt wird, beider-

seits in's Unbegrenzte verfolgen, werden immer ausgedehntere Theile der Ebene η auf die entsprechenden Theile der Ebene η' durchaus conform bezogen. Es kann dabei niemals eine Vieldeutigkeit entstehen. Denn da η und η' nach Voraussetzung demselben Typus angehören, so bestehen zwischen den erzeugenden Substitutionen der η-Gruppe und zwischen den entsprechenden Substitutionen der η'-Gruppe beziehentlich genau dieselben Relationen; es finden sich also auch in der η-Ebene zwischen den verschiedenen Fundamentalbereichen dieselben Zusammenhänge, wie in der η'-Ebene, und umgekehrt.

Nun bedeckt die Gesammtheit der in der einzelnen Ebene gelegenen Fundamentalbereiche ein gewisses Gebiet, welches einmal von unendlich vielen discreten Punkten, dann aber auch von unendlich vielen Kreislinien begrenzt sein kann. Ich sage jetzt, *dass die conforme Abbildung der beiden durch die unendlich vielen Fundamentalbereiche überdeckten Gebiete keinerlei unstetige Unterbrechung erleidet, wenn man in beide Gebiete jene isolirten Unstetigkeitspunkte und die genannten Kreisperipherieen mit aufnimmt*, — d. h. also, wenn man die beiden Gebiete nicht bloss mit *Ausschluss* der Begrenzungen (wie es zunächst gemeint ist), sondern mit *Einschluss* derselben in Betracht zieht. In der That scheint diess aus bekannten Sätzen über die Integration der Differentialgleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ zu folgen, wenn man noch hinzunimmt (was durch Nichteuklidische Betrachtungen bewiesen werden kann), dass die Gebiete, welche in der η- und der η'-Ebene durch die successiven Fundamentalbereiche überdeckt werden, *gleichmässig* ihren Begrenzungen zustreben.

Man nehme nun einen Augenblick die beiden Functionen η_1 und η_2 (die wir soeben, in § 1. des gegenwärtigen Abschnittes, auszeichneten) vorweg. *Für beide ist der in diesem Paragraphen zu erbringende Nachweis mit dem nun Gesagten bereits erledigt.* Bei η_1 nämlich haben wir es überhaupt nicht mit isolirten Grenzpunkten, sondern nur mit *einem* Hauptkreise zu thun. Daher ist eine volle Kreisfläche der η-Ebene auf eine ebensolche der η'-Ebene ausnahmslos conform abgebildet, und dies geschieht, wie man weiss, nothwendig durch *lineare* Beziehung. — Bei η_2 hinwieder haben wir nur isolirte Grenzpunkte und keinerlei Hauptkreis. Daher ist das Gebiet, welches von der Gesammtheit der Fundamentalbereiche unter Hinzunahme der Grenzen überdeckt wird, mit der unbegrenzten Ebene identisch. Die vollen Ebenen η und η' sind daher ausnahmslos conform auf einander bezogen, und wir haben wieder zwischen η und η' auf Grund bekannter Sätze eine nothwendig *lineare* Beziehung. Das heisst aber beidemal mit Rücksicht auf die oben getroffene Verabredung, *dass η und η' im Wesentlichen identisch sind*, was zu beweisen war.

In den allgemeineren Fällen, wo unendlich viele Hauptkreise an der Begrenzung des Gebietes, sowohl der η- als der η'-Ebene, betheiligt sind, müssen wir noch einen Schritt weiter gehen. *Wir gebrauchen nämlich das Princip der Symmetrie in seiner gewöhnlichen, auf eine reelle Kreislinie bezüglichen Form* (siehe § 4 des Abschnitts II). Indem wir jedes der gesammten Gebiete an jedem seiner Begrenzungskreise spiegeln, wissen wir vermöge des erwähnten Princips, dass die so erhaltenen Spiegelbilder in Folge der ursprünglichen conformen Abbildung einander ebenfalls entsprechen. Jetzt fahren wir mit dem Spiegelungsprocesse, indem wir jeden neu erhaltenen Begrenzungskreis selbst wieder als Inversionskreis benutzen, ins Unendliche fort. So wird allmählich die ganze η-Ebene, wie auch die η'-Ebene, mit Ausnahme wieder von unendlich vielen zerstreut liegenden Punkten, welche die natürliche Grenze bilden, durch die unendlich vielen Spiegelbilder überdeckt. Diese Grenzpunkte nehmen wir schliesslich, so, wie sie einander entsprechend in der η- und der η'-Ebene gewonnen werden, in unsere conforme Abbildung mit auf. Hierdurch erleidet, genau wie oben bei dem entsprechenden Processe, die conforme Abdildung keinerlei Unterbrechung der Stetigkeit. Daher sind schliesslich die Ebenen η und η' ausnahmslos conform auf einander bezogen, *η und η' hängen also nothwendig linear von einander ab*, und der Beweis, den wir in Aussicht stellten, ist also auch im allgemeinen Falle erbracht.

§ 4.

Continuitätsbeweis.

Um weiter vorwärts zu gehen, bedarf ich einer Prämisse, die ich, obgleich sie mir unzweifelhaft richtig scheint, hier nicht in Kürze explicite erledigen kann. Es handelt sich darum, dass die Beziehung zwischen beiden Mannigfaltigkeiten M_1 und M_2 eine *analytische* ist. Ich zweifele nicht, dass man eine solche Behauptung durch Weiterentwickelung jener Existenzbeweise, über welche im ersten Abschnitte Bericht erstattet wurde, also genau im Sinne der Riemann'schen Theorie, wird erledigen können. Uebrigens bliebe, wenn ein solches Verfahren auf Schwierigkeiten stossen sollte, immer noch der Recurs auf die *Formeln*, welche Herr Poincaré (wenn ich mich so ausdrücken darf) für den Zusammenhang der Mannigfaltigkeiten M_1 und M_2 aufgestellt hat.

Auf Grund dieser Prämisse kommen für die Beziehung der beiden Mannigfaltigkeiten M_1 und M_2 die gewöhnlichen Continuitätsvorstellungen zur vollen Geltung. Ich erinnere in diesem Betracht insbesondere an zwei Sätze. Zunächst daran, dass ein System von m analytischen Functionen von ebensoviel Variabeln in der Nähe jeder Stelle, für welche die Functionaldeterminante weder verschwindet, noch un-

endlich wird, eindeutig umgekehrt werden kann, — dass aber auch rückwärts, wenn die Umkehr in der Nähe einer Stelle nicht vieldeutig wird, das reguläre Verhalten der Functionaldeterminante folgt. Dann aber an den Weierstrass'schen Satz, dass eine analytische Function die obere Grenze derjenigen Werthe, deren sie in einem Bereiche fähig ist, allemal auch wirklich erreicht.

Unsere Aufgabe ist es nun, zu zeigen, dass innerhalb M_1 keine Gebietstheile (sozusagen „Inseln") vorhanden sein können, in welche man durch Fortschreiten in M_2 nicht hineingelangte. Hier bietet sich der Vorstellung zunächst eine doppelte Möglichkeit: Es kann sein, dass die Randpunkte eines solchen Gebietes (die Uferpunkte der Insel) noch zu dem zugänglichen Gebiete gehören, es kann aber auch sein, dass man durch Fortschreiten in M_2 überhaupt niemals die Randpunkte erreicht. Aber beides erweist sich vermöge der voraufgeschickten zwei Sätze als unmöglich.

Wäre nämlich das Ufer der Insel zugänglich, so würde dem Uferpunkte in M_2 eine Stelle entsprechen, deren *volle* Umgebung sich nur auf einen *Theil* der Umgebung des Uferpunktes abbilden könnte. Das aber widerspricht dem regulären Verhalten der bezüglichen Functionaldeterminante, welches seinerseits nothwendig ist, weil dem Hülfssatze des vorigen Paragraphen zufolge keinem Punkte von M_1 mehrere Punkte von M_2 entsprechen können.

Unzugänglich hinwiederum kann das Ufer unserer Insel auch nicht sein. Denn das hiesse geradezu, dass unser Functionensystem eine gewisse obere Grenze niemals erreichen könne, und widerspräche also dem Weierstrass'schen Satze.

Daher kann von Inseln in M_1, die unzugänglich wären, überhaupt nicht die Rede sein; jedem Punkte in M_1 entspricht ein Punkt in M_2, und unser Fundamentaltheorem ist erwiesen.

Ich brauche kaum auf die Analogie aufmerksam zu machen, welche zwischen dem hiermit geschilderten Beweisgange und einem bekannten Beweise des Fundamentalsatzes der Algebra Statt hat.

Abschnitt V.

Vergleich mit den elliptischen Functionen.

Ein Vergleich der neuen η-Functionen mit den elliptischen Functionen liegt von Vorneherein nahe und er ist wohl bei allen Bearbeitern, die sich diesen Untersuchungen zugewandt haben, das hodegetische Princip gewesen. Wir können einem solchen Vergleiche hier eine um so grössere Präcision ertheilen, als unser Fundamentaltheorem die in jedem Falle zur Verfügung stehenden Constanten übersehen lässt. Ich

will mich bei der folgenden Darlegung auf jene beiden Functionsclassen η_1 und η_2, die in § 1 des vorigen Abschnitts bereits ausgezeichnet wurden, beschränken. In wie weit die betreffenden Aussagen auch noch für die allgemeineren von uns in Betracht gezogenen Functionsclassen gültig sind, wird Jeder selbst mit Leichtigkeit entscheiden.

Die Theorie der elliptischen Functionen betrachtet als independente Variable zunächst das eine auf der Riemann'schen Fläche vom Geschlechte 1 existirende überall endliche Integral, welches wir mit u bezeichnen und übrigens so normiren wollen, dass es die Perioden 1 und $\frac{iK'}{K}$ besitzt. Darüber hinaus aber ist es die Exponentialfunction $v = e^{2i\pi u}$, welche bei vielen Entwickelungen zu Grunde gelegt wird. *Ich sage nun zunächst, dass es eben diese beiden Functionen sind, welche, im Falle* $p = 1$, *jenen* η_1 *und* η_2 *entsprechen, die auf der Riemann'schen Fläche überhaupt keine Verzweigungspunkte besitzen.*

Was den ersten Theil dieser Behauptung angeht, so ist diess so zu verstehen, dass der Hauptkreis der Ebene η_1 in der Ebene u durch einen einzelnen Punkt, den Unendlichkeitspunkt, ersetzt ist. In der That verwandelt sich bei dieser Annahme jener kanonische Fundamentalbereich, den wir in § 10 des dritten Abschnittes für die η_1-Function construirten, in das Parallelogramm der doppeltperiodischen Functionen. Die erwähnte Umänderung wird dadurch nothwendig, dass nun von den erzeugenden Substitutionen der zu η_1 gehörigen Gruppe nur zwei, S_1 und T_1 existiren, für diese aber die Fundamentalrelation in folgender Form geschrieben werden kann:

$$S_1 T_1 = T_1 S_1,$$

so dass also S_1 und T_1 *vertauschbar* sein müssen.

Der andere auf v bezügliche Theil unserer Behauptung, ist aus der conformen Abbildung unmittelbar deutlich. Denn beim Uebergange zur v-Ebene verwandelt sich das Periodenparallelogramm der Ebene u (und also das Bild der Riemann'schen Fläche $p = 1$) in einen ringförmigen, um den Coordinatenanfangspunkt einfach herum gelegten Bereich, dessen Begrenzungscurven, der Periode $\frac{iK'}{K}$ von u entsprechend, durch die hyperbolische oder loxodromische Substitution:

$$v' = e^{-\frac{2K'}{K}\cdot\pi} \cdot v$$

zusammengeordnet sind.

Als nächsten und zuvörderst wichtigsten Zweck der elliptischen Functionen darf man nun wohl bezeichnen, dass sie gestatten, alle diejenigen complexen Functionen des Ortes, welche auf der Riemann'schen Fläche $p = 1$ *unverzweigt* sind, als *eindeutige* Functionen der

Grösse u darzustellen. Ich erinnere in dieser Beziehung zunächst natürlich an jene algebraischen Functionen des Ortes, deren irgend zwei, w und z, durch eine algebraische Gleichung $f(w, z) = 0$ vom Geschlechte 1 verbunden sind. Ich erinnere ferner an diejenigen Integrale $\int R(w,z) \cdot dz$, welche keine logarithmischen Unstetigkeitspunkte haben (Integrale 2. Gattung). Ich erinnere endlich aber an die modernen Untersuchungen über lineare Differentialgleichungen mit doppeltperiodischen Coefficienten, wie sich dieselben an Herrn Hermite's Behandlungsweise der Lamé'schen Gleichung anschliessen. — Was die Grösse v betrifft, so ergeben sich mit ihrer Hülfe ähnliche Darstellungen, nur in beschränkterem Umfange. Auf einem bestimmten auf der Riemann'schen Fläche gelegenen Wege reproducirt sich v identisch: es ist derjenige, bei dessen Durchlaufen u die Periode 1 erlangt. Ein Gleiches müssen wir von allen solchen complexen Functionen des Ortes verlangen, die in v eindeutig sein sollen. Es ist diess aber auch die einzige Bedingung, welche zu der anderen, dass die Functionen durchaus unverzweigt sein sollen, hinzutritt.

Genau entsprechende Behauptungen werden nun offenbar bei einer Fläche eines beliebigen p hinsichtlich unserer η_1, η_2 richtig sein.

Wir dürfen diese Behauptungen sogar noch generalisiren, indem wir η_1 und η_2, statt sie unverzweigt zu nehmen, mit irgend welchen vorgegebenen Verzweigungspunkten ausstatten. Nehmen wir diese Verzweigungspunkte, um gleich den äussersten Fall zu betrachten, sämmtlich von unendlich hohem Index, so werden alle solche Functionen auf unserer Riemann'schen Fläche, welche nur an den vorgegebenen Stellen verzweigt sind, in η_1 eindeutig sein. Sollen sie es auch in η_2 sein, so kommt die Bedingung hinzu, dass sie sich bei Durchlaufung der Rückkehrschnitte $R_1, R_2, \cdots, R_p$, sowie bei Umkreisung der Einschnitte $Q_1, Q_2, \cdots$, die für das einzelne η_2 charakteristisch sind, identisch reproduciren müssen.

Wir haben damit denjenigen Gesichtspunkt, den Herr Poincaré bei seinen Untersuchungen über eindeutige Functionen mit linearen Transformationen in sich bisher in erster Linie verfolgt hat. Insbesondere hat er sein Interesse solchen linearen Differentialgleichungen zugewandt, deren Lösungen in dem jeweiligen η eindeutig werden, und so den unbestimmten Ideen, welche Herr Fuchs bei Gelegenheit in dieser Richtung entwickelt hat*), das erforderliche Substrat gegeben.

---

*) Göttinger Nachrichten vom 7. Februar 1880, pag. 173, sowie Borchardt's Journal, t. 89, pag. 158—162 (datirt vom 14. Febr. 1880) und ebenda, t. 90, pag. 72—73 (vom 7. Juni 1880). Ich bezeichne diese Entwickelungen im Texte als „unbestimmte Ideen", weil die Resultate, die Herr Fuchs allerdings in sehr bestimmter Form ausspricht, als solche unrichtig sind. Es liegt überall die Verwechselung der *unverzweigten* und der *eindeutigen* Functionen vor. Uebrigens

Hierzu eine kleine Bemerkung: Die genannten Entwickelungen stehen bei Herrn Poincaré so sehr im Vordergrunde, dass es fast aussieht, als bestände das Wesen der neuen Transcendenten in ihrer Bedeutung für die linearen Differentialgleichungen. Dem muss hier, so

---

sind die betreffenden Ueberlegungen der Art nach keineswegs vollständig neu. Ich möchte z. B. auf eine Stelle im 14ten Annalenbande pag. 159, 160 (datirt: Anfang Mai, 1878) aufmerksam machen, wo ich im Verfolg ähnlicher Ueberlegungen sage: „Man erhält z. B. den Satz: *Alle hypergeometrischen Reihen, welche nach k^2 fortschreiten, lassen sich als eindeutige Modulfunctionen darstellen.* Doch greift ein Verfolg dieser Ideen, die sich schliesslich alle auf die *Transformation der hypergeometrischen Reihen* beziehen, natürlich weit über die Grenzen des gegenwärtigen Aufsatzes hinaus."

Im 19ten Bande dieser Annalen, pag. 564, hatte ich gelegentlich bemerkt, dass Herr Fuchs über jene eindeutigen Functionen mit linearen Transformationen in sich, welche einen *Hauptkreis* besitzen, (ich benutze hier die Ausdrucksweise meines gegenwärtigen Aufsatzes), nirgends publicirt habe. Dem ist mittlerweile Herr Fuchs in den Göttinger Nachrichten vom 4. März 1882 entgegengetreten, indem er sich einmal auf die vorgenannten Arbeiten, dann aber auf sein Schreiben an Herrn Hermite im 83. Bande von Borchardt's Journal [Sur quelques propriétés des intégrales des équations différentielles, auxquelles satisfont les modules de périodicité des intégrales elliptiques des deux premières espèces: datirt: November 1876] bezieht. So wenig persönliche Discussionen im Allgemeinen nützlich sind, so glaube ich doch hier mit einigen Zeilen antworten zu sollen. Denn durch die Note des Herrn Fuchs, insbesondere die Schlussbemerkung derselben, erscheint der Gesammtcharakter jener unter sich zusammenhängender Arbeiten, die ich seit sieben Jahren in diesen Annalen publicirt habe, in Zweifel gezogen.

Was zunächst den engeren Streitpunkt betrifft, so kann ich wirklich nicht verstehen, wie so in jenen Aufsätzen, an die Herr Poincaré anknüpft, von Functionen „mit Hauptkreis" die Rede sein soll. Aber allerdings lässt Herr Fuchs in seiner Note diesen Zusatz auch fort und argumentirt so, als hätte ich schlechthin von eindeutigen Functionen mit linearen Transformationen in sich gesprochen! Jenen Brief an Herrn Hermite aber (von welchem uns hier nur derjenige Theil interessirt, der auf das Integral erster Gattung Bezug hat) habe ich auch bei meinen früheren Untersuchungen über elliptische Modulfunctionen mit Absicht übergangen. Denn er enthält von den hier in Betracht kommenden Ideenbildungen Nichts, was nicht aus früheren Arbeiten zugleich *correcter* und *vollständiger* bekannt gewesen wäre. In ersterer Hinsicht brauche ich nur an die merkwürdige Unrichtigkeit zu erinnern (pag. 14 der Einleitung und pag. 27 des Textes), welche schon Herr Dedekind im 83ten Bande von Borchardt's Journal, pag. 286—287, zur Sprache gebracht hat. In letzterer Beziehung aber verweise ich z. B. auf die wiederholt citirte Arbeit von Herrn Schwarz über die hypergeometrische Reihe (Borchardt's Journal, Bd. 75, datirt 1872). Es werden dort pag. 318, 319 die für den Modul k^2 charakteristischen Kreisbogendreiecke (von denen sich bei Herrn Fuchs keine Andeutung findet) in durchaus verständlicher und anschaulicher Weise besprochen. Oder soll ich noch weiter zurückgreifen und z. B. an jene Stelle im Gaussischen Nachlasse erinnern (Bd. 3 der gesammelten Werke, pag. 477, 478), aus der hervorgeht, dass Gauss bereits das Sachverhältniss völlig correct erkannt hat? —

Hierüber hinaus bezieht sich nun Herr Fuchs zum Schlusse seiner Note auf meine Arbeiten über algebraisch integrirbare lineare Differentialgleichungen

wichtig diese Anwendung ohne Zweifel ist, und so sehr sie dem augenblicklichen Interesse des mathematischen Publicums entgegenkommt, doch widersprochen werden. Die Lösungen linearer Differentialgleichungen sind unter den übrigen Functionen, welche in η eindeutig werden, immer nur ein einzelnes Beispiel.

Doch kehren wir zu den elliptischen Functionen zurück! Ich will hier an zweiter Stelle diejenigen Entwickelungen und Betrachtungen hervorheben, welche man unter dem Namen: *Theorie der elliptischen Modulfunctionen* zusammenzufassen pflegt. Es handelt sich bei ihnen darum, die *Constanten*, welche in den algebraischen Gleichungen vom Geschlechte Eins auftreten, oder auch die Perioden der Integrale 2. Gattung etc. als Functionen von $\frac{iK'}{K}$ (dem Periodenverhältnisse des Integrals 1ter Gattung) oder auch von $e^{-\frac{K'}{K}\cdot\pi}$ (dem Jacobi'schen q) aufzufassen. Der Gewinn ist zumal wieder der, dass sämmtliche Ausdrücke, welche die Theorie zu betrachten hat, in den neuen Variabelen, bei zweckmässiger Einführung derselben, eindeutig werden. Dabei wolle man beachten, *dass die genannten transcendenten Moduln nichts Anderes sind, als die Coefficienten derjenigen erzeugenden Substitutionen, welche bei u und v in Betracht kommen**). Hiermit aber bietet sich von selbst die Verallgemeinerung. Die Coefficienten der erzeugenden Substitutionen der zur jeweiligen η-Function gehörigen Gruppe haben wir schon oben als Bestimmungsstücke der η-Function betrachtet. *Wir werden dieselben jetzt geradezu als Moduln der Riemann'schen Fläche* (p, n, l_k) *bezeichnen.* Also, wenn wir $n = 0$ nehmen und uns auf die

zweiter Ordnung (man sehe Bd. XI und XII dieser Annalen) und vermuthet, dass die enge Verbindung, in welcher meine damaligen Untersuchungen zu den seinigen stehen, auch in der Folge für mich von massgebendem Einflusse gewesen sein dürften. Ich würde einen solchen Einfluss, wenn er vorhanden gewesen wäre, nur dankbar anerkennen, aber er hat thatsächlich nicht stattgefunden. Ich habe in der Einleitung zum gegenwärtigen Aufsatze alle diejenigen Momente zur Sprache gebracht, welche für die Entwickelung meines eigenen Ideenkreises, soweit er hier in Betracht kommt, von Belang waren. Jene Beschäftigung mit den linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung (vom Sommer 1876 und Frühjahr 1877) hatte für mich bislang nur die Bedeutung einer Episode. Auch habe ich meine damalige Methode keineswegs, wie Herr Fuchs es auf Grund meiner eigenen Angabe auf pag. 118 des 11ten Annalenbandes zu deduciren sucht, der in Vergleich kommenden Fuchs'schen Arbeit vom Juli 1875 entnommen. Es ist seine Arbeit für mich nur der Anlass gewesen, um eine Fragestellung aufzugreifen, die mir bis dahin bloss unbestimmt vorschwebte; meine damalige Methode aber ruht durchaus selbständig auf meiner früheren, im Juli 1874 publicirten Bestimmung aller endlichen Gruppen linearer Substitutionen einer Veränderlichen.

*) Genau genommen ist nicht q sondern q^2 ein solcher Coefficient; in der That ist wohl auch q^2 in der Theorie der elliptischen Functionen als die zunächst wichtige Grösse zu betrachten.

Functionen η_1 und η_2 beschränken, so haben wir einmal $(6p-6)$ reelle, das andere Mal $(3p-3)$ complexe Grössen als Moduln der allgemeinen Riemann'schen Fläche vom Geschlechte p. Zu jedem Modulsysteme gehört nur eine Fläche, und die verschiedenen Modulsysteme, welche dieselbe Fläche liefern, setzen sich aus einem beliebigen derselben in charakteristisch einfacher Weise zusammen. *Hiermit haben wir aber nicht nur einen Ausblick auf eine ausgedehnte Theorie neuer Modulfunctionen, sondern es wird überhaupt zum ersten Male, wie es scheint, die Lehre von den Moduln Riemann'scher Flächen in einer alle Fälle umfassenden Weise wirklich zugänglich.*

Und nun zuletzt noch ein dritter Vergleichspunkt, bei dem es sich allerdings mehr um eine Analogie als um eine Uebereinstimmung handelt.

Die Gruppe der doppeltperiodischen Functionen

$$u' = u + m \cdot 1 + n \cdot \frac{iK'}{K}$$

hat eine besonders einfache Structur. In Folge dessen ist sie mit allen Substitutionen der Form $u' = \pm u + C$ vertauschbar; überdiess sind alle in ihr enthaltenen Untergruppen von endlichem Index mit ihr selbst ähnlich. Functionentheoretisch führt der erstere Umstand zum *Additionstheoreme* oder zu dem Satze, dass jede Riemann'sche Fläche $p = 1$ unendlich viele eindeutige Transformationen in sich selbst besitzt, welche sich auf zwei Schaaren vertheilen, — der zweite aber zur Lehre von der *Transformation*.

In ersterer Hinsicht ist die Analogie bei den Flächen von höherem p und den zugehörigen η-Functionen nur eine eventuelle. Ich betrachte zunächst wieder das überall unverzweigte η_1. Dann kann man folgendermassen sagen: Die Gruppe der zu η_1 gehörigen linearen Substitutionen ist im Allgemeinen keineswegs in einer umfassenderen Gruppe mit brauchbarer Gebietseintheilung als ausgezeichnete Untergruppe enthalten. Ebensowenig gestattet die zugehörige Riemann'sche Fläche im Allgemeinen eindeutige Transformationen in sich selbst. *Wenn aber Eines von Beiden statt hat, so tritt auch nothwendig das Andere ein**). — Man beweist diess durch Betrachtungen, die den in § 3 des vorigen Abschnitts gegebenen genau parallel laufen. Uebrigens kann man bei diesem Satze auch *inverse* Transformationen in Betracht ziehen. Wegen eines Beispiels, das alle diese Verhältnisse erläutert, siehe Annalen XX, p. 50. — Sollen ähnliche Sätze für die überall unverzweigte η_2-Function aufgestellt werden, so dürfen natürlich nur solche eindeutige Transformationen der Fläche in sich in Be-

*) Die umfassende Gruppe hat dann nothwendig den Hauptkreis der η_2-Function auch ihrerseits zum Hauptkreise. Es folgt diess schon aus dem Umstande, dass nur *ein* solcher Kreis bei der η_1-Function vorhanden ist.

tracht gezogen werden, bei denen die Definition des einzelnen η_2 erhalten bleibt, bei denen also jene Rückkehrschnitte $R_1, R_2, \cdots, R_p$, die zur Festlegung des η_2 dienen, in äquivalente Rückkehrschnitte übergehen. Ich habe bereits im 19ten Bande dieser Annalen (pag. 567, 568) ausgeführt, dass mit Rücksicht auf solche Sätze die überall unverzweigte η_2-Function besonders geeignet scheint, die Gesammtheit der *symmetrischen* Flächen eines bestimmten p zu definiren.

Der *Transformationstheorie* aber stellen sich jetzt diejenigen Betrachtungen zur Seite, welche aus der zu der η-Function gehörigen Gruppe linearer Substitutionen irgend eine Untergruppe herausheben und nun solche eindeutige Functionen von η construiren, welche bei den Substitutionen der Untergruppe ungeändert bleiben. Ich will hier nur dasjenige η_1 ins Auge fassen, welches an irgend vorgegebenen Stellen logarithmisch verzweigt ist. Dann heisst das Gesagte nichts Anderes, als dass wir über einer gegebenen Riemann'schen Fläche (p, n) *irgend eine* andere Fläche, welche nur an den gegebenen Punkten verzweigt und übrigens irgendwie verschlungen ist, mit beliebig vielen Blättern ausbreiten und nun die algebraischen Irrationalitäten bestimmen, welche zu dieser neuen Fläche gehören. Wir werden also zu einem Probleme geführt, das in der Riemann'schen Theorie von je eine principielle Bedeutung hatte, und erkennen zugleich, dass man dasselbe jedesmal durch Vermittelung einer geeigneten η-Function lösen kann.

Leipzig, den 2. October 1882.

Ueber geodätische Polygone auf den Flächen 2. Grades.

Von

Otto Staude in Leipzig.

(Mit einer lithograph. Tafel.)

Einleitung.

Die vorliegende Arbeit ist, wie die Arbeit: „Ueber Fadenconstructionen des Ellipsoides“*) aus dem Bestreben erwachsen, eine Anwendung der hyperelliptischen Integrale auf Flächensysteme 2. Grades in demselben Sinne und Umfange durchzuführen, in welchem die Theorie der Kegelschnitte durch den Gebrauch der elliptischen Integrale bereichert worden ist.**) Dass die hiermit angedeuteten Zusammenhänge der Theorie der hyperelliptischen Integrale mit geometrischen Vorstellungen***) eine detaillirtere Untersuchung verdienten, darauf bin ich durch Herrn Professor Klein aufmerksam gemacht worden. Aus dieser Veranlassung und der vielfachen Anregung, welche ich dem von Herrn Klein geleiteten mathematischen Seminare an der Universität Leipzig verdanke, sind meine Untersuchungen über den bezeichneten Gegenstand hervorgegangen.

Die bekannte Fadenconstruction der Ellipse aus einer confocalen Ellipse kann in doppelter Weise auf den Raum ausgedehnt werden, indem man ihre Verallgemeinerung ebensowohl in der Fadenconstruction der Krümmungscurve aus einer andern gleichartigen Krümmungscurve, als in der Fadenconstruction des Ellipsoides aus zwei confocalen Flächen 2. Grades erblicken darf. Entsprechend finden die *Poncelet'schen Schliessungssätze* innerhalb der Geometrie der Flächen 2. Grades eine doppelte Analogie; es stellt sich nämlich über dieselben einerseits die Theorie der *geodätischen Polygone*†) auf den Flächen 2. Grades, welche

*) Diese Annalen, Bd. XX, S. 147.

**) Vgl. die Literaturnachweise bei Enneper, Elliptische Functionen. Theorie und Geschichte. Noten VI. VII. VIII.

***) Vgl. auch die Andeutungen von Darboux, L'Institut, I^re Section, Sciences Mathématiques etc. 38^e année No. 1896, (1870), sowie die von Liouville, Journal des Mathématiques, ser. I, t. 12, p. 255, (1847).

†) Dieselben behandelt zuerst Hart in der Arbeit: On geodesic lines traced on a surface of the second degree (Cambridge and Dublin Mathematical Journal, Vol. IV, p. 193 (1849)).

einer Krümmungscurve umbeschrieben und einer andern einbeschrieben sind, anderseits aber die Theorie der *geradlinigen Polygone**), welche zweien Flächen 2. Grades umbeschrieben und einer dritten einbeschrieben sind. In beiden Theorien kann man eine Anwendung der hyperelliptischen Integrale suchen analog derjenigen, welche die elliptischen Integrale zuerst in der Arbeit von Jacobi: „Ueber die Anwendung der elliptischen Transcendenten auf ein bekanntes Problem der Elementargeometrie"**) gefunden haben. Was die doppelte Anwendung der hyperelliptischen Integrale betrifft, so geht der Unterschied jener beiden Theorien in gewissem Sinne dem Unterschiede zwischen dem Problem der Umkehr eines einzelnen hyperelliptischen Integrals mit beschränktem Integrationsweg und dem Jacobi'schen Problem der Umkehr der Summen hyperelliptischer Integrale parallel.

Die vorliegende Arbeit beschränkt sich auf die Betrachtung der *geodätischen Polygone* und versucht die im Wesentlichen bekannte Theorie derselben in einzelnen Punkten zu ergänzen.

Zu diesem Zwecke werden in § 1 die gewöhnlichen geodätischen Polygone auf den Flächen 2. Grades als Vertreter einer umfassenderen Gruppe projectivisch coordinirter Gebilde gekennzeichnet und wird sodann auf die collineare Verwandtschaft der geodätischen Polygone auf den verschiedenen centrischen Flächen 2. Grades hingewiesen. Hiernach werden in § 2 für die einfachsten Formen geodätischer Polygone auf dem *Ellipsoid* unter alleiniger Anwendung der Jacobi'schen Differentialgleichung der geodätischen Linie die bekannten Schliessungssätze bewiesen und die Bedingungsgleichungen des Schliessungsproblems aufgestellt. Der § 3 enthält einen Excurs über eine verallgemeinerte *Fadenconstruction* der Krümmungscurven und ihre Beziehung zu den vorausgeschickten Schliessungssätzen.

Die Absicht der folgenden §§ 4—8 ist es, die Tragweite der Schliessungssätze des § 2 für die verschiedenen Formen geodätischer Polygone zu prüfen. Indem diese Betrachtungen für die geodätischen Polygone auf dem *Ellipsoid* mit § 8 abgeschlossen werden, sind in Folge der Resultate des § 1 zugleich die entsprechenden Fragen für die geodätischen Polygone auf dem *zweischaligen Hyperboloid* und, wie in § 9 gezeigt wird, für einen Theil der geodätischen Polygone auf dem *einschaligen Hyperboloid* als erledigt anzusehen. Dem übrig bleibenden Theile geodätischer Polygone auf dem einschaligen Hyperboloid sind alsdann die §§ 10—12 gewidmet, welche diese letzteren Polygone als eine Verallgemeinerung der bekannten *geradlinigen* Polygone auf dem einschaligen Hyperboloid darstellen.

---

*) Jacobi, Ges. Werke, Bd. I, S. 277.

**) Vgl. Darboux und Liouville a. a. O.

§ 1.

Die geodätischen Polygone auf den verschiedenen Flächen 2. Grades und ihre projectivischen Verallgemeinerungen.

Die Beziehung des gewöhnlichen geodätischen Polygons auf einer Fläche 2. Grades zu dem durch diese Fläche bestimmten *confocalen System* kann in folgender Weise charakterisirt werden. Es seien f_1, f_2 und f_3 drei Flächen des confocalen Systems; auf f_1 sei etwa das Polygon aufgezeichnet; seine Ecken liegen auf der Durchdringungscurve der Flächen f_1 und f_2: seine Seiten sind Umhüllungscurven*) der gemeinsamen Tangenten der Flächen f_1 und f_3. In gleicher Weise kann man drei Flächen F_1, F_2 und F_3 aus *einer beliebigen Flächenschaar 2. Grades* mit gemeinsamer umschriebener Developpablen auswählen und auf einer derselben, F_1, ein Polygon aufzeichnen, dessen Ecken auf der Durchdringungscurve von F_1 und F_2 liegen und dessen Seiten Umhüllungscurven der gemeinsamen Tangenten von F_1 und F_3 sind. Wie bei der Schaar der confocalen Flächen die geodätischen Polygone, so treten hiernach bei jeder Flächenschaar 2. Grades gewisse analoge Polygone auf. Die wechselseitige Analogie dieser Polygone erstreckt sich auch auf die projectivisch aufgefassten metrischen Eigenschaften der Curven, aus denen die Polygone gebildet sind. Wie nämlich die gewöhnlichen geodätischen Linien auch dann noch als kürzeste Linien erscheinen, wenn man an Stelle des imaginären Kugelkreises eine andere Fläche des betreffenden confocalen Systems als Fundamentalfläche der Maassbestimmung zu Grunde legt, so sind auch die Curven, welche von den gemeinsamen Tangenten zweier Flächen einer beliebigen Flächenschaar 2. Grades auf einer der beiden Flächen umhüllt werden, kürzeste Linien auf der Fläche mit Bezug auf irgend eine Fläche derselben Schaar als fundamentale Fläche der Maassbestimmung.**)

---

*) Nach einem Satze von Chasles, Liouville's Journal, I. Serie, Bd. XI, S. 11.

**) Dieser Satz findet sich ausgesprochen bei Hrn. Darboux (vgl. Darboux, Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques. S. 230 und S. 235). Zu der projectiven Verallgemeinerung der geodätischen Linie gelangte Herr Lüroth (vgl. Lüroth, Verallgemeinerung des Problems der kürzesten Linie, Zeitschrift für Mathematik und Physik Jahrg. XIII, S. 156), indem er die Eigenschaft der gewöhnlichen geodätischen Linie auf einer Fläche, dass die Schmiegungsebene der Curve beständig die Flächennormale enthält, projectivisch verallgemeinerte. Dass die so verallgemeinerte geodätische Linie auch *das Variationsproblem der kürzesten Linie auf einer Fläche unter Zugrundelegung der allgemeinen projectivischen Maassbestimmung* löst, hat Herr Darboux explicite gezeigt (a. a. O. S. 228). Sein Resultat kann in etwas modificirter Form so ausgesprochen werden: Ist in Tetraedercoordi-

Sind so die geodätischen Polygone, welche zu den verschiedenen Flächenschaaren 2. Grades gehören, in projectiver Auffassung völlig coordinirt, so bauen sich auch die analytischen Bedingungsgleichungen zu den betreffenden Schliessungssätzen in völlig analoger Form aus hyperelliptischen Integralen 1. Gattung auf, wenn man jeweils eine elliptische Coordinatenbestimmung auf die bezügliche Flächenschaar gründet.*) Ebenso gehen in die Umfangsbestimmung der geodätischen Polygone überall gleichgebaute hyperelliptische Integrale 3. Gattung ein, die sich nur, wenn die Fundamentalfläche der Maassbestimmung eine Grenzfläche der betreffenden Schaar wird, in Integrale 2. Gattung verwandeln. Von diesem letzteren Umstande abgesehen dürfen nach dem Gesagten *die geodätischen Polygone des confocalen Systems als Repräsentanten der geodätischen Polygone einer beliebigen Flächenschaar gelten.*

Während die vorstehenden Bemerkungen an eine Unterscheidung

---

naten $x_1 x_2 x_3 x_4$ die Gleichung einer beliebigen Fläche: $F(x_1 x_2 x_3 x_4) = 0$ und die Gleichung der Fundamentalfläche der Maassbestimmung:

$$\frac{x_1^2}{\omega_1} + \frac{x_2^2}{\omega_2} + \frac{x_3^2}{\omega_3} + \frac{x_4^2}{\omega_4} = 0,$$

so wird das Linienelement ds einer mit dem Parameter t und dem Proportionalitätsfactor ϱ in der Form:

$$\varrho \cdot x_1 = x_1(t), \quad \varrho \cdot x_2 = x_2(t), \quad \varrho \cdot x_3 = x_3(t), \quad \varrho \cdot x_4 = x_4(t)$$

dargestellten Curve, abgesehen von einem constanten Factor:

$$ds = dt \cdot \frac{\sqrt{\frac{(x_1x_2' - x_2x_1')^2}{\omega_1\omega_2} + \frac{(x_1x_3' - x_3x_1')^2}{\omega_1\omega_3} + \frac{(x_1x_4' - x_4x_1')^2}{\omega_1\omega_4} + \frac{(x_2x_3' - x_3x_2')^2}{\omega_2\omega_3} + \frac{(x_2x_4' - x_4x_2')^2}{\omega_2\omega_4} + \frac{(x_3x_4' - x_4x_3')^2}{\omega_3\omega_4}}}{\frac{x_1^2}{\omega_1} + \frac{x_2^2}{\omega_2} + \frac{x_3^2}{\omega_3} + \frac{x_4^2}{\omega_4}},$$

wobei $\frac{dx}{dt}$ mit x' bezeichnet wird, wie im Folgenden $\frac{d^2x}{dt^2}$ mit x''. Alsdann ist durch die beiden Gleichungen:

$$F(x_1 x_2 x_3 x_4) = 0 \qquad \begin{vmatrix} \omega_1 \frac{\partial F}{\partial x_1} & \omega_2 \frac{\partial F}{\partial x_2} & \omega_3 \frac{\partial F}{\partial x_3} & \omega_4 \frac{\partial F}{\partial x_4} \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1' & x_2' & x_3' & x_4' \\ x_1'' & x_2'' & x_3'' & x_4'' \end{vmatrix} = 0$$

diejenige Curve definirt, welche das Variationsproblem:

$$\delta \int ds = 0, \qquad F = 0$$

löst.

*) Die in der vorigen Note in Determinantenform gegebene Differentialgleichung 2. Ordnung kann, wie Herr Lüroth a. a. O. zeigt, falls $F = 0$ eine Fläche 2. Grades ist, einmal integrirt und unter Einführung verallgemeinerter elliptischer Coordinaten auf die separirte Form der hyperelliptischen Differentialgleichung gebracht werden.

des Reellen und Imaginären nicht gebunden sind, werden im Folgenden von den geodätischen Polygonen des confocalen Systems nur *reelle* Polygone betrachtet d. h. Polygone, deren sämmtliche Seiten und Ecken reell sind. Dabei werden alle solchen Gebilde als gleichberechtigt anzusehen sein, welche durch *reelle* Collineationen des Raumes ineinander übergeführt werden können. Das confocale Flächensystem:

$$(\alpha - t)u^2 + (\beta - t)v^2 + (\gamma - t)w^2 - s^2 = 0$$

($\alpha > \beta > \gamma \geqslant 0$) mit den homogenen Ebenencoordinaten u, v, w, s und dem Parameter t geht, wie jede Flächenschaar 2. Grades, durch 32 Collineationen des Raumes in sich über,*) von denen 16 reell sind. Unter diesen 16 reellen Collineationen finden sich 8, welche die Ellipsoide und zweischaligen Hyperboloide des Systems mit einander vertauschen. Der analytische Ausdruck dieser Collineationen ist, wenn ϱ einen Proportionalitätsfactor und u', v', w', s' die transformirten Ebenencoordinaten bedeuten:

$$\begin{aligned}
\varrho \cdot u' &= s, \\
\varrho \cdot v' &= \sqrt{\alpha - \gamma} \cdot w, \\
\varrho \cdot w' &= \sqrt{\alpha - \beta} \cdot v, \\
\varrho \cdot s' &= \sqrt{(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)} \cdot u
\end{aligned}$$

mit den 8 verschiedenen Vorzeichencombinationen der Quadratwurzeln. Gleichzeitig vertauschen sich bei diesen Collineationen die beiden reellen und ebenso die beiden imaginären Focalcurven des Systems je mit einander.

Es gehen ferner die Krümmungscurven der Flächen des Systems wieder in Krümmungscurven über. Aber auch die geodätischen Linien auf den Flächen des Systems bleiben als geodätische Linien erhalten, wie unmittelbar aus der Eigenschaft dieser Linien hervorgeht, dass sie Umhüllungscurven gemeinsamer geradliniger Tangenten zweier Flächen des Systems sind. Es werden demnach geschlossene geodätische Polygone auf dem Ellipsoid, welche einer Krümmungscurve um- und einer andern einbeschrieben sind, durch die bezeichnete Collineation des Raumes auf das zweischalige Hyperboloid übertragen, ohne ihre charakteristischen Eigenschaften einzubüsen. Der Durchgang der geodätischen Polygone des zweischaligen Hyperboloides durch das Unendliche ist auf die Bedingungsgleichungen der Schliessungssätze ohne wesentlichen Einfluss, da die in diese Bedingungsgleichungen eingehenden hyperelliptischen Integrale *überall endliche* sind. Die Sätze über den Umfang der Polygone verlieren allerdings beim Uebergang

*) Vgl. die entsprechenden Sätze über das Flächenbüschel bei Hrn. Harnack, Mathem. Annalen Bd. XII, S. 82.

vom Ellipsoid zum zweischaligen Hyperboloid ihre unmittelbar anschauliche Bedeutung. Aber auch diese Sätze, welche bei der gewöhnlichen Maassbestimmung mit Integralen 2. Gattung operiren, die beim Durchgang durch die unendlich ferne Ebene unendlich werden, können vollständig erhalten bleiben. Man braucht nur, wie es consequenter Weise geschehen muss, die Fundamentalfläche der gewöhnlichen Maassbestimmung ebenfalls derjenigen Collineation zu unterwerfen, welche die Ellipsoide in die zweischaligen Hyperboloide überführt. Bei dieser Collineation geht, wie erwähnt, der imaginäre Kugelkreis in die imaginäre Focalellipse über und die Integrale 2. Gattung, welche dann auf dem zweischaligen Hyperboloid die Messung der geodätischen Linien bewirken, werden nur unendlich beim Durchgang durch die Ebene der imaginären Focalellipse. Diese Ebene schneidet aber das zweischalige Hyperboloid nicht reell, sodass in der That bei der veränderten Maassbestimmung die Unendlichkeitspunkte der Integrale 2. Gattung für das zweischalige Hyperboloid ebensowenig in Betracht kommen, wie bei der gewöhnlichen Maassbestimmung für das Ellipsoid.

Nach diesen Bemerkungen mag die Theorie der geodätischen Polygone auf dem zweischaligen Hyperboloid zugleich mit der Theorie der geodätischen Polygone auf dem Ellipsoid als erledigt erachtet werden und desshalb die Zweitheilung der folgenden Untersuchung berechtigt erscheinen, insofern in einem ersten Theile (§§ 2—8) die geodätischen Polygone auf dem Ellipsoid, in einem zweiten Theile (§§ 9 – 12) diejenigen geodätischen Polygone auf dem einschaligen Hyperboloid behandelt werden, welche sich in bemerkenswerthen Punkten von denen des Ellipsoids unterscheiden.

I. Geodätische Polygone auf dem Ellipsoid.

§ 2.

Ueber Polygone mit vollständigen Windungen und unvollständigen Oscillationen.*)

Die geodätische Linie, welche sich auf dem Ellipsoid zwischen den beiden Zweigen einer Krümmungscurve hin und herwindet und abwechselnd diese beiden Zweige berührt, ist *im Allgemeinen* als ein einziger zusammenhängender, aber sich nie schliessender**) Curvenzug zu betrachten. Es mag für das Folgende gestattet sein, irgend ein diesem Curvenzug angehörendes Stück schlechthin als „eine geodätische Linie der von den beiden Zweigen der Krümmungscurve begrenzten

*) Ueber diese Benennung vgl. den Anfang des § 4.

**) Vgl. jedoch § 5.

Zone" des Ellipsoides zu bezeichnen. In diesem Sinne gehen durch jeden Punkt der Zone zwei geodätische Linien der Zone. Dies folgt beiläufig aus dem doppelten Vorzeichen in der Differentialgleichung der geodätischen Linie, welche so lautet:

$$(1) \qquad (\mu - \lambda_0)\frac{d\mu}{\mathsf{M}} \pm (\nu - \lambda_0)\frac{d\nu}{\mathsf{N}} = 0.$$

Hierin ist:

$$\mathsf{M} = \sqrt{(\alpha - \mu)(\beta - \mu)(\mu - \gamma)(\mu_0 - \mu)(\mu - \lambda_0)},$$

$$\mathsf{N} = \sqrt{(\alpha - \nu)(\nu - \beta)(\nu - \gamma)(\nu - \mu_0)(\nu - \lambda_0)}$$

und bedeuten μ und ν die gewöhnlichen elliptischen Coordinaten auf dem Ellipsoide:

$$\frac{x^2}{\alpha - \lambda_0} + \frac{y^2}{\beta - \lambda_0} + \frac{z^2}{\gamma - \lambda_0} = 1$$

$(\alpha > \nu > \beta > \mu > \gamma)$; μ_0 ist der Parameter der von der geodätischen Linie berührten Krümmungscurve, die zunächst als Schnittcurve des Ellipsoides λ_0 mit einem einschaligen Hyperboloid betrachtet wird,*) und λ_0 liegt, wie die Parameter λ der Ellipsoide des confocalen Systems überhaupt, zwischen den Grenzen γ und $-\infty$.

Fasst man von der Krümmungscurve $\mu = \mu_0$ und einer zweiten gleichartigen Krümmungscurve $\mu = \mu_1$ $(\mu_1 < \mu_0)$ diejenigen Zweige ins Auge, welche auf der nämlichen Seite des die Zone $(\mu_0\mu_0)$ der Länge nach durchziehenden Hauptschnittes $\mu = \gamma$ verlaufen, so kann man folgende Polygonconstruction vornehmen. Man wählt in einem beliebigen Punkte $\mu_1\nu_1$ des Zweiges μ_1 eine der beiden geodätischen Linien aus und verfolgt dieselbe gegen ihren Berührungspunkt mit dem Zweige μ_0 hin und über diesen hinaus bis zum nächsten Schnittpunkt $\mu_1\nu_2$ mit dem Zweige μ_1; von hier geht man, indem man auf derselben Seite des Zweiges μ_1 bleibt, auf die andere durch diesen Punkt laufende geodätische Linie über, verfolgt dieselbe ebenfalls über ihren Berührungspunkt hinaus bis zum abermaligen Schnitte $\mu_1\nu_3$ mit μ_1 u. s. f. Man erhält so, nachdem man diese Construction $s$mal wiederholt hat, ein dem Zweige μ_0 um- und dem Zweige μ_1 einbeschriebenes, im Allgemeinen ungeschlossenes geodätisches Polygon von s Seiten und $s+1$ Ecken. Man kann diese Polygonconstruction dahin verallgemeinern, dass man die s ersten Ecken auf s verschiedene Krümmungscurven $\mu_1\,\mu_2 \cdots \mu_s$ und nur die letzte, $(s+1)^{\text{te}}$ Ecke wieder auf die erste Krümmungscurve μ_1 verlegt. Auch hier mögen nur die auf einer Seite der Mittellinie $\mu = \gamma$ gelegenen Zweige der Krümmungscurven $\mu_0\,\mu_1 \cdots \mu_s$ benutzt werden. Es fragt sich jetzt, wann die beiden auf derselben Krümmungscurve μ_1 gelegenen Ecken $\mu_1\nu_1$ und $\mu_1\nu_{s+1}$ zusammenfallen.

*) Vgl. die Schlussbemerkung des § 8.

Die Differentialgleichung (1) liefert zunächst unmittelbar eine Relation zwischen den Coordinaten v_i und v_{i+1}, indem sie längs des ganzen Polygonumfanges hin integrirt wird. Wenn man dem Polygonumfange eine bestimmte Richtung beilegt, sodass für jedes Element die Vorzeichen von $d\mu$ und dv bestimmt sind, so kann man in der im Allgemeinen für jedes Element des Umfanges gültigen Gleichung (1):

$$\frac{(\mu - \lambda_0)\, d\mu}{\mathsf{M}} = \frac{(v - \lambda_0)\, dv}{\mathsf{N}} \tag{1}$$

noch das Vorzeichen einer der Quadratwurzeln beliebig festsetzen, wodurch dann das der andern mitbestimmt ist. Trifft man für irgend ein Element des Umfanges diese Festsetzung, so sind durch Continuität längs des ganzen Umfanges die Vorzeichen von M und N bestimmt; da nämlich $d\mu$ und dv im Allgemeinen nicht gleichzeitig ihr Vorzeichen wechseln, so verlangt das Bestehen der Gleichung (1), dass sich die Vorzeichen von M und N bezüglich mit denen von $d\mu$ und dv immer gleichzeitig umkehren, sodass etwa längs des ganzen Polygonumfanges in bestimmter Richtung $\frac{d\mu}{\mathsf{M}}$ und $\frac{dv}{\mathsf{N}}$ beide immer positiv bleiben. Die Umkehr der Vorzeichen von dv und N findet bei jedem Durchgang des Polygons durch die Hauptschnitte $v = \beta$ und $v = \alpha$ des Ellipsoides λ_0 statt, die Umkehr des Vorzeichens von $d\mu$ und M bei jedem Durchgang durch den Hauptschnitt $\mu = \gamma$ und an jeder Berührungsstelle mit der Krümmungscurve $\mu = \mu_0$. In allen diesen Fällen wird die Umkehr durch ein gleichzeitiges Verschwinden des Differentials dv oder $d\mu$ und bezüglich der Quadratwurzel N oder M vermittelt. Ausser in den genannten 4 Verzweigungspunkten $\gamma, \mu_0, \beta, \alpha$,*) von denen aber der erste bei dem hier vorliegenden Polygon noch nicht in Betracht kommt, findet ein gleichzeitiger und zwar sprungweiser Vorzeichenwechsel von $d\mu$ und M an den Polygonecken statt; dieser entspricht dem Ueberspringen von der Richtung der einen der beiden durch den Eckpunkt laufenden geodätischen Linien auf die Richtung der andern.

Unter Berücksichtigung dieser verschiedenen Vorkommnisse ergiebt die Integration der Differentialgleichung (1) längs des Polygonumfanges:

---

*) Es sei bemerkt, dass diese vier Verzweigungspunkte für die zu Grunde liegende geometrische Vorstellung nicht gleichwerthig sind; der Verzweigungspunkt μ_0 ist für die geodätische Linie der Zone $(\mu_0 \mu_0)$ wirklich charakteristisch, während die Verzweigungspunkte γ, β, α nur durch die Natur des elliptischen Coordinatensystems bedingt sind. Man erkennt dies am einfachsten, indem man in die Differentialgleichung (1) an Stelle von $d\mu$ und dv die Projectionen $d\sigma_\mu$ und $d\sigma_\nu$ des Linienelementes der geodätischen Linie auf die Krümmungscurven $\nu = \nu$ und $\mu = \mu$ einführt, wodurch die Differentialgleichung die Form erhält:

$$\sqrt{\mu_0 - \mu} \cdot d\sigma_\nu = \sqrt{\nu - \mu_0} \cdot d\sigma_\mu .$$

$$(2) \qquad 2\sum_{1}^{s}\int_{\mu}^{\mu_0}\frac{(\mu-\lambda_0)\,d\mu}{M} = \int_{\nu_1}^{\nu_{s+1}}\frac{(\nu-\lambda_0)\,d\nu}{N}.$$

Dabei sind sämmtliche Integrale auf reellem Wege zwischen ihren beiden Grenzen genommen zu denken und die Vorzeichen der Radicale M und N so zu bestimmen, dass die Differentiale $\frac{d\mu}{M}$ und $\frac{d\nu}{N}$ beständig positiv bleiben. Die Variable ν nimmt längs des Polygonumfanges bei jeder vollen Umwindung des Polygons um die Zone $(\mu_0\mu_0)$ jeden Werth ν zwischen β und α viermal an. Wenn daher das Polygon sich mit n Umwindungen schliesst, so ist der Werth des Integrals rechter Hand:

$$\int_{\nu_1}^{\nu_{s+1}}\frac{(\nu-\lambda_0)\,d\nu}{N} = 4n\int_{\beta}^{\alpha}\frac{(\nu-\lambda_0)\,d\nu}{N}$$

und die Gleichung (2) geht über in die Gleichung:

$$(3) \qquad 2\sum_{1}^{s}\int_{\mu_x}^{\mu_0}\frac{(\mu-\lambda_0)\,d\mu}{M} = 4n\int_{\beta}^{\alpha}\frac{(\nu-\lambda_0)\,d\nu}{N},$$

in der nun für sämmtliche Integrale die Vorzeichen der Quadratwurzeln positiv sind. Die Bedingung (3), welche sich so als nothwendige Bedingung der Schliessung erweist, ist bei der vorliegenden Einschränkung der Integrationswege auch hinreichend. Es folgt daher:

Ein der Krümmungscurve $\mu = \mu_0$ umbeschriebenes und den gleichartigen Krümmungscurven $\mu = \mu_x$ $(x = 1, 2, \cdots s)$ einbeschriebenes geodätisches Polygon von s Seiten, welches ganz auf der einen Hälfte der durch den Hauptschnitt $\mu = \gamma$ halbirten Zone $(\mu_0\mu_0)$ verläuft, schliesst sich mit n Windungen, wenn:

$$(3) \qquad 2\sum_{1}^{s}\int_{\mu_x}^{\mu_0}\frac{(\mu-\lambda_0)\,d\mu}{M} = 4n\int_{\beta}^{\alpha}\frac{(\nu-\lambda_0)\,d\nu}{N}.$$

Aus der Form dieser Gleichung geht unmittelbar hervor, dass I. *sich das Polygon unabhängig von der Wahl des Anfangspunktes der Construction auf einer der gegebenen Krümmungscurven, unabhängig auch von der Reihenfolge schliesst, in welcher die Ecken auf den s Krümmungscurven μ_x vertheilt werden.*

Da überdies die Integrale auf reellem Wege mit bestimmten Vorzeichen der Quadratwurzel genommen sind, so wird, wenn bei einer Bewegung des Polygons alle Krümmungscurven μ_x bis auf eine constant erhalten werden, vermöge der Gleichung (3) auch die letzte

constant bleiben. Man kann daher den Schliessungssatz auch in der Hart'schen Formulirung aussprechen:

II. *Wenn ein geodätisches Polygon, welches ganz auf der einen Hälfte der durch den Hauptschnitt $\mu = \gamma$ halbirten Zone $(\mu_0 \mu_0)$ verläuft, einer Krümmungscurve umbeschrieben und einer Reihe von gleichartigen Krümmungscurven einbeschrieben ist und es bewegen sich alle Ecken bis auf eine auf ihren Krümmungscurven, so bewegt sich auch die letzte auf ihrer Krümmungscurve.*

Durch Integration des Längendifferentials der geodätischen Linie der Zone $(\mu_0 \mu_0)$:

$$(4) \qquad dS = \frac{(\mu - \lambda_0)(\mu_0 - \mu)\, d\mu}{2\mathsf{M}} + \frac{(\nu - \lambda_0)(\nu - \mu_0)\, d\nu}{2\mathsf{N}}$$

längs des Polygonumfanges erhält man für den Umfang des Polygons den Ausdruck:

$$(5) \quad S = 2 \sum_1^s \int_{\mu_\varkappa}^{\mu_0} \frac{(\mu - \lambda_0)(\mu_0 - \mu)\, d\mu}{2\mathsf{M}} + 4n \int_\beta^\alpha \frac{(\nu - \lambda_0)(\nu - \mu_0)\, d\nu}{2\mathsf{N}},$$

wo wieder die Quadratwurzeln M und N positiv zu nehmen sind, und damit den Satz:

III. *Alle die unendlich vielen geodätischen Polygone, welche in der angenommenen Weise mit den gleichen Anzahlen von Seiten und Windungen der Krümmungscurve μ_0 umbeschrieben und den Krümmungscurven $\mu_\varkappa$ einbeschrieben sind, haben gleichen Umfang.*

Bei der Aufstellung der Gleichungen (3) und (4) ist angenommen worden, dass der Perimeter des Polygons den Hauptschnitt $\mu = \gamma$ nirgends durchsetzt, dass also von den $s + 1$ Krümmungscurven μ_0, $\mu_\varkappa$ die auf derselben Seite der Mittellinie $\mu = \gamma$ gelegenen Zweige benutzt werden. Lässt man diese Beschränkung fallen und denkt man sich s' Polygonecken $\mu_{\varkappa'}$ $(\varkappa' = 1, 2, \cdots s')$ auf derselben Seite der Mittellinie $\mu = \gamma$ gelegen, wie der von den Polygonseiten berührte Zweig der Krümmungscurve μ_0, dagegen die s'' $(s' + s'' = s)$ übrigen Ecken $\mu_{\varkappa''}$ $(\varkappa'' = s' + 1, \cdots s)$ auf der andern Seite (vgl. die schematische Darstellung Fig. 1 der lithogr. Tafel), so erhält man an Stelle von (3) die Bedingung:

$$2 \sum_1^{s'} \int_{\mu_{\varkappa'}}^{\mu_0} \frac{(\mu - \lambda_0)\, d\mu}{\mathsf{M}} + 2 \sum_{s'+1}^{s} \int_\gamma^{\mu_{\varkappa''}} \frac{(\mu - \lambda_0)\, d\mu}{\mathsf{M}} + 2s'' \int_\gamma^{\mu_0} \frac{(\mu - \lambda_0)\, d\mu}{\mathsf{M}}$$

$$= 4n \int_\beta^\alpha \frac{(\nu - \lambda_0)\, d\nu}{\mathsf{N}}$$

oder

$$(6)\quad 2\sum_{1}^{s'}\int_{\mu_{\varkappa'}}^{\mu_0}\frac{(\mu-\lambda_0)\,d\mu}{M}-2\sum_{s'+1}^{s}\int_{\mu_{\varkappa''}}^{\mu_0}\frac{(\mu-\lambda_0)\,d\mu}{M}+4s''\int_{\gamma}^{\mu_0}\frac{(\mu-\lambda_0)\,d\mu}{M}$$

$$=4n\int_{\beta}^{\alpha}\frac{(\nu-\lambda_0)\,d\nu}{N}.$$

Eine entsprechende Modification würde die Formel (5) erleiden. Es mag, um das hier besprochene Vorkommniss kurz zu bezeichnen, die Ausdrucksweise gestattet sein, dass *das Polygon mit s″ Ecken die Mittellinie $\mu=\gamma$ durchstösst.* Die Form der Bedingungsgleichung (6) zeigt, dass die Sätze I und II auch für die allgemeinere Form der geodätischen Polygone ihre Gültigkeit bewahren; das Gleiche ergiebt sich mit Bezug auf Satz III. Im Besonderen ist nach Satz I die Reihenfolge der Ecken gleichgültig, aber es muss von vornherein bestimmt und festgehalten werden, welche von den Krümmungscurven $\mu_\varkappa$ solche Ecken tragen sollen, die $\mu=\gamma$ durchstossen.

Nachdem so die Beschränkung beseitigt ist, dass alle Ecken des Polygons auf derselben Seite der Mittellinie der Zone $(\mu_0\mu_0)$ liegen, würde sich die Frage anschliessen, ob die Berührungspunkte des Polygons irgendwie auf beide Züge der Krümmungscurve μ_0 vertheilt werden können. Bevor jedoch diese Frage (in § 4) erledigt wird, soll in § 3 eine Verallgemeinerung der geodätischen Polygone nach einer wesentlich andern Richtung gewonnen werden.

§ 3.

Ueber uneigentlich geschlossene Polygone (Fadenconstructionen der Krümmungscurve).

Es verdient hervorgehoben zu werden, dass von den beiden Gleichungen (3) und (5) des § 2 die letztere eine weitergreifende Bedeutung hat, als die erstere, wie sich im Lauf der folgenden Betrachtung zeigen wird. Die Ableitung der Gleichung (2) in § 2 war von der Vorstellung begleitet, dass eine Polygonconstruction mit s Seiten und einer gewissen Anzahl von Windungen von einem Punkte $\mu_1\nu_1$ der Krümmungscurve μ_1 bis zu einem Punkte $\mu_1\nu_{s+1}$ derselben Krümmungscurve hinführte (Fig. 2a). Man darf die Polygonconstruction anstatt mit einem Eckpunkt auch mit einem Berührungspunkt $\mu_0\nu_1'$ beginnen und mit einem Berührungspunkt $\mu_0\nu_{s+1}'$ abschliessen (Fig. 2b). An Stelle der Gleichung (2) hat man dann:

$$2\sum_{1}^{s}\int_{\mu_x}^{\mu_0}\frac{(\mu-\lambda_0)\,d\mu}{M}=\int_{\nu_1'}^{\nu_{s+1}'}\frac{(\nu-\lambda_0)\,d\nu}{N}.$$

und die geforderte Coincidenz der Punkte ν_1' und ν_{s+1}' führt natürlich auf dieselbe Bedingung, wie die der Punkte ν_1 und ν_{s+1}. Es werde nun angenommen, dass diese Coincidenz *nicht* eintritt und dass das Polygon vom Punkte ν_1' bis zum Punkte ν_{s+1}' die n^{te} Windung noch nicht vollendet habe.*) Diese Annahme findet ihren äquivalenten analytischen Ausdruck in der Ungleichung:

$$2\sum_{1}^{s}\int_{\mu_x}^{\mu_0}\frac{(\mu-\lambda_0)\,d\mu}{M}<4n\int_{\beta}^{\alpha}\frac{(\nu-\lambda_0)\,d\nu}{N}.$$

Die Form derselben zeigt beiläufig, dass, *wenn das ungeschlossene Polygon einmal die Windungszahl n nicht erreicht, es dieselbe niemals erreicht, wo auch der Anfangspunkt μ_x der Construction auf einer seiner Krümmungscurve μ_x liegt und in welcher Reihenfolge auch die Eckpunkte aufeinander folgen.*

Während nun aus der Differentialgleichung (1) etwas weiteres nicht geschlossen werden kann, bleibt der Ausdruck (4) des Längenelementes der geodätischen Linie auch gültig für das Längenelement der Krümmungscurve μ_0.**) Denkt man sich daher das Polygon durch das Stück der Krümmungscurve μ_0 zwischen ν_{s+1}' und ν_1' (Fig. 2b) geschlossen, so ist die Länge des so geschlossenen Umfanges wie früher durch die Gleichung (5) gegeben. Somit ergiebt sich:

*Wenn ein der Krümmungscurve $\mu=\mu_0$ umbeschriebenes und den gleichartigen Krümmungscurven $\mu=\mu_x$ einbeschriebenes geodätisches Polygon von s Seiten, welches ganz auf der einen Seite der Mittellinie $\mu=\gamma$ verläuft, sich nicht schliesst und die Windungszahl n nicht erreicht, so ist sein Umfang, vermehrt um dasjenige Stück der Krümmungscurve μ_0, welches die n^{te} Windung des Polygons voll macht, constant für jede Lage des Polygons und jede Reihenfolge der Ecken.****)*

Auch ist es, wie man unmittelbar sieht, nicht nöthig, dass das bezeichnete Stück der Krümmungscurve μ_0 gerade an *einer* Stelle ($\nu_{s+1}'\,\nu_1'$ in Fig. 2b) eingeschaltet wird; es kann vielmehr der Polygonumfang an beliebig vielen der Berührungspunkte $\nu_1'\,\nu_2'\cdots\nu_s'$ auseinan-

*) Dass es die $(n-1)^{te}$ Windung überschritten hat, soll in diese Redeweise hier und weiterhin eingeschlossen gedacht sein.

**) Vgl. Diese Annalen Bd. XX, S. 151 und 157.

***) Das eingeschaltete Stück der Krümmungscurve μ_0 ist für verschiedene Lagen des Polygons im Allgemeinen von verschiedener Länge.

dergerissen und daselbst ein Stück Krümmungscurve eingeschaltet werden, wenn nur die Gesammtwindung des Polygons mit Zuziehung jener Stücke gerade n beträgt. Bezeichnet man ein solches erst durch Einschaltung von Stücken der Krümmungscurve μ_0 geschlossenes Polygon im Gegensatz zu den geschlossenen Polygonen des § 2 als ein *uneigentlich geschlossenes* und rechnet „eine Seite" derselben, mit eventuellem Einschluss eines Stückes der Krümmungscurve μ_0, von einem Eckpunkt zum nächstfolgenden, so hat man zusammenfassend den Satz:

Ein der Krümmungscurve μ_0 umbeschriebenes und den gleichartigen Krümmungscurven $\mu_\varkappa$ einbeschriebenes geodätisches Polygon von s Seiten und n Windungen, (welches ganz auf der einen Seite der Mittellinie $\mu = \gamma$ der Zone $(\mu_0 \mu_0)$ verläuft), hat den constanten Umfang:

$$(5) \qquad S = 2\sum_1^s \int_{\mu_\varkappa}^{\mu_0} \frac{(\mu - \lambda_0)(\mu_0 - \mu)\, d\mu}{2\mathsf{M}} + 4n \int_\beta^\alpha \frac{(\nu - \lambda_0)(\nu - \mu_0)\, d\nu}{2\mathsf{N}}$$

und ist uneigentlich oder eigentlich geschlossen, jenachdem:

$$(7) \qquad 2\sum_1^s \int_{\mu_\varkappa}^{\mu_0} \frac{(\mu - \lambda_0)\, d\mu}{2\mathsf{M}} - 4n \int_\beta^\alpha \frac{(\nu - \lambda_0)\, d\nu}{2\mathsf{N}} < 0 \text{ oder } = 0.$$

Die Aufhebung des in runde Klammer geschlossenen Zusatzes würde nach § 2 nur eine leichte Modification der Formeln herbeiführen, den Sinn des Theorems aber nicht ändern.

Da bei einer continuirlichen Bewegung des Polygons, bei welcher der Umfang S und alle Krümmungscurven $\mu_\varkappa$ bis auf eine festgehalten werden, in Folge der Gleichung (5) auch diese eine constant bleibt, und alsdann entweder die Ungleichung oder die Gleichung (7) besteht, so kann man den Satz auch in folgender Form aussprechen:

Wenn ein uneigentlich oder eigentlich geschlossenes Polygon von constantem Umfange dem einen Zweig einer Krümmungscurve μ_0 mit s Seiten und n Windungen umbeschrieben ist und sich $s - 1$ Ecken desselben auf ebensovielen Zweigen von Krümmungscurven gleicher Art bewegen, (die auf derselben Seite des Hauptschnittes $\mu = \gamma$ liegen), so beschreibt auch die s^{te} Ecke den bezüglichen Zweig einer gleichartigen Krümmungscurve.

Auf diesen Satz lässt sich eine *Fadenconstruction der Krümmungscurve* in allgemeinster Form gründen. Für $s = 1$, $n = 1$ giebt er die bekannte Roberts'sche*) Fadenconstruction der Krümmungscurve. Wie

*) Nach Hesse, Vorlesungen über analytische Geometrie des Raumes, am Schluss der 23. Vorlesung. Vgl. M. Roberts, Sur quelques propriétés des lignes

die *Verallgemeinerung* zu verstehen ist, mag beispielsweise für den Fall $s = 2$, $n = 1$ durch Figur 3 schematisch angedeutet werden. Hier bedeutet die stark ausgezogene Linie einen geschlossenen unausdehnbaren Faden und stellen P_1 und P_2 bewegliche Punkte vor, von denen der eine auf der Krümmungscurve μ_1 zu bleiben gezwungen ist*), der andere alsdann bei constanter Fadenlänge die Krümmungscurve μ_2 beschreibt. Die Bewegung der beiden Punkte P_1 und P_2 ist innerhalb gewisser Grenzen von einander unabhängig. Denn während der eine Punkt fest bleibt, können durch Bewegung der andern die Bögen $S_1 S_2$ und $S_1' S_2'$, längs deren sich der Faden an die Krümmungscurve anschmiegt, der eine auf Kosten des andern, verlängert oder verkürzt werden. Dagegen darf keines jener Bogenstücke sich auf weniger als einen Berührungspunkt reduciren. Denn sobald eine der Fadenstrecken $P_1 P_2$ aufhört die Krümmungscurve μ_0 zu berühren, würde diese Strecke keine geodätische Linie der Zone $(\mu_0 \mu_0)$ mehr sein, was bei der Ableitung der obigen Sätze vorausgesetzt war. Wenn indessen der Faden allenthalben ohne Reibung gleitet, regulirt sich die Bewegung aus mechanischen Gründen von selbst in der richtigen Weise. Der Punkt P_1 wird sich nämlich, während sich P_2, den Faden spannend, bewegt, nöthigenfalls auf der Curve μ_1 so verschieben, dass die Fadenstrecken $P_1 S_1$ und $P_1 S_1'$ nicht aufhören, mit der Tangente der Curve in P_1 gleiche Winkel zu bilden, womit eben die Erhaltung der Berührungspunkte S_1 und S_1' postulirt ist.

Nach diesem Beispiel kann man sich die Bedeutung des allgemeinen Satzes vorstellen, bei dem die Anzahl der Polygonecken grösser als 2 ist und die Anzahl der Windungen mehr als 1 beträgt. Wenn dann das Polygon eigentlich geschlossen ist, so kann sich kein Eckpunkt bewegen, ohne dass sich alle übrigen mitbewegen. Denn da bei einer continuirlichen Bewegung die Reihenfolge der Ecken erhalten bleibt, so bestimmt irgend ein Eckpunkt die ganze Polygonconstruction. Wenn aber das Polygon bloss uneigentlich geschlossen ist, so können sich sehr wohl einzelne Eckpunkte innerhalb gewisser Grenzen bewegen, ohne die gleichzeitige Bewegung des ganzen Eckpunktsystems nach sich zu ziehen.**)

---

géodésiques et des lignes de courbure de l'ellipsoide, Liouville's Journal, 1. Serie, Bd. XI und Chasles, Sur les lignes géodésiques et les lignes de courbure des surfaces du second degré, ebenda.

*) Man wird sich etwa einen Draht längs der Curve μ_1 lose auf das Ellipsoid aufgelegt und den Faden bei P_1 um denselben frei gleitend herumgeschlungen denken.

**) Zu der in diesem Paragraphen mitgetheilten Auffassung, nach der die eigentlich geschlossenen Polygone als Specialfall der uneigentlich geschlossenen erscheinen, bleibt zu bemerken, dass man auch umgekehrt die letzteren als eigentlich geschlossene Polygone mit unendlich vielen, in die Krümmungscurve μ_0 fallenden Ecken betrachten kann.

§ 4.

Ueber Polygone mit vollständigen Windungen und vollständigen Oscillationen.

Die in § 2 behandelten Polygone, deren Seiten sämmtlich den einen Zweig der Krümmungscurve μ_0 berühren, bezeichne ich als Polygone mit unvollständigen Oscillationen, solange keine der Ecken $\mu_{x''}$, welche den Hauptschnitt $\mu = \gamma$ durchstossen, den bisher ausser Acht gelassenen Zweig der Krümmungscurve μ_0 erreicht. Wenn dagegen m von den Krümmungscurven $\mu_{x''}$ mit μ_0 zusammenfallen, so verwandeln sich die m entsprechenden Ecken $\mu_{x''}$ des Polygons in m Berührungspunkte des Polygonumfanges mit dem vorher unberührten Zweige von μ_0. In diesem Falle wird man mit naheliegender Terminologie sagen, *dass das Polygon neben den n Windungen um die Längsdimension der Zone* $(\mu_0\,\mu_0)$ *zugleich m Oscillationen zwischen den beiden Zweigen der Krümmungscurve* μ_0, *welche die Zone begrenzen, vollführt.*

Die Formel (6) des § 2 kann auf Polygone mit vollständigen Oscillationen unmittelbar angewendet werden, und man gelangt zu dem Resultate:

Wenn ein geodätisches Polygon der Zone $(\mu_0\,\mu_0)$, *welches seine* $s = s' + s''$ *Ecken auf s Krümmungscurven* $\mu = \mu_x\,(\mu_x < \mu_0)$ *hat und mit den* s'' *Ecken* $\mu_{x''}\,(x'' = s' + 1, \cdots s)$ *die Mittellinie der Zone durchstösst, mit den* s' *übrigen Ecken* $\mu_{x'}\,(x' = 1, \cdots s')$ *aber nicht durchstösst, sich nach n Windungen und m Oscillationen schliessen soll, so muss die Bedingung erfüllt sein:*

$$(8)\quad 2\sum_{1}^{s'}{}_{x'}\int_{\mu_{x'}}^{\mu_0}\frac{(\mu-\lambda_0)\,d\mu}{\mathsf{M}} - 2\sum_{s'+1}^{s}{}_{x''}\int_{\mu_{x''}}^{\mu_0}\frac{(\mu-\lambda_0)\,d\mu}{\mathsf{M}}$$

$$+4(s''+m)\int_{\gamma}^{\mu_0}\frac{(\mu-\lambda_0)\,d\mu}{\mathsf{M}} = 4n\int_{\beta}^{\alpha}(\nu-\lambda_0)\frac{d\nu}{\mathsf{N}}.$$

Die durch Einführung der Oscillationen erreichte Verallgemeinerung der geodätischen Polygone macht sofort die Unterscheidung der beiden Zweige einer Krümmungscurve überflüssig. Seien nämlich $\mu_1\nu_1$, $\mu_2\nu_2$, $\mu_3\nu_3$ irgend welche aufeinanderfolgende Ecken (vgl. Fig. 4) und $\nu_2'\nu_3'$, $\nu_3'\nu_4'$ die beiden Halbbogen einer vollen Oscillation des Polygons. Wenn man die geodätische Linie $\nu_1'\nu_2$ über ν_2 hinaus verlängert, wie es durch die punktirte Linie der Figur 4 angedeutet ist, so schneidet sie den Bogen $\nu_2'\nu_3'$ in einem Punkte $\mu_2''\nu_2''$, der auf derselben Krümmungscurve $(\mu_2'' = \mu_2)$ liegt, wie der Punkt $\mu_2\nu_2$. Denn

zunächst kann die bezeichnete Verlängerung den Bogen $\nu_2' \nu_3'$ erst dann schneiden, wenn sie zuvor μ_0, etwa in ν_3'', berührt hat*); indem man hiernach die Differentialgleichung (1):

$$\frac{(\mu - \lambda_0)\, d\mu}{M} = \frac{(\nu - \lambda_0)\, d\nu}{N}$$

einmal auf dem Wege $\nu_2 \nu_2' \nu_2''$ und einmal auf dem Wege $\nu_2 \nu_3'' \nu_2''$ integrirt, erhält man resp.

$$\int_{\mu_2}^{\mu_0} \frac{(\mu - \lambda_0)\, d\mu}{M} - \int_{\mu_0}^{\gamma} \frac{(\mu - \lambda_0)\, d\mu}{M} + \int_{\gamma}^{\mu_2''} \frac{(\mu - \lambda_0)\, d\mu}{M} = \int_{\nu_2}^{\nu_2''} \frac{(\nu - \lambda_0)\, d\nu}{N},$$

$$-\int_{\mu_2}^{\gamma} \frac{(\mu - \lambda_0)\, d\mu}{M} + \int_{\gamma}^{\mu_0} \frac{(\mu - \lambda_0)\, d\mu}{M} - \int_{\mu_0}^{\mu_2''} \frac{(\mu - \lambda_0)\, d\mu}{M} = \int_{\nu_2}^{\nu_2''} \frac{(\nu - \lambda_0)\, d\nu}{N},$$

wo das Vorzeichen von M allenthalben positiv ist und die beiden Integrale rechter Hand mit positivem $\frac{d\nu}{N}$ auf genau gleichen Integrationswegen genommen sind. Es folgt daher durch Vergleichen der linken Seiten nach einfacher Reduction:

$$\int_{\mu_2}^{\mu_0} \frac{(\mu - \lambda_0)\, d\mu}{M} = \int_{\mu_2''}^{\mu_0} \frac{(\mu - \lambda_0)\, d\mu}{M},$$

was bei der vorliegenden Beschränkung der Integrationswege zu dem Schlusse führt $\mu_2'' = \mu_2$. Indem man so den Bogen $\nu_2 \nu_2' \nu_2''$ durch den Bogen $\nu_2 \nu_3'' \nu_2''$ ersetzt, wird die Ecke μ_2 von einem Zweige der Krümmungscurve μ_2 auf den andern verlegt, während die Integration der Differentialgleichung (1) längs des Polygonumfanges vor und nach dieser Modification zu derselben Gleichung (8) führt.

Wie die Ecke μ_2, so kann ferner die Ecke μ_1 von der einen auf die andre Seite der Mittellinie $\mu = \gamma$ verlegt werden, worauf auch der zwischen beiden Ecken gelegene Berührungspunkt ν_1' auf die andre Seite (nach ν_3'') verlegt erscheint. Auch Ecken, welche die Mittellinie durchstossen, können auf diese Weise transponirt werden und durchstossen dann die Mittellinie von der andern Seite her. Nimmt man hierzu die Vertauschbarkeit der Reihenfolge der Ecken, so erkennt man, dass beliebig viele vorgegebene Ecken von der einen auf die andre Seite der Mittellinie verlegt werden können, ohne dass die Bedingungsgleichung (8) der Schliessung des Polygons eine Aenderung erfährt. Es ergiebt sich also:

Wenn ein geodätisches Polygon der Zone $(\mu_0 \mu_0)$ *sich mit n Windungen*

*) Weil sich Halbbogen derselben Art (vgl. diese Annalen Bd. XX, S. 158) nicht schneiden.

und m Oscillationen einmal schliesst, so schliesst es sich immer, unabhängig nicht nur von der Reihenfolge, in der die Ecken auf die gegebenen Krümmungscurven $\mu_\varkappa$ vertheilt werden, sondern auch davon, auf welchen Zweig ihrer Krümmungscurve eine jede zu liegen kommt.

Es kommt allerdings darauf an, *dass diejenigen Krümmungscurven bezeichnet sind und festgehalten werden, welche die den Hauptschnitt $\mu = \gamma$ durchstossenden Ecken tragen sollen.* In dieser Hinsicht zerfallen die Ecken des Polygons in zwei wesentlich gesonderte Gruppen, deren Elemente nicht mit einander vertauscht werden können.

Es bedarf kaum der Erwähnung, dass auch in dem hier behandelten Falle der Umfang des Polygons, der unmittelbar angegeben werden kann, eine unveränderliche Länge besitzt.

§ 5.

Ueber allgemeinere Polygone mit vollständigen Windungen.

Der Uebergang von den Polygonen des § 2 zu denen des § 3 liess die Berührungspunkte der Polygone mit der Krümmungscurve μ_0 als eine specialisirte Form der Ecken erscheinen. Hieran anknüpfend soll der vorliegende § 5 auf geodätische Polygone der Zone $(\mu_0\ \mu_0)$ hinweisen, die *nur Ecken* besitzen. Diese Polygone umfassen als Specialfälle sowohl die früher behandelten Polygone, *welche Ecken und Berührungspunkte*, als auch die sogleich zu erwähnenden Polygone, *welche nur Berührungspunkte* aufweisen.

Man denke sich ein geodätisches Polygon, wie in Fig. 5 angedeutet, aus einer Zickzacklinie bestehend, deren $2s$ Ecken etwa abwechselnd auf der einen und auf der andern Seite der Mittellinie $\mu = \gamma$ und zwar bezüglich auf $2s$ gegebenen Krümmungscurven $\mu_\varkappa$ $(\varkappa = 1, 2, \cdots, 2s)$ liegen, deren Seiten aber wieder geodätische Linien der Zone $(\mu_0\mu_0)$ sind. Es ergiebt sich in diesem Falle analog, wie in § 2, dass sich das Polygon nach n Umwindungen schliesst, wenn:

$$(9) \qquad \sum_{1}^{2s} \int_{\gamma}^{\mu_\varkappa} \frac{(\mu - \lambda_0)\, d\mu}{\mathsf{M}} = 4n \int_{\beta}^{\alpha} \frac{(\nu - \lambda_0)\, d\nu}{\mathsf{N}},$$

wo wieder die Vorzeichen der Quadratwurzeln M und N positiv genommen sind. Die Form dieser Bedingung zeigt unmittelbar, dass *das Polygon, wenn es sich schliesst, sich immer schliesst, unabhängig davon, in welcher Reihenfolge die Ecken auf die $2s$ Krümmungscurven $\mu_\varkappa$ und in welcher Weise sie auf die beiden Seiten der Mittellinie $\mu = \gamma$ vertheilt werden, mit der einzigen Beschränkung, dass sie abwechselnd auf die eine und andre Seite zu liegen kommen.*

Lässt man diese Beschränkung fallen, so erleidet die Formel (8) eine nach dem Früheren leicht verständliche Modification und die Vertauschbarkeit der Ecken hört auf eine völlig unbeschränkte zu sein.

Mit $\mu_\varkappa = \mu_0$ für $\varkappa = 1, 2, \cdots, 2s$ wird jede Seite des Polygons ein geodätischer Halbbogen, jede Ecke ein Berührungspunkt mit der Krümmungscurve μ_0, und die Bedingung (9) geht über in:

$$4s\int_{\gamma}^{\mu_0}\frac{(\mu-\lambda_0)\,d\mu}{\mathsf{M}} = 4n\int_{\beta}^{\alpha}\frac{(\nu-\lambda_0)\,d\nu}{\mathsf{N}}, \tag{10}$$

d. h. *die geodätische Linie der Zone* $(\mu_0\mu_0)$ *schliesst sich mit s vollen Oscillationen und n Windungen, wenn die beiden reellen Perioden:*

$$2\int_{\gamma}^{\mu_0}\frac{(\mu-\lambda_0)\,d\mu}{\mathsf{M}} \quad \textit{und} \quad 2\int_{\beta}^{\alpha}\frac{(\nu-\lambda_0)\,d\nu}{\mathsf{N}}$$

des Integrales

$$\int\frac{(z-\lambda_0)\,dz}{\sqrt{(\alpha-z)(\beta-z)(\gamma-z)(\mu_0-z)(\lambda_0-z)}}$$

das rationale Verhältniss $\frac{n}{s}$ *haben.*

In Folge der bekannten Relation:

$$\int_{-\infty}^{\lambda_0}\frac{(\lambda_0-\lambda)\,d\lambda}{\Lambda} + \int_{\gamma}^{\mu_0}\frac{(\mu-\lambda_0)\,d\mu}{\mathsf{M}} = \int_{\beta}^{\alpha}\frac{(\nu-\lambda_0)\,d\nu}{\mathsf{N}},$$

in der Λ, M, N dasselbe Radical $\sqrt{(\alpha-z)(\beta-z)(\gamma-z)(\mu_0-z)(\lambda_0-z)}$ resp. mit $z=\lambda$, μ, ν bedeuten und sämmtlich mit positivem Vorzeichen zu nehmen sind, *kann der Bedingung* (10) *nur entsprochen werden, wenn* $s > n$ *ist, d. h. die Anzahl der Oscillationen grösser als die Anzahl der Windungen postulirt wird.*

Auf der andern Seite kann aber auch das Verhältniss $\frac{n}{s}$ der Anzahl der Windungen und der Anzahl der Oscillationen nicht beliebig klein gegeben werden, wenn man vermittels der Formel (10) auf dem Ellipsoide μ_0 eine Krümmungscurve μ_0 bestimmen will, so dass sich die geodätische Linie der Zone $(\mu_0\mu_0)$ mit n Windungen und s Oscillationen schliesst.

Um dies zu erkennen, betrachte man den Quotienten:

$$\frac{\int_{\gamma}^{\mu_0}\frac{(\mu-\lambda_0)\,d\mu}{\mathsf{M}}}{\int_{\beta}^{\alpha}\frac{(\nu-\lambda_0)\,d\nu}{\mathsf{N}}} = Q(\mu_0)$$

als Function von μ_0. Es ist dann nach der angeführten Periodenrelation:

$$Q(\mu_0) = 1 - \frac{\int_{-\infty}^{\lambda_0} \frac{(\lambda_0 - \lambda)\, d\lambda}{\sqrt{(\alpha-\lambda)(\beta-\lambda)(\gamma-\lambda)(\mu_0-\lambda)(\lambda_0-\lambda)}}}{\int_{\beta}^{\alpha} \frac{(\nu - \lambda_0)\, d\nu}{\sqrt{(\alpha-\nu)(\nu-\beta)(\nu-\gamma)(\nu-\mu_0)(\nu-\lambda_0)}}}.$$

Hieraus ist unmittelbar ersichtlich, dass die Function $Q(\mu_0)$ von μ_0 in dem Intervalle $\beta > \mu_0 > \gamma$ mit abnehmendem μ_0 beständig abnimmt und zwar von dem Werthe 1, den sie für $\mu_0 = \beta$ erhält, zu dem Werthe:

$$M_0 = \frac{\pi\sqrt{\gamma - \lambda_0}}{\sqrt{(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)} \cdot \int_{\beta}^{\alpha} \frac{(\nu-\lambda_0)\, d\nu}{(\nu-\gamma)\sqrt{(\alpha-\nu)(\nu-\beta)(\nu-\lambda_0)}}},$$

den sie für $\mu_0 = \gamma$ annimmt; es ist nämlich, was den letzten Punkt betrifft:

$$\lim_{\mu_0=\gamma} \int_{\gamma}^{\mu_0} \frac{(\mu-\lambda_0)\, d\mu}{\sqrt{(\alpha-\mu)(\beta-\mu)(\mu_0-\mu)(\mu-\gamma)(\mu-\lambda_0)}} = \frac{\pi\sqrt{\gamma-\lambda_0}}{\sqrt{(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)}}\ ^{*}).$$

Da die Function $Q(\mu_0)$ aber in dem betrachteten Intervalle stetig ist, so wird sie in demselben jeden rationalen Werth zwischen 1 und M_0 wirklich annehmen, aber auch keiner ausserhalb dieses Intervalles gelegenen rationalen Zahl gleich werden können. Zugleich geht aus dem Verhalten der Function $Q(\mu_0)$ hervor, dass sich innerhalb der vorliegenden Grenzen das μ_0 aus der Gleichung (10) eindeutig bestimmen lässt.

Hierbei ist zu bemerken, dass den Grenzwerthen $\mu_0 = \gamma$ und $\mu_0 = \beta$ selbst keine Schliessungssätze mehr entsprechen. Denn für $\mu_0 = \gamma$ reducirt sich die geodätische Linie auf den Hauptschnitt $\mu = \gamma$; für $\mu_0 = \beta$ läuft sie allerdings nach je einer vollen Umwindung und einer vollen Oscillation von einem Kreispunkt des Ellipsoides durch den diametralen Kreispunkt zu jenem zurück, aber nicht wieder mit derselben *Richtung*, mit der sie ausgegangen war.**) Die Schliessung findet also nicht mehr in dem Sinne statt, wie bei dem allgemeinen Falle, wo die geodätische Linie in jedem Berührungspunkt mit der Krümmungscurve μ_0 überhaupt nur *eine* Richtung besitzt und deshalb, wenn sie von einem solchen ausgeht und nach einer Anzahl von

*) Vgl. hierzu Rosenhain, Mémoire sur les fonctions de deux variables et à quatre périodes (Mémoires présentés à l'Academie etc. tome XI), Cap. I, § 7.

**) Vgl. Salmon-Fiedler, Analytische Geometrie des Raumes, Theil II, Art. 166.

Windungen und Oscillationen wieder dahin zurückkehrt, nothwendig auch wieder die Ausgangs*richtung* inne hat.

Für $\lambda_0 = \gamma$ giebt die Gleichung (10), indem sie die Form erhält:

$$4s\int_{\gamma}^{\mu_0} \frac{d\mu}{\sqrt{(\alpha-\mu)(\beta-\mu)(\mu_0-\mu)}} = 4n\int_{\beta}^{\alpha} \frac{d\nu}{\sqrt{(\alpha-\nu)(\nu-\beta)(\nu-\mu_0)}},$$

die Bedingung dafür, dass ein geradliniges *ebenes* Polygon, welches der Focalellipse $\mu = \gamma$ einbeschrieben und der Ellipse $\mu = \mu_0$ in der Ebene der Focalellipse umbeschrieben ist, sich mit $2s$ Seiten und n Umwindungen um die berührte Ellipse schliesst. Dem Falle $\mu_0 = \gamma$ entspricht hier bei endlicher Windungszahl n ein Polygon von unendlich vielen Seiten. Dem Falle $\mu_0 = \beta$, in welchem sich der Kegelschnitt $\mu = \mu_0$ auf seine Brennpunkte reducirt, entspricht in dem oben angegebenen Sinne kein eigentlicher Schliessungssatz mehr.

Etwas anders, als hier für die geodätischen Linien der Zonen $(\mu_0\mu_0)$ entwickelt worden ist, gestalten sich die Verhältnisse für die geodätischen Linien der Zonen $(\nu_0\nu_0)$, d. h. diejenigen geodätischen Linien des Ellipsoides, welche zwischen den beiden Zweigen der von einem zweischaligen Hyperboloid $\nu = \nu_0$ ausgeschnittenen Krümmungscurve oscilliren und sich im Sinne des Hauptschnittes $\nu = \alpha$ um das Ellipsoid herumwinden. Der Hauptunterschied dieser Linien von den hier behandelten ist in dem Satze ausgesprochen: *Die geodätische Linie der Zone $(\nu_0\nu_0)$ kann sich nur mit mehr Windungen als Oscillationen schliessen.**)

§ 6.

Ueber Polygone mit vollständigen Oscillationen und unvollständigen Windungen.

Im Gegensatz zu § 2, der geodätische Polygone mit vollständigen Windungen und unvollständigen Oscillationen behandelte, sollen hier Polygone mit unvollständigen Windungen und vollständigen Oscillationen in Kürze Erwähnung finden. Es seien auf dem Ellipsoid λ_0 neben der Krümmungscurve μ_0 irgend $2s$ Krümmungscurven $\nu_1\nu_2\cdots\nu_{2s}$ der andern Art fixirt. Man construire ein geodätisches Polygon, dessen

*) Dieser Satz überträgt sich, wie der entsprechende für die geodätischen Linien der Zonen $(\mu_0\mu_0)$, durch Collineation auf das zweischalige Hyperboloid, auf welchem sich also eine geodätische Linie nur mit mehr Oscillationen als Windungen oder nur mit mehr Windungen als Oscillationen schliessen kann, jenachdem sie einer Zone $(\mu_0\mu_0)$ oder einer Zone $(\lambda_0\lambda_0)$ auf dem Hyperboloid angehört. Der Begriff der Zone ist hierbei mit Rücksicht auf den Durchgang der Fläche durch das Unendliche in leicht ersichtlicher Weise zu verallgemeinern.

Seiten geodätische Linien der Zone $(\mu_0 \mu_0)$ sind, und dessen Ecken auf den Krümmungscurven $\nu_1 \nu_2 \cdots \nu_{2s}$ und zwar abwechselnd auf der einen und andern Seite des Hauptschnittes $\nu = \beta$ liegen, sodass jede Seite des Polygons diesen Hauptschnitt durchsetzt, während der Hauptschnitt $\nu = \alpha$ von dem Polygonumfange nicht erreicht werde. Das Polygon wird sich dann von dem einen Zweige der Krümmungscurve μ_0 gegen den andern hinziehen und nachdem es denselben berührt hat, wieder dem ersteren zustreben u. s. f. Nach der bisher angewandten Methode leitet man auch hier den Satz ab:

Das Polygon schliesst sich mit $2s$ Seiten und m vollen Oscillationen, wenn die Bedingung erfüllt ist:

$$(11) \qquad 2 \sum_{1}^{2s} \int_{\beta}^{\nu_\varkappa} \frac{(\nu - \lambda_0)\, d\nu}{\mathsf{N}} = 4m \int_{\gamma}^{\mu_0} \frac{(\mu - \lambda_0)\, d\mu}{\mathsf{M}} .$$

Die Lage eines Polygons der betrachteten Art gegen den Hauptschnitt $\nu = \beta$ und die Grenzen $\mu = \mu_0$ der Zone $(\mu_0 \mu_0)$ ist für den Fall $m = 1$, $s = 2$, $\nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = \nu_4$ in Fig. 6 schematisch angedeutet. Die Bedingung (11) ist wieder unabhängig von der Reihenfolge, in der die Ecken des Polygons auf die gegebenen Krümmungscurven $\nu_\varkappa$ vertheilt werden. Aber es mag des Folgenden wegen bemerkt werden, dass sich durch die Vertheilung der Ecken auf die $\nu_\varkappa$ jeweils die Vertheilung der Berührungspunkte mit der Krümmungscurve μ_0 auf die einzelnen Polygonseiten mitbestimmt.

Die Aufhebung der Voraussetzung, dass jede Polygonseite den Hauptschnitt $\nu = \beta$ und keine den Hauptschnitt $\nu = \alpha$ durchsetzt, hat leicht ersichtliche Modificationen der Bedingungsgleichung (11) zur Folge, analog denjenigen, welche in § 1 die den Hauptschnitt $\mu = \gamma$ durchstossenden Ecken herbeiführten.

§ 7.

Ueber Polygone mit unvollständigen Oscillationen und unvollständigen Windungen.

Die in § 6 untersuchten Polygone werden verallgemeinert, indem man ihre Berührungspunkte mit der Krümmungscurve μ_0 in Ecken verwandelt. Man wird so zu Polygonen geführt, deren Seiten geodätische Linien der Zone $(\mu_0 \mu_0)$ sind und von deren Ecken $2s'$ auf gegebenen Krümmungscurven $\mu_{\varkappa'}$ der einen und $2s''$ auf gegebenen Krümmungscurven $\nu_{\varkappa''}$ der andern Art liegen. Der Uebersichtlichkeit halber sei angenommen, dass der Polygonumfang zwischen 2 Ecken $\mu_{\varkappa'}$ den Hauptschnitt $\lambda = \gamma$ und zwischen je 2 Ecken $\nu_{\varkappa''}$ den Haupt-

schnitt $v = \beta$ durchsetzt, den Hauptschnitt $v = \alpha$ aber nicht erreicht (vgl. die schematische Darstellung in Fig. 7 für $s' = 3$, $s'' = 1$).

Das Polygon schliesst sich unter der Bedingung:

$$(12) \qquad 2\sum_{1}^{2s'}{}'_{\varkappa'} \int_{\gamma}^{\mu_{\varkappa'}} \frac{(\mu - \lambda_0)\, d\mu}{\mathsf{M}} = 2\sum_{1}^{2s''}{}'_{\varkappa''} \int_{\beta}^{\nu_{\varkappa''}} \frac{(\nu - \lambda_0)\, d\nu}{\mathsf{N}};$$

es schliesst sich also unabhängig von der Wahl der Anfangsecke auf der ihr zugewiesenen Krümmungscurve und unabhängig von der Reihenfolge, in der die Ecken $\mu_{\varkappa'}$ auf die Krümmungscurven $\mu_{\varkappa'}$ und die Ecken $\nu_{\varkappa''}$ auf die Krümmungscurven $\nu_{\varkappa''}$ vertheilt werden. Dagegen ist die Ineinanderschiebung der beiden Reihen von Eckpunkten ebensowenig willkürlich, wie es in § 6 die Verkettung der Eckpunkte und Berührungspunkte war.

Wollte man zulassen, dass einige Ecken des Polygons den Hauptschnitt $v = \alpha$ durchstossen, oder wollte man die Voraussetzung über die Beziehung des Polygons zu den Hauptschnitten $\mu = \gamma$ und $\nu = \beta$ fallen lassen, so würde man an Symmetrie der Formel (12) verlieren und entsprechend die unbegrenzte Vertauschbarkeit der gleichartigen Ecken einbüssen. Es soll deshalb dieser Verallgemeinerung nicht ausführlicher gedacht werden, aber im folgenden Paragraphen noch eine allgemeine, auch auf diese Fälle bezügliche Bemerkung Platz finden.

§ 8.

Allgemeine Grundlage der Schliessungssätze geodätischer Polygone.

Vermöge der bekannten Winkelbeziehung zwischen den Richtungen der beiden Krümmungscurven und den Richtungen der beiden geodätischen Linien der Zone $(\mu_0 \mu_0)$, welche durch einen Punkt μ, ν der Zone hindurchgehen, ist das Bildungsgesetz der geodätischen Polygone dahin auszusprechen, dass in den Ecken $\mu_{\varkappa'}$ (d. h. denjenigen Ecken, welche auf einer Krümmungscurve $\mu = \mu_{\varkappa'}$ liegen sollen) der Polygonwinkel von der betreffenden Krümmungscurve ν, in den Ecken $\nu_{\varkappa''}$ der Polygonwinkel von der betreffenden Krümmungscurve μ halbirt wird. Der analytische Ausdruck dieser Eigenschaft ist, wenn man mit Rücksicht auf § 2 das Verhalten der Differentiale $\frac{(\mu - \lambda_0)\, d\mu}{\mathsf{M}}$ oder $\frac{(\nu - \lambda_0)\, d\nu}{\mathsf{N}}$ in einer Polygonecke als regulär oder irregulär bezeichnet, jenachdem beim Durchgang durch diese Ecke $d\mu$ und M oder $d\nu$ und N resp. beide ihr Vorzeichen sprungsweise wechseln oder beide nicht wechseln, der folgende: In den Ecken $\mu_{\varkappa'}$ verhält sich das Differential $\frac{(\mu - \lambda_0)\, d\mu}{\mathsf{M}}$

irregulär, das Differential $\frac{(\nu - \lambda_0)\, d\nu}{N}$ regulär, in den Ecken $\nu_{\varkappa''}$ findet das Umgekehrte statt.

Auf diesem Umstande beruht es, dass bei der Integration der Differentialgleichung der geodätischen Linie längs des Polygonumfanges die ν-Coordinaten der Ecken $\mu_{\varkappa'}$ und die μ-Coordinaten der Ecken $\nu_{\varkappa''}$ herausfallen, und danach die Schliessung des Polygons von der Lage der einzelnen Ecken auf ihren Krümmungscurven unabhängig ist. Auf demselben Umstande beruht es ferner, dass der Umfang der Polygone in gleichem Sinne unabhängig erscheint. Denn der Umfang drückt sich durch eine Summe von Integralen 2. Gattung aus, die genau dieselben Integrationswege besitzen, wie die Integrale 1. Gattung in der Bedingungsgleichung des Schliessungsproblems. Der Ausdruck des Umfanges ist daher bezüglich von denselben Elementen abhängig resp. unabhängig, wie jene Bedingungsgleichung. Die Erhaltung des Umfanges gilt hiernach allgemeiner, als sie von Hart*) ausgesprochen worden ist.

Die vorstehende Untersuchung geodätischer Polygone auf dem Ellipsoid setzte dieselben immer als gebildet aus geodätischen Linien einer Zone $(\mu_0 \mu_0)$ voraus. Die Behandlung der Polygone aus geodätischen Linien einer Zone $(\nu_0 \nu_0)$ bietet keine wesentlich neuen Verhältnisse dar. Auf den hauptsächlichsten Unterschied der geodätischen Linie einer Zone $(\mu_0 \mu_0)$ und einer Zone $(\nu_0 \nu_0)$ wurde bereits am Schlusse des § 5 hingewiesen.

II. Geodätische Polygone auf dem einschaligen Hyperboloid.

§ 9.

Ueber die 3 Arten geodätischer Linien auf dem einschaligen Hyperboloid.

Von den 2 Arten geodätischer Linien auf dem Ellipsoid, welche einerseits die Krümmungscurven $\mu = \text{const.}$, anderseits die Krümmungscurven $\nu = \text{const.}$ berühren, werden die einen von den reellen gemeinsamen Tangenten des Ellipsoides und eines confocalen einschaligen Hyperboloides, die andern von den reellen gemeinsamen Tangenten des Ellipsoides und eines confocalen zweischaligen Hyperboloides umhüllt. Diesen beiden Arten entsprechen durch die in § 1 angegebene reelle Transformation des Raumes auf dem zweischaligen Hyperboloid bezüglich 2 Arten geodätischer Linien, welche resp. die Krümmungscurven $\mu = \text{const.}$ und die Krümmungscurven $\lambda = \text{const.}$ berühren. Demgegenüber hat man auf dem einschaligen Hyperboloid 3 Arten

*) Vgl. Salmon-Fiedler, Analytische Geometrie des Raumes II, Art. 165.

geodätischer Linien zu unterscheiden. Zunächst giebt es 2 Arten, die beziehungsweise von den gemeinsamen Tangenten des einschaligen Hyperboloides und eines confocalen Ellipsoides oder zweischaligen Hyperboloides umhüllt werden und demgemäss Krümmungscurven der einen und andern Art auf dem einschaligen Hyperboloid berühren. Diese beiden Arten gehen bei der erwähnten Transformation des confocalen Systems in sich wechselseitig *in einander* über, weil sich dabei Ellipsoide und zweischalige Hyperboloide vertauschen. Zu diesen beiden Arten tritt eine dritte Art geodätischer Linien auf dem einschaligen Hyperboloid, deren Gesammtheit bei der Transformation *in sich* übergeht. Diese geodätischen Linien berühren im Allgemeinen keine Krümmungscurve und werden umhüllt von den reellen gemeinsamen Tangenten des einschaligen Hyperboloides, auf dem sie verlaufen, und eines zweiten einschaligen Hyperboloides. Sie gehen im Besonderen beim Zusammenfall dieser beiden Hyperboloide in die geradlinigen Erzeugenden des einen Hyperboloides über.

Die Differentialgleichung der geodätischen Linien auf dem einschaligen Hyperboloid:

$$\frac{x^2}{\alpha-\mu_0}+\frac{y^2}{\beta-\mu_0}-\frac{z^2}{\mu_0-\gamma}=1$$

lautet in den in § 2 beiläufig eingeführten elliptischen Coordinaten:

$$\frac{(\mu_0-\lambda)\,d\lambda}{\sqrt{(\alpha-\lambda)(\beta-\lambda)(\gamma-\lambda)(\mu_0-\lambda)(\varrho-\lambda)}} = \frac{(\nu-\mu_0)\,d\nu}{\sqrt{(\alpha-\nu)(\nu-\beta)(\nu-\gamma)(\nu-\mu_0)(\nu-\varrho)}}. \tag{13}$$

Dabei ist ϱ der Parameter einer Fläche des confocalen Systems; die gemeinsamen Tangenten dieser Fläche ϱ mit der Fläche μ_0 umhüllen die geodätische Linie.

Es sollen nun folgende Ausdrucksweisen gebraucht werden: Dasjenige Gebiet der Fläche des einschaligen Hyperboloides, welches begrenzt wird von den beiden Zweigen einer Krümmungscurve ϱ ($\varrho = \lambda_0$ oder ν_0) und den Hauptschnitt σ ($\sigma = -\infty$, γ, β oder α) in sich enthält, heisst eine *Zone* $(\varrho, \sigma, \varrho)$.

Dabei ist das Hyperboloid als im Unendlichen in sich zusammenhängend vorgestellt, sodass auch die Krümmungscurven $\nu = \text{const.}$ aus zwei geschlossenen Zügen bestehend zu denken sind. — Eine *volle Windung* einer geodätischen Linie, welche auf die Zone $(\varrho, \sigma, \varrho)$ beschränkt ist, erstreckt sich im Sinne der Richtung des Hauptschnittes σ einmal um die Zone herum, ohne dass die geodätische Linie, wie der Hauptschnitt σ, nach einer vollen Windung in sich zurückkehrt. Eine *volle Oscillation* erstreckt sich von einem Berührungspunkt der geodätischen Linie mit dem einen Zweige der Krümmungscurve ϱ bis

zum nächsten Berührungspunkt mit demselben Zweige. Man kann die *Halboscillationen* der geodätischen Linie, die von einem Berührungspunkt mit dem einen Zweige bis zum nächsten Berührungspunkt mit dem andern reichen, in *rechts* und in *links gewundene* trennen, jenachdem sie bei Festsetzung einer bestimmten Richtung der geodätischen Linie von dem einen Zweig der Krümmungscurve ϱ zum andern oder von diesem zum ersteren führen (vgl. § 10, Anm. S. 246).

Die gegenseitige Stellung der drei Arten geodätischer Linien, deren gemeinsamer analytischer Ausdruck die Differentialgleichung (13) ist, kann in folgender Weise charakterisirt werden:

Eine geodätische Linie 1. *Art*, $\varrho = \lambda_0$ $(-\infty \leqq \lambda_0 \leqq \gamma)$, ist auf die Zone $(\lambda_0, -\infty, \lambda_0)$ beschränkt; sie oscillirt zwischen den beiden Zweigen der Krümmungscurve λ_0, welche sie abwechselnd berührt, hin und her, indem sie *mit jeder vollen Oscillation stets mehr als eine volle Windung vollführt.* Für $\lambda = -\infty$ zieht sich die Zone, innerhalb deren die geodätische Linie verläuft auf den Hauptschnitt $\lambda = -\infty$ zusammen. Für $\lambda_0 = \gamma$ dagegen dehnt sich die entsprechende Zone über die ganze Fläche des Hyperboloides aus und die Oscillationen der geodätischen Linie reichen von der einen Seite des Hauptschnittes $\lambda = \gamma$ durch das Unendliche hindurchlaufend bis auf die andere Seite desselben. In jedem Punkte des Hauptschnittes $\lambda = \gamma$ berührt also von jeder Seite her ein Zug der geodätischen Linie 1. Art der Zone $(\gamma, -\infty, \gamma)$. Anstatt diese beiden Züge durch den Hauptschnitt $\lambda = \gamma$ getrennt zu denken, kann man sie aber auch als 2 sich in dem Punkte kreuzende Züge auffassen, deren jeder den Hauptschnitt mit einer gleichzeitigen Wendung unter dem Winkel 0 durchsetzt. In dieser Verbindung ihrer Züge gehört die geodätische Linie bereits der 3. Art an.

Jede geodätische Linie 3. *Art*, $\varrho = \mu_1$ $(\gamma \leqq \mu_1 \leqq \beta)$, bedeckt mit ihren Windungen das ganze Hyperboloid, ohne ein Gebiet frei zu lassen. Bei einer solchen Linie giebt es keine Oscillationen mehr; die Linie windet sich dafür gleichzeitig im Sinne der Krümmungscurven $\lambda = \text{const.}$ und im Sinne der Krümmungscurven $\nu = \text{const.}$ um das Hyperboloid herum. Solange $\gamma \leqq \mu_1 < \mu_0$ ist, *kommt auf eine Windung im Sinne der Krümmungscurven* $\nu = const.$ (die halbe Windung etwa gerechnet von einem Durchgang durch den Hauptschnitt $\lambda = \gamma$ bis zum nächstfolgenden) *immer mehr als eine Windung im Sinne der Krümmungscurven* λ, was dem Umstande entspricht, dass sich die erstgenannten Windungen aus den Oscillationen der geodätischen Linien 1. Art entwickelt haben. Für $\mu_1 = \mu_0$ zerfällt die geodätische Linie in das System der Erzeugenden des Hyperboloides.*) Jede Erzeugende

*) Zur Veranschaulichung der Mittelstellung der Erzeugenden unter den übrigen geodätischen Linien des Hyperboloides diene noch die Bemerkung, dass ein durch seine beiden Endpunkte gespannter Faden, der sich auf die Fläche

geht mit einer halben Windung im Sinne der einen und andern Art von Krümmungscurven in sich zurück (vgl. § 10, die Anm. S. 247). Für $\mu_0 < \mu_1 \leqq \beta$ *kommt alsdann auf eine Windung im Sinne der Krümmungscurven* ν *keine ganze Windung mehr im Sinne der Krümmungscurven* λ. Für $\mu_1 = \beta$ durchsetzen die Züge der geodätischen Linie den Hauptschnitt $\mu = \beta$ mit einer gleichzeitigen Wendung unter dem Winkel 0 oder berühren, als geodätische Linien 2. Art aufgefasst, von beiden Seiten her den Hauptschnitt $\mu = \beta$.

Eine geodätische Linie 2. Art, $\varrho = \nu_0$ $(\beta < \nu_0 \leqq \alpha)$, ist nämlich auf die Zone $(\nu_0 \alpha \nu_0)$ beschränkt; sie oscillirt zwischen den beiden Zweigen der Krümmungscurve λ_0, welche sie abwechselnd berührt, hin und her, indem sie *mit jeder vollen Oscillation stets mehr als eine volle Windung vollführt**) und sich hiermit an das Verhalten der geodätischen Linien 3. Art $\mu_0 > \mu_1 \geqq \beta$ anschliesst.

Die vorstehenden Sätze sollen, soweit sie sich auf die geodätischen Linien 3. Art beziehen, im folgenden Paragraphen bewiesen und näher ausgeführt werden. Wenn auch die geodätischen Linien 1. und 2. Art auf dem einschaligen Hyperboloid nicht durch reelle Collineation aus den je 2 Arten geodätischer Linien des Ellipsoides und zweischaligen Hyperboloides hervorgehen, so gehören sie doch mit diesen zusammen in die erste der beiden Gruppen geodätischer Linien, welche die Flächen des confocalen Systems darbieten. Die geodätischen Linien der 1. Gruppe mögen nämlich dadurch charakterisirt werden, dass sie auf eine *Zone* der jeweiligen Fläche beschränkt sind und dass sie *Windungen und Oscillationen* besitzen. Die 2. Gruppe bilden alsdann die geodätischen Linien 3. Art auf dem einschaligen Hyperboloid, die auf *keine Zone* beschränkt sind, die *keine Oscillationen*, aber Windungen doppelter Art vollführen.

In entsprechender Weise zerfallen die geodätischen Polygone in zwei Gruppen, deren erste durch die in den §§ 2–8 behandelten Polygone der einen Art auf dem Ellipsoid hinreichend vertreten sind. Es bleibt daher nur noch die 2. Gruppe geodätischer Polygone ausführlicher zu betrachten, diejenige Gruppe, der im Besondern die geradlinigen Polygone auf dem einschaligen Hyperboloid angehören. Die

längs einer geodätischen Linie auflegen soll, auf die *äussere* oder *innere* Seite des Hyperboloides zu legen ist, jenachdem die geodätische Linie der Gruppe $-\infty \leqq \varrho < \mu_0$ oder der Gruppe $\mu_0 < \varrho \leqq \alpha$ angehört.

*) Im Anschluss an die letzte Anmerkung zu § 5 sei erwähnt, dass sich auf dem einschaligen Hyperboloid sowohl die geodätischen Linien einer Zone $(\lambda_0, -\infty, \lambda_0)$ als die einer Zone (ν_0, α, ν_0) nur mit einer grössern Anzahl von Windungen als von Oscillationen schliessen können, was damit in Einklang steht, dass beide Arten geodätischer Linien durch die wiederholt erwähnte Transformation des confocalen Systems in einander übergehen.

Absicht ist dabei, die bekannten Sätze über die letzteren auf die allgemeineren Polygone auszudehnen, beziehungsweise zu zeigen, in wie weit sie bei dieser Ausdehnung beschränkt werden müssen. Als Vorbereitung hierzu wird im folgenden Paragraphen ein Ueberblick über den Verlauf der geodätischen Linien 3. Art zum Vergleich mit dem Verhalten der Erzeugenden des Hyperboloides gegeben.

§ 10.

Ueber die geodätischen Linien 3. Art auf dem einschaligen Hyperboloid.

Irgend ein Stück der Umhüllungscurven der gemeinsamen Tangenten der beiden einschaligen Hyperboloide μ_0 und μ_1 auf μ_0 soll vorläufig als eine geodätische Linie $(\mu_0 \mu_1)$ und die Gesammtheit der geodätischen Linien $(\mu_0 \mu_1)$ als ein System $(\mu_0 \mu_1)$ bezeichnet werden.

Vermöge des doppelten Vorzeichens in der Differentialgleichung:

$$\frac{(\mu_0 - \lambda)\, d\lambda}{\Lambda} = \frac{(\nu - \mu_0)\, d\nu}{\mathsf{N}}, \tag{14}$$

in der:

$$\Lambda = \pm \sqrt{(\alpha - \lambda)(\beta - \lambda)(\gamma - \lambda)(\mu_0 - \lambda)(\mu_1 - \lambda)},$$

$$\mathsf{N} = \pm \sqrt{(\alpha - \nu)(\nu - \beta)(\nu - \gamma)(\nu - \mu_0)(\nu - \mu_1)},$$

gehen durch jeden Punkt des Hyperboloides μ_0 *zwei* geodätische Linien des Systems $(\mu_0 \mu_1)$. Um die Winkel zu bestimmen, welche im Punkte λ, ν die Richtungen dieser geodätischen Linien mit den Krümmungscurven durch ν einschliessen, denke man sich bei aufrechter Stellung des Hyperboloides auf der Vorderseite die Richtung der Krümmungscurve λ nach rechts positiv und die Richtung der Krümmungscurve ν und der geodätischen Linien G_1 und G_2 im Punkte λ, ν nach oben positiv gerechnet (vgl. Fig. 8). Da man den Ausdruck für das Linienelement der Krümmungscurve und der geodätischen Linie kennt, so findet man für die Cosinus der Winkel d_1 und d_2, welche die geodätischen Linien imPunkte λ, ν mit der Krümmungscurve λ bilden:

$$\cos d_1 = + \sqrt{\frac{\nu - \mu_1}{\nu - \lambda}}, \qquad \cos d_2 = - \sqrt{\frac{\nu - \mu_1}{\nu - \lambda}}. \tag{15}$$

Die Richtung der geodätischen Linien nähert sich also gegen $\lambda = -\infty$ hin immer mehr der Richtung der Krümmungscurven $\nu = \text{const.}$, und die Richtungen der beiden geodätischen Linien des Systems, welche durch einen unendlich fernen Punkt des Hyperboloides gehen, fallen mit einander zusammen. Allein dieses Zusammenfallen beruht nur auf der Besonderheit der gewöhnlichen Maassbestimmung. Da nämlich durch die Collineation des § 1 der betrachtete Punkt des Hauptschnittes $\lambda = -\infty$ auf den Hauptschnitt $\nu = \alpha$ eines andern einschaligen

Hyperboloides verlegt wird und zugleich geodätische Linien 3. Art auf den Hyperboloiden des confocalen Systems wieder in solche übergehen, so kann man aus dem Verhalten der beiden geodätischen Linien des Systems $(\mu_0 \mu_1)$ in einem Punkte $\nu = \alpha$, soweit dasselbe nicht gerade dem Hyperboloid μ_0 eigenthümlich ist, auf ihr Verhalten in einem Punkte $\lambda = -\infty$ schliessen. Aus (15) folgt nun, dass auf den einschaligen Hyperboloiden des confocalen Systems die beiden durch einen Punkt $\nu = \alpha$ gehenden geodätischen Linien eines Systems 3. Art sich im Allgemeinen nicht berühren, sondern kreuzen. Man erkennt überdies leicht, dass, wenn sie beide den Hauptschnitt $\nu = \alpha$ in irgend welchen Richtungen durchsetzen, das Vorzeichen von $d\lambda$ sich dabei auf keiner von beiden ändert. Hiernach geschieht auch der Durchgang der geodätischen Linien 3. Art durch den Hauptschnitt $\lambda = -\infty$ ohne jede Unbestimmtheit in der Weise, dass auf jeder der beiden in dem einzelnen Punkte $\lambda = -\infty$ sich kreuzenden geodätischen Linien $d\nu$ sein Vorzeichen beibehält, d. h. *der Sinn der Windungen der geodätischen Linien in der Richtung der Krümmungscurven λ nicht geändert wird.*

Von unendlich weiten Punkten abgesehen, können die beiden Cosinus in (15) mit Ausschluss der Grenzfälle $\mu_1 = \gamma$ oder $\mu_1 = \beta$ für keinen Punkt des Hyperboloides 0 oder 1 werden. Da sich nun längs der geodätischen Linie die Ausdrücke (15), wie die Variabeln λ und ν stetig ändern, so kann, wie weit man auch auf einer geodätischen Linie fortschreitet, wenn man nur das unendlich Weite noch nicht erreicht, das Vorzeichen der Quadratwurzel für den zugehörigen Cosinus nicht wechseln.

Soweit man also den geodätischen Linienzug im Endlichen verfolgen mag, so schneidet er in dem in Figur 8 markirten Sinne alle Krümmungscurven von unten nach oben und die Krümmungscurven $\nu = \text{const.}$ entweder alle von links nach rechts oder alle von rechts nach links. Der Linienzug mag entsprechend *als rechts oder als links gewunden* bezeichnet werden. Wenn nun die geodätische Linie von unten nach oben ins Unendliche geht, so läuft sie nach dem Durchgang wieder von unten nach oben; aber auch der Sinn ihrer Windung nach der Richtung der Krümmungscurven $\lambda = \text{const.}$ hat sich beim Durchgang durch das Unendliche, wie vorhin bemerkt, nicht geändert, obwohl die geodätische Linie nach dem Durchgang durch das Unendliche in der bezeichneten Richtung um 180 Grad verdreht erscheint. Es folgt also: Eine links oder rechts gewundene geodätische Linie 3. Art auf dem einschaligen Hyperboloid bleibt immer bezüglich links oder rechts gewunden*), wie weit man sie auch verfolgen mag.

*) In der That fehlen hier die Berührungspunkte mit einer Krümmungscurve, welche bei den geodätischen Linien 1. und 2. Art den Uebergang von rechts und links gewundenen Zügen in einander vermittelten (vgl. S. 243).

Für $\mu_1 = \mu_0$ gehen die rechts oder links gewundenen geodätischen Linien des Systems $(\mu_0 \mu_1)$ bezüglich in die eine oder andre Schaar der geradlinigen Erzeugenden des Hyperboloides μ_0 über.*)

Im Folgenden soll das unendlich Weite ausgeschlossen und das System $(\mu_0 \mu_1)$ durch die unendlich ferne Ebene in unendlich viele einzelne Züge zerschnitten gedacht werden. Was die einzelnen Züge angeht, die im prägnanten Sinne als „geodätische Linien des Systems $(\mu_0 \mu_1)$" bezeichnet werden sollen, so gelten von denselben, wie aus dem Vorstehenden unmittelbar hervorgeht, die folgenden Sätze:

Die geodätischen Linien des Systems $(\mu_0 \mu_1)$ zerfallen in 2 Schaaren.

Die Linien der einen Schaar sind rechts, die der andern links gewunden.

Durch jeden Punkt des Hyperboloides geht eine geodätische Linie aus jeder Schaar.

Zwei Linien derselben Schaar schneiden sich nicht.

Die einzelne geodätische Linie des Systems $(\mu_0 \mu_1)$ vollführt, da sie nicht mehr durch das Unendliche hindurch verfolgt wird, nur noch Windungen im Sinne der Krümmungscurven $\lambda = \text{const.}$ Dabei ist eine halbe Windung mit Bezug auf das längs der geodätischen Linie hinerstreckte Integral $\int \frac{(\nu - \mu_0)\, d\nu}{\mathsf{N}}$ dadurch charakterisirt, dass die Variable ν gerade einmal den Periodenweg um die beiden Verzweigungspunkte $\nu = \beta$ und $\nu = \alpha$ durchläuft. Bezüglich der Windungszahl einer geodätischen Linie des Systems sind, wie bereits aus dem vorigen Paragraphen hervorgeht, zwei Fälle zu unterscheiden, jenachdem $\mu_1 > \mu_0$ oder $\mu_0 > \mu_1$ ist, also das Hyperboloid μ_1 innerhalb oder ausserhalb μ_0 liegt. Es mögen die Systeme geodätischer Linien dritter Gattung, *jenachdem $\mu_1 >$ oder $< \mu_0$ ist*, als *Systeme $(\mu_1 \mu_0)$ oder Systeme $(\mu_0 \mu_1)$* benannt werden.

Zwischen den reellen Perioden der Integrale, auf welche die Integration der Differentialgleichung (14) führt, bestehen bekanntlich**) die Relationen:

$$\int_{-\infty}^{\gamma} (\mu_0 - \lambda) \frac{d\lambda}{\Lambda} + \int_{\mu_2}^{\mu_1} (\mu - \mu_0) \frac{d\mu}{\mathsf{M}} - \int_{\beta}^{\alpha} (\nu - \mu_0) \frac{d\nu}{\mathsf{N}} = 0 \quad \text{für } \mu_1 > \mu_0,$$

*) Die Combination *zweier paralleler Erzeugenden* (vgl. Fig. 9a) ist als ein geschlossenes geodätisches Polygon mit zwei unendlich fernen zusammenfallenden Ecken zu betrachten. Dieses Polygon geht bei der Transformation des confocalen Systems wieder in ein geschlossenes Zweieck auf einem einschaligen Hyperboloid über, dessen Ecken auf dem Hauptschnitt $\nu = \alpha$ liegen und dessen Seiten in einer Tangentialebene des Hyperboloides verlaufen (vgl. Fig. 9b).

**) Vergl. Jacobi, Gesammelte Werke, herausgegeben von Weierstrass, Bd. II, S. 39.

$$\int_{-\infty}^{\gamma}(\mu_0-\lambda)\frac{d\lambda}{\Lambda}-\int_{\mu_1}^{\mu_0}(\mu_0-\mu)\frac{d\mu}{\mathsf{M}}-\int_{\beta}^{\alpha}(\nu-\mu_0)\frac{d\nu}{\mathsf{N}}=0 \quad \text{für } \mu_1<\mu_0.$$

Hier haben Λ und N die Bedeutung (14) und geht M aus Λ durch Vertauschung von λ mit μ hervor; ferner sind die Quadratwurzeln Λ, M, N allenthalben *positiv* zu nehmen. Es folgt daher:

$$2\int_{-\infty}^{\gamma}(\mu_0-\lambda)\frac{d\lambda}{\Lambda}<2\int_{\beta}^{\alpha}(\nu-\mu_0)\frac{d\nu}{\mathsf{N}} \qquad \text{für } \mu_1>\mu_0,$$

$$2\int_{-\infty}^{\gamma}\frac{d\lambda}{\sqrt{(\alpha-\lambda)(\beta-\lambda)(\gamma-\lambda)}}=2\int_{\beta}^{\alpha}\frac{d\nu}{\sqrt{(\alpha-\nu)(\nu-\beta)(\nu-\gamma)}} \qquad (\text{für } \mu_1=\mu_0),$$

$$2\int_{-\infty}^{\gamma}(\mu_0-\lambda)\frac{d\lambda}{\Lambda}>2\int_{\beta}^{\alpha}(\nu-\mu_0)\frac{d\nu}{\mathsf{N}} \qquad \text{für } \mu_1<\mu_0.$$

Daraus schliesst man nun ohne Schwierigkeit*):

Die geodätischen Linien $(\mu_1\,\mu_0)$ *machen immer weniger als eine halbe Windung.*

Die geodätischen Linien $(\mu_0\,\mu_0)$ *machen immer genau eine halbe Windung.*

Die geodätischen Linien $(\mu_0\,\mu_1)$ *machen immer mehr als eine halbe Windung.*

Als Folgerungen hieraus ergeben sich weiter die Sätze:

Zwei geodätische Linien $(\mu_1\,\mu_0)$ *verschiedener Art schneiden sich höchstens einmal.*

Zwei geodätische Linien $(\mu_0\,\mu_0)$ *verschiedener Art schneiden sich genau einmal.*

Zwei geodätische Linien $(\mu_0\,\mu_1)$ *verschiedener Art schneiden sich mindestens einmal.*

§ 11.

Ueber geodätische Polygone 3. Art auf dem einschaligen Hyperboloid.

Aus geodätischen Linien eines Systems $(\mu_0\,\mu_1)$ oder $(\mu_1\,\mu_0)$ sei ein Polygon von $2s$ Seiten construirt, dessen Ecken abwechselnd auf der einen und auf der andern Seite des Hauptschnittes $\lambda=\gamma$ und zwar je auf einer Krümmungscurve $\lambda=\lambda_\varkappa$ $(\varkappa=1,2,\cdots 2s)$ des Hyperboloides μ_0 liegen. Es wird verlangt, dass dieses Polygon sich mit n Windungen schliesst.

*) Nach derselben Schlussweise sind die entsprechenden Sätze des vorigen Paragraphen abgeleitet.

Als Bedingung hierfür erhält man durch Integration der Differentialgleichung (14) längs des Polygonumfanges:

$$(16) \qquad 2\sum_{1}^{2s}\int_{\lambda_x}^{\gamma}\frac{(\mu_0-\lambda)\,d\lambda}{\Lambda} = 4n\int_{\beta}^{\alpha}\frac{(\nu-\mu_0)\,d\nu}{\mathsf{N}};$$

da auch hier die Integrale mit positivem Vorzeichen der Quadratwurzel genommen werden, und eine Vieldeutigkeit derselben ausgeschlossen bleibt, so folgt:

Wenn die Ecken eines geschlossenen Polygons, dessen $2s$ Seiten einem System geodätischer Linien 3. Art auf einem einschaligen Hyperboloid angehören und einzeln die Ebene der Focalellipse durchsetzen, je auf einem von $2s$ confocalen Ellipsoiden liegen und es bewegen sich $2s-1$ Ecken je auf ihrem Ellipsoid, so bewegt sich auch die letzte Ecke auf ihrem Ellipsoid. Bei dieser Bewegung bleibt der Umfang S des Polygons constant, und zwar ist:

$$(17) \quad S = 2\sum_{1}^{2s}\int_{\lambda_x}^{\gamma}\frac{(\mu_0-\lambda)\,(\mu_1-\lambda)\,d\lambda}{2\Lambda} + 4n\int_{\beta}^{\alpha}\frac{(\nu-\mu_0)\,(\nu-\mu_1)\,d\nu}{2\mathsf{N}}.$$

Soll im Besonderen ein Polygon von $2s$ Seiten und n Windungen einer und derselben Krümmungscurve $\lambda = \lambda_1$ einbeschrieben sein, so muss der Bedingung genügt werden:

$$s\int_{\lambda_1}^{\gamma}\frac{(\mu_0-\lambda)\,d\lambda}{\Lambda} = n\int_{\beta}^{\alpha}\frac{(\nu-\mu_0)\,d\nu}{\mathsf{N}},$$

die für $\mu_1 = \mu_0$ und $n = s$ durch $\lambda_1 = -\infty$ erfüllt wird und dem in der Anmerkung zum vorigen Paragraphen erwähnten Zweieck entspricht.

Diese Sätze bieten im Vergleich zu den für das Ellipsoid gefundenen Sätzen nichts wesentlich neues. Dagegen sollen dieselben, wie schon erwähnt, nach einer andern Richtung ausgedehnt werden, die ihre Stellung zu den bekannten Sätzen über die geradlinigen Polygone auf dem einschaligen Hyperboloid besonders charakterisirt. Aehnliche Betrachtungen, wie die folgenden, hätten auch schon bei den geodätischen Polygonen des Ellipsoides angestellt werden können, finden aber hier in der Analogie mit der Theorie der geradlinigen Polygone einen natürlicheren Stützpunkt.

§ 12.

Die Schnittpunktssysteme der verlängerten Polygonseiten.

Wenn das System geodätischer Linien $(\mu_0\,\mu_1)$ oder $(\mu_1\,\mu_0)$ in das System der Erzeugenden übergeht, so schneiden sich die $2s$ Seiten des geodätischen Polygones, die abwechselnd von der einen und anderen Art sind, bei hinreichender Verlängerung in genau s^2 Punkten. Bei den allgemeinen Polygonen wird dagegen nach § 11 die Anzahl der Schnittpunkte $< s^2$ oder $> s^2$ sein, jenachdem die Polygonseiten einem System $(\mu_1\,\mu_0)$ oder einem System $(\mu_0\,\mu_1)$ angehören.

Seien nun s_i und $s_{i'}$ irgend zwei Seiten des Polygons von verschiedener Art und seien (vergl. Figur 10) die Coordinaten eines Eckpunktes i allgemein $\lambda_i\,\nu_i$. Die beiden Seiten s_i und $s_{i'}$ mögen sich, wenn sie sich überhaupt schneiden, in einem Punkte $\lambda_0\,\nu_0$ und, wenn sie sich öfter schneiden, in weiteren Punkten $\lambda_{0'}\,\nu_{0'}$, $\lambda_{0''}\,\nu_{0''}$, u. s. w. schneiden. Um die λ-Coordinate des Punktes $\lambda_0\,\nu_0$ zu bestimmen, integrirt man die Differentialgleichung (14), die in Fig. 10 angedeutete Lage von $\lambda_0\,\nu_0$ vorausgesetzt, einmal längs des Weges $(i-1,\, i,\, 0,\, i',\, i'+1)$ und einmal längs des Stückes $(i-1,\, i,\, i+1,\, \cdots,\, i'-1,\, i',\, i'+1)$ des Polygonumfanges; die Richtung beider Wege im Sinne der Krümmungscurven λ ist die nämliche, und die Variable ν nimmt auf beiden genau dieselben Werthe in derselben Reihenfolge an*).

Man erhält daher durch die beiden Integrationen respective:

$$\int_{\lambda_{i-1}}^{\gamma}(\mu_0-\lambda)\frac{d\lambda}{\Lambda} + 2\int_{\lambda_0}^{\gamma}(\mu_0-\lambda)\frac{d\lambda}{\Lambda} + \int_{\lambda_{i'+1}}^{\gamma}(\mu_0-\lambda)\frac{d\lambda}{\Lambda} = \int_{\nu_{i-1}}^{\nu_{i'+1}}(\nu-\mu_0)\frac{d\nu}{N}$$

und

$$\int_{\lambda_{i-1}}^{\gamma}(\mu_0-\lambda)\frac{d\lambda}{\Lambda} + 2\sum_{i}^{i'}\int_{\lambda_\varrho}^{\gamma}(\mu_0-\lambda)\frac{d\lambda}{\Lambda} + \int_{\lambda_{i'+1}}^{\gamma}(\mu_0-\lambda)\frac{d\lambda}{\Lambda} = \int_{\nu_{i-1}}^{\nu_{i'+1}}(\nu-\mu_0)\frac{d\nu}{N},$$

wo die Quadratwurzel Λ überall positiv ist und die Werthe der beiden Integrale rechter Hand gleich sind. Wenn die Seiten s_i und $s_{i'}$ sich über $\lambda_0\,\nu_0$ nach oben verlängert nochmals schneiden sollten, etwa in $\lambda_{0'}\,\nu_{0'}$, so würde man von $i-1$ über 0 nach $0'$ und weiter über 0

*) Dieser Umstand ist wesentlich; wenn sich daher bei der für Fig. 10 angenommenen Anordnung die Seiten s_i und $s_{i'}$ nach unten verlängert ebenfalls schneiden, so wäre an Stelle des im Texte benutzten Theiles des Polygonumfanges der andere Theil $(i', i'+1 \cdots i-1, i)$ desselben in analoger Weise zu benutzen.

nach $i' + 1$ immer mit gleichem Windungssinne hinintegriren und an Stelle der ersteren der obigen Gleichungen erhalten:

$$\int_{\lambda_{i-1}}^{\gamma}(\mu_0-\lambda)\frac{d\lambda}{\Lambda}+2\int_{\lambda_{0'}}^{\gamma}(\mu_0-\lambda)\frac{d\lambda}{\Lambda}+\int_{\lambda_{i'+1}}^{\gamma}(\mu_0-\lambda)\frac{d\lambda}{\Lambda}=\int_{\nu_{i-1}}^{\nu_{i'+1}}(\nu-\mu_0)\frac{d\nu}{N}$$

$$+4\int_{\beta}^{\alpha}(\nu-\mu_0)\frac{d\nu}{N}.$$

Es ergiebt sich daher für die Coordinaten λ der Schnittpunkte der verlängerten Polygonseiten jedenfalls eine Gleichung von der Form:

$$(18)\qquad \int_{\lambda}^{\gamma}(\mu_0-\lambda)\frac{d\lambda}{\Lambda}=\sum_{i}^{i'}\int_{\lambda_\varrho}^{\gamma}(\mu_0-\lambda)\frac{d\lambda}{\Lambda}+4m\int_{\beta}^{\alpha}(\nu-\mu_0)\frac{d\nu}{N},$$

wo m eine dem Schnittpunkte λ eigenthümliche ganze Zahl ist.

In der Gleichung (18) hängt der Term

$$\sum_{i}^{i'}\int_{\lambda_\varrho}^{\gamma}(\mu_0-\lambda)\frac{d\lambda}{\Lambda}.$$

nur von der Configuration der gegebenen Krümmungscurven

$$\lambda_\varkappa\ (\varkappa=1,2,\cdots,2s)$$

und in gewissem Grade von der Reihenfolge der auf dieselben vertheilten Polygonecken ab; dieser Term bleibt also constant, wenn sich das Polygon continuirlich so bewegt, dass seine Ecken auf ihren Krümmungscurven und in ihrer Reihenfolge verharren. Die Gleichung (18) enthält also an veränderlichen Elementen nur λ und m. Bei der bezeichneten continuirlichen Bewegung des Polygons könnte sich nun λ nur *stetig* ändern. Dies ist aber, da m höchstens von einer ganzen Zahl zu einer andern *springen* kann, nicht möglich. Es muss daher bei der Bewegung des Polygons sowohl λ als m constant bleiben.

Daraus geht weiter hervor, dass bei einer Bewegung des Polygons, welche die Ecken in ihrer Reihenfolge und jede Ecke auf ihrer Krümmungscurve belässt, kein neuer Schnittpunkt der verlängerten Polygonseiten auftreten und kein vorhandener verloren gehen kann. Man hat daher zusammenfassend den Satz:

Wenn die Ecken eines geschlossenen Polygons, dessen $2s$ Seiten einem System geodätischer Linien 3. *Art auf dem einschaligen Hyperboloid angehören, je auf einer von $2s$ gleichartigen Krümmungscurven $\lambda_\varkappa$ liegen, und es bewegen sich alle Ecken bis auf eine je auf ihrer Krümmungscurve, so bewegt sich nicht nur die letzte Ecke, sondern*

auch jeder weitere Schnittpunkt der verlängerten Polygonseiten je auf einer Krümmungscurve der gleichen Art. Die Anzahl dieser weiteren Schnittpunkte bleibt dabei constant und ist nicht grösser als $s(s-1)$ *oder nicht kleiner als* $s(s-1)$, *jenachdem die Seiten des Polygons einem System* $(\mu_1 \mu_0)$ *oder einem System* $(\mu_0 \mu_1)$ *angehören.*

Die besondere Annahme $\mu_1 = \mu_0$ lässt das System der geodätischen Linien 3. Gattung in das System der Erzeugenden übergehen, und die Anzahl der Schnittpunkte der verlängerten Polygonseiten beträgt dann genau $s(s-1)$.

In diesem Falle tritt zu den bezüglichen Specialisirungen der vorstehenden Sätze ein wesentlich neuer Satz hinzu. Die Bedingung (16) wird nämlich, wie schon die Differentialgleichung (14) der Erzeugenden des Hyperboloides, von μ_0 unabhängig. Es folgt daher:

Wenn ein aus den Erzeugenden eines Hyperboloides gebildetes Polygon, dessen Ecken je auf einem von $2s$ *gegebenen confocalen Ellipsoiden* $\lambda_\varkappa$ *und zwar abwechselnd auf der einen und andern Seite der Hauptebene* $\mu = \gamma$ *liegen, sich mit* $2s$ *Seiten und* n *Windungen schliesst, so schliesst sich mit der gleichen Anzahl von Seiten und Windungen jedes auf einem beliebigen andern Hyperboloide* μ *des confocalen Systems verzeichnete Polygon, welches aus den Erzeugenden dieses andern Hyperboloides gebildet wird, aber denselben* $2s$ *Ellipsoiden einbeschrieben ist.**)

Was dagegen den Umfang dieser Polygone betrifft, so haben nur die auf demselben Hyperboloid gelegenen Polygone untereinander gleichen Umfang (vgl. Formel 17).

Unter den Polygonen auf den verschiedenen Hyperboloiden des confocalen Systems befinden sich als Grenzfälle die ebenen Polygone, welche der Focalellipse oder Focalhyperbel des confocalen Systems umbeschrieben und den betreffenden Hauptschnitten der Ellipsoide $\lambda_\varkappa$ einbeschrieben sind. Denn die Tangenten der Focalellipse in ihrer Ebene sind die Erzeugenden des Hyperboloides $\mu_0 = \gamma$ und die Tangenten der Focalhyperbel in ihrer Ebene die Erzeugenden des Hyperboloides $\mu_0 = \beta$.

Leipzig, im August 1882.

*) Diesen Satz giebt Darboux, Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques p. 105; vgl. Moutard, Nouvelles annales de Mathématiques, II. Serie, Bd. III, p. 539.

Zusatz zu dem Aufsatze „Ueber den Gültigkeitsbereich der Taylor'schen Reihenentwickelung"

(cf. pag. 109—117 dieses Annalenbandes).

Von

Paul du Bois-Reymond in Tübingen.

Ich verdanke Hrn. Weierstrass die Einsicht, dass eine Function u von x und y, welche für $y = 0$ in eine Function $\varphi(x)$ übergeht, die auch nur für einen Punkt x nicht entwickelbar ist, nicht zu einer Function $f(z) = u + iv$ ergänzt werden kann, die in der Umgebung der reellen Linie stetig ist, und ebenfalls für $y = 0$ in $\varphi(x)$ übergeht. In der That, denken wir uns ein Stück AB der reellen Linie, in dem ein Punkt x_1 vorhanden ist, für den die Reihe $\Sigma a_p (x - x_1)^p$ nicht convergiren kann; fügen zu dem Stück AB südlich und nördlich je einen Halbkreis hinzu, mit denen es je einen geschlossenen Umfang bildet, und bestimmen die Function u so, dass sie im Innern des südlichen so entstandenen Gebietes die bekannten Stetigkeitsbedingungen erfüllt, auf dem Theile AB des Randes gleich $\varphi(x)$ wird, und auf dem übrigen Theile beliebige Randwerthe erhalte.

Die zugehörige Function v ist bestimmt durch:

$$v_{x,y} = v_{x_0, y_0} - \int_{x_0, y_0}^{x, y} \left(\frac{\partial u}{\partial y}\, dx - \frac{du}{dx}\, dy \right).$$

Wir verlegen den Punkt x_0, y_0 in die reelle Linie, und nehmen $v_{x_0, y_0} = 0$ an, so dass $v = -\int \left(\frac{\partial u}{\partial y}\, dx - \frac{\partial u}{\partial x}\, dy \right)$ wird. Das nördliche, symmetrisch gelegene Gebiet belegen wir mit den symmetrischen Werthen von u, die als $u(x, -y)$ dieselben sind als im südlichen Gebiet. Dagegen wird im nördlichen Gebiet der imaginäre Theil $-iv$, wie aus seinem vorstehenden Ausdruck zu ersehen. Wir wollen nun mit $f(z)$ allgemein die Function bezeichnen, die im südlichen Gebiet $u + iv$, im nördlichen $u - iv$ ist, und den Cauchy'schen Satz auf jedes der Gebiete beziehen, wobei aber der veränderliche Punkt z, der in diesem Satze auftritt, im südlichen Gebiet liegen mag. Man hat für das südliche Gebiet:

$$\int_B^A \frac{f(\xi)\,d\xi}{\xi - z} + \int_A^B \frac{f(\xi)\,d\xi}{\xi - z} = 2\pi i f(z)$$

für das nördliche:

$$\int_A^B \frac{f(\xi)\,d\xi}{\xi - z} + \int_B^A \frac{f(\xi)\,d\xi}{\xi - z} = 0,$$

die ersten Integrale linker Hand über die Halbkreise, die zweiten über die reelle Linie genommen. Die Addition ergiebt:

$$\int \frac{f(\xi)\,d\xi}{\xi - z} = 2\pi i f(z) = 2\pi i (u + iv),$$

das Integral über den ganzen Kreis genommen. Diese Gleichung kann aber nicht bestehen, wenn die Function auch nur von einem einzigen Punkt des Kreisgebiets aus und in einer einzigen Richtung die Taylor'sche Entwickelung nicht gestattet. Jene falsche Gleichung nun entspringt aus der Annahme, dass v in der reellen Linie Null sei, und aus deren Consequenz, dass dann die südlich resp. nördlich zu u gehörigen imaginären Theile iv resp. $-iv$ sind. Es kann also v, im Falle ein solcher Ausnahmepunkt in der reellen Linie vorhanden, dort nicht überall Null sein. Wenn der Integrationsweg von

$$v = -\int \left(\frac{\partial u}{\partial y}\,dx - \frac{\partial u}{\partial x}\,dy \right)$$

in die reelle Linie verlegt wird, so hat man:

$$v = -\int \frac{\partial u}{\partial y}\,dx.$$

Es ergiebt sich mithin, dass $\frac{\partial u}{\partial y}$ entweder in einzelnen Punkten der reellen Linie unendlich wird, oder in Strecken von Null verschieden ist, indem die Tangentialebene an die Fläche, deren Ordinate u ist, dort nicht horizontal liegt. Für solche Strecke giebt es keine Function $f(z) = u + iv$, die sich in der reellen Linie auf u reducirt.

Ueber den Despeyrous'schen Multiplicator der elliptischen Differentialgleichung.

Von

P. du Bois-Reymond in Tübingen.

1.

Die Despeyrous'sche Ableitung des Additionstheorems, welche sich im Sturm'schen Nachlass vorfand*), und die längst in die Lehrbücher übergegangen ist, beruht auf folgenden Bemerkungen.

Angenommen, die Differentialgleichung

$$\lambda(x)\,dx + \lambda_1(y)\,dy$$

lasse zwei Lösungen zu; neben dieser

$$\int \lambda(x)\,dx + \int \lambda_1(y)\,dy = C$$

noch eine andere $\varphi(x, y) = c$ von anderem Charakter, so kann man diesen Umstand benutzen, um die Summe der Integrale

$$\int_\alpha^x \lambda(x)\,dx + \int_\beta^y \lambda_1(y)\,dy$$

durch ein anderes $\int_\gamma^z \mu(z)\,dz$ auszudrücken, dessen obere Grenze eben durch die übrigen Grenzen zu bestimmen ist.

Setzt man

$$\int_\alpha^x \lambda(x)\,dx + \int_\beta^y \lambda_1(y)\,dy = \int_\gamma^z \mu(z)\,dz = C,$$

so muss wegen $\varphi(x, y) = c$ eine Relation zwischen c und C bestehen, also auch zwischen c und z. Es sei daher

$$\varphi(x, y) = c = \psi(z).$$

Um die Function $\psi(z)$ zu finden, kann z. B. $y = \beta$ gesetzt werden, woraus folgt:

*) Comptes Rendus 42, pag. 988.

$$\varphi(x, \beta) = \psi(z_1), \quad \int_\alpha^x \lambda(x)\, dx = \int_\gamma^{z_1} \mu(z)\, dz.$$

Aus der zweiten Gleichung möge man erhalten $x = \chi(z_1)$, so dass $\varphi(\chi(z_1), \beta) = \psi(z_1)$ oder $\varphi(\chi(z), \beta) = \psi(z)$. Mithin liefert die Gleichung:

$$\varphi(\chi(z), \beta) = \varphi(x, y)$$

die gesuchte obere Grenze. Setzt man, um ein ganz einfaches Beispiel anzuführen:

$$\lambda(x) = \lambda_1(x) = \mu(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

und

$$\int_\alpha^x \frac{dx}{1+x^2} + \int_\beta^y \frac{dy}{1+y^2} = \int_\gamma^z \frac{dz}{1+z^2},$$

so hat man die zweite Gleichung

$$\varphi(x, y) = u = \frac{x+y}{1-xy} = c,$$

mithin die Gleichungen für z:

$$\operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg} z + \operatorname{arctg} \alpha - \operatorname{arctg} \gamma; \quad \frac{x+\beta}{1-x\beta} = u,$$

aus denen folgt:

$$z = \frac{\frac{u+\gamma}{1-u\gamma} - \frac{\alpha+\beta}{1-\alpha\beta}}{1 + \frac{\alpha+\beta}{1-\alpha\beta} \cdot \frac{u+\gamma}{1-u\gamma}},$$

wie auch direct durch Addition der arctg sogleich zu sehen.

Setzt man ausser $\lambda(x) = \lambda_1(x) = \mu(x)$ noch $\alpha = \beta = \gamma$, so wird $\varphi(z, \alpha) = \varphi(x, y)$ die Gleichung zur Bestimmung von z. In den bekannten Fällen:

$$\lambda(x) = \frac{1}{1+x}, \quad \frac{1}{1+x^2}, \quad \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \frac{1}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-x^2x^2}},$$

wo $\alpha = 0$ gesetzt wird, reducirt sich $\varphi(z, \alpha)$ eindeutig auf z.

2.

Es handelt sich also darum, das zweite Integral $\varphi(x, y) = c$ zu finden.

Im Falle der elliptischen Differentialgleichung

$$\Delta y\, dx + \Delta x\, dy = 0,$$

wo $\Delta x = \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-x^2x^2}$ verfährt Despeyrous etwa so: Die Differentialgleichung wird mit dem Factor

$$\varrho = \frac{1}{1-x^2x^2y^2}$$

multiplicirt, und in solcher Weise partiell integrirt, dass herauskommt

$$c = \varrho(x\Delta y + y\Delta x) - \int (x\,dU + y\,dV),$$

wo $U = \varrho\Delta y$, $V = \varrho\Delta x$. Ausgerechnet ergiebt sich:

$$x\,dU + y\,dV = \left(A + \frac{B}{\Delta x\,\Delta y}\right)(\Delta y\,dx + \Delta x\,dy),$$

worin:

$$A = 2x^2x^2y^2\varrho^2,$$

$$B = \varrho^2xy[2x^2(x^2 + y^2) - (1 + x^2)(1 + x^2x^2y^2)].$$

Es ist also in der That:

$$c = \varrho(x\Delta y + y\Delta x)$$

das zweite Integral. An dieser Herleitung wird aber mit Recht ausgesetzt, dass der Multiplicator $\varrho = (1 - x^2x^2y^2)^{-1}$ nicht aus ihr hervorgeht, sondern die Kenntniss des Additionstheorems voraussetzt. Es ist dies ein Mangel der Methode, welchem sich jedoch abhelfen lässt. Bei dieser Gelegenheit machen wir einige Bemerkungen über Multiplicatoren von Differentialgleichungen I. Ordnung, die nicht ohne Interesse zu sein scheinen.

3.

Für die Differentialgleichungen:

$$(1 + y)\,dx + (1 + x)\,dy = 0,$$

$$(1 + y^2)\,dx + (1 + x^2)\,dy = 0$$

sind resp. 1 und $\frac{1}{(1 - xy)^2}$ die Multiplicatoren, welche die zweiten Integrale liefern. Beide sind gewöhnliche *integrirende Factoren.* Denn es ist im zweiten Falle:

$$d\frac{x + y}{1 - xy} = \frac{(1 + y^2)\,dx + (1 + x^2)\,dy}{(1 - xy)^2}.$$

Es ist zu zeigen, dass und wie der specielle integrirende Factor $(1 - xy)^{-2}$ im allgemeinen enthalten ist. Der integrirende Factor M von $u\,dx + v\,dy = 0$ genügt der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial Mu}{\partial y} - \frac{\partial Mv}{\partial x} = 0,$$

und man weiss, dass, unter $\varphi(x,y) = c$ die Lösung von $u\,dx + v\,dy = 0$ verstanden, $F(\varphi)\,\frac{\partial\varphi}{\partial x} = Mu$, $F(\varphi)\,\frac{\partial\varphi}{\partial y} = Mv$ ist, wo F eine willkürliche Function. Im obigen Fall ist $\varphi = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y$, also $F\left(\operatorname{arctg}\frac{x + y}{1 - xy}\right)\frac{1}{1 + x^2} = M(1 + y^2)$, oder es ist

$$\frac{\Phi\left(\frac{x + y}{1 - xy}\right)}{(1 + x^2)(1 + y^2)}$$

der integrirende Factor. Φ ist eine willkürliche Function. Dieser Ausdruck muss für eine Form Φ übergehen in $(1 - xy)^{-2}$. Um sie

zu erhalten, setzt man $y = 0$ und findet $\Phi(x)\frac{1}{1+x^2} = 1$, also $\Phi(x) = 1 + x^2$, und es muss sein:

$$\left[1+\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)^2\right]\frac{1}{1+x^2}\cdot\frac{1}{1+y^2} = \frac{1}{(1-xy)^2},$$

was auch zutrifft. Hier ist die Form $\Phi(x) = 1 + x^2$ der willkürlichen Function im Multiplicator aber nachträglich gefunden, weil der Multiplicator bekannt ist. Bei der elliptischen Differentialgleichung lässt sich nun, wie angedeutet, der Multiplicator a priori finden, nur ist es kein gewöhnlicher integrirender Factor, sondern eine andere Art Multiplicator, die ich *Multiplicator zweiter Art* nennen will.

4.

In der That die Multiplicatoren 1 und $\varrho = \frac{1}{1-x^2x^2y^2}$, die bei den Differentialgleichungen

$$\sqrt{1-y^2}\,dx + \sqrt{1-x^2}\,dy = 0,$$
$$\Delta y\,dx + \Delta x\,dy = 0$$

das zweite Integral ergeben, machen die Differentiale linker Hand nicht zu vollständigen, wie auf den ersten Blick zu sehen. Hier muss also eine neue Betrachtung angestellt werden.

Multipliciren wir eine Differentialgleichung 1. Ordnung d. i. ein unvollständiges Differential

$$u\,dx + v\,dy = 0$$

mit einem Factor ϱ und integriren partiell auf die Despeyrous'sche Weise, so kommt:

$$c = \varrho w - \int(x\,d\varrho u + y\,d\varrho v), \quad w = xu + yv.$$

Setzen wir:

$$x\,d\varrho u + y\,d\varrho v = \left(x\frac{\partial\varrho u}{\partial x} + y\frac{\partial\varrho v}{\partial x}\right)dx + \left(x\frac{\partial\varrho u}{\partial y} + y\frac{\partial\varrho v}{\partial y}\right)dy$$
$$= U\,dx + V\,dy,$$

so handelt es sich um Folgendes. Soll das Integral fortfallen, so muss entweder $U\,dx + V\,dy$ ein vollständiges Differential sein, d. i. eine Function μ muss die Gleichungen $U = \frac{\partial\mu}{\partial x}$, $V = \frac{\partial\mu}{\partial y}$ erfüllen. Oder, wenn die Integration längs einer Integralcurve der Gleichung

$$u\,dx + v\,dy = 0$$

geschieht, so müssen U und V auf die Formen:

$$U = x\frac{\partial\varrho u}{\partial x} + y\frac{\partial\varrho v}{\partial x} = Hu + \frac{\partial\mu}{\partial x},$$
$$V = x\frac{\partial\varrho u}{\partial y} + y\frac{\partial\varrho v}{\partial y} = Hv + \frac{\partial\mu}{\partial y}$$

gebracht werden können. Man giebt diesen Gleichungen zweckmässiger die Form:

$$\frac{\partial \varrho w - \mu}{\partial x} = u(\varrho + H),$$

$$\frac{\partial \varrho w - \mu}{\partial y} = v(\varrho + H).$$

Von den drei Grössen ϱ, H, μ kann eine gleich Null angenommen werden. Der Fall $\varrho = 0$ hat kein Interesse, da dann H gewönlicher integrirender Factor wird, und der Fall $H = 0$ macht ϱ zum gewöhnlichen integrirenden Factor. Dagegen wollen wir $\mu = 0$ setzen, *dann wird ϱ Multiplicator zweiter Art* und ist durch das System:

$$\frac{\partial \varrho w}{\partial x} = u(\varrho + H),$$

$$\frac{\partial \varrho w}{\partial y} = v(\varrho + H)$$

bestimmt, oder durch die partielle Differentialgleichung:

$$v \frac{\partial \varrho w}{\partial x} - u \frac{\partial \varrho w}{\partial y} = 0.$$

Auch leuchtet ein, dass die Summe der beiden Factoren ϱ und H den gewöhnlichen integrirenden Factor M bildet. Der durch vorstehende Differentialgleichung bestimmte Factor zweiter Art ϱ enthält eine willkürliche Function und es ist zunächst zu zeigen, dass und wie er bei der elliptischen Differentialgleichung den Multiplicator $(1 - x^2x^2y^2)^{-1}$ enthält.

Es sei $\varphi(x, y) = c$ die Lösung von $udx + vdy = 0$, so ist

$$\varrho w = F(\varphi(x, y)),$$

und

$$\varrho = \frac{F(\varphi(x, y))}{xu + yv}$$

ist der Multiplicator zweiter Art, der im Falle der elliptischen Differentialgleichung wird:

$$\varrho = \frac{F\left(\int_0^x \frac{dx}{\Delta x} + \int_0^y \frac{dy}{\Delta y}\right)}{x\Delta y + y\Delta x}.$$

Wenn man nun weiss, dass z in $\int_0^x \frac{dx}{\Delta x} + \int_0^y \frac{dy}{\Delta y} = \int_0^z \frac{dz}{\Delta z}$ den Werth $\frac{x\Delta y + y\Delta x}{1 - x^2x^2y^2}$ hat, so braucht man für F nur *sinam* zu setzen, und erhält:

$$\varrho = \frac{1}{1 - x^2x^2y^2}.$$

Die Theorie des Multiplicators zweiter Art lässt sich leicht noch etwas erweitern. Wenn μ nicht $= 0$ gesetzt wird, so erhält das Integral der Differentialgleichung $u\,dx + v\,dy = 0$ die Form:

$$c = \varrho w - \mu$$

und genügt der partiellen Differentialgleichung

$$v\,\frac{\partial(\varrho w - \mu)}{\partial x} - u\,\frac{\partial(\varrho w - \mu)}{\partial y} = 0.$$

Da wir über μ beliebig verfügen können, so setzen wir dafür $-(\xi u + \eta v)$, und schreiben: $x\varrho + \xi = S$, $y\varrho + \eta = T$. Dann werden Integral und Differentialgleichung:

$$c = uS + vT,$$

$$v\,\frac{\partial}{\partial x}(uS + vT) - u\,\frac{\partial}{\partial y}(uS + vT) = 0,$$

indem S und T nur der vorstehenden Differentialgleichung oder dem System

$$\frac{\partial}{\partial x}(uS + vT) = Hu,$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(uS + vT) = Hv$$

zu genügen haben. Wir konnten diese Gleichungen, auf die wir Art. 7 zurückkommen, auch ohne Weiteres hinschreiben, da $uP + vQ = A$ gesetzt:

$$\int\left(\frac{\partial A}{\partial x}\,dx + \frac{\partial A}{\partial y}\,dy\right) = A + c$$

ist, und sie besagen eben Nichts weiter, als dass, im Falle $u\,dx + v\,dy = 0$, und wenn man $\frac{\partial A}{\partial x} : \frac{\partial A}{\partial y} = u : v$ hat, das Integral links wegfällt, und $A + c = 0$ ist. Aber in dieser allgemeinen und trivialen Form geht der besondere Charakter der elliptischen Differentialgleichung verloren, den wir wieder herstellen müssen, um nun endlich den Multiplicator $\varrho = (1 - x^2x^2y^2)^{-1}$ aus ihr hervorgehen zu sehen.

5.

Eine Eigenschaft müssen wir bei ihm voraussetzen und dies sei die Rationalität.

Bilden wir die Differentialgleichung

$$v\,\frac{\partial\varrho w}{\partial x} - u\,\frac{\partial\varrho w}{\partial y} = 0,$$

indem wir $w = xu + yv$, $u = \Delta y = \sqrt{Y}$, $v = \Delta x = \sqrt{X}$ setzen, so wird sie:

$$\Delta x\Delta y(x\varrho_x - y\varrho_y) + y\varrho_x X - x\varrho_y Y + \varrho\left(\frac{y}{2}X' - \frac{x}{2}Y'\right) = 0,$$

wenn der Kürze halber $\frac{\partial \varrho}{\partial x} = \varrho_x$, etc. $\frac{dX}{dx} = X'$, etc. geschrieben wird.

Sollen nun X, Y und ϱ rational sein, so muss man haben:

$$x\varrho_x - y\varrho_y = 0,$$
$$y\varrho_x X - x\varrho_y Y + \varrho\left(\frac{y}{2} X' - \frac{x}{2} Y'\right) = 0;$$

aus der ersten dieser Gleichungen folgt, dass ϱ eine Function des Products $p = xy$ ist, $\varphi(p)$. Dies eingesetzt, wird die zweite Gleichung:

$$\frac{\varphi'}{\varphi}(y^2 X - x^2 Y) + \frac{1}{2}(yX' - xY') = 0.$$

Nun sei:

$$X = 1 - x^2(1 + x^2) + x^2x^4, \quad X' = -2x(1 + x^2) + 4x^2x^3,$$
$$Y = 1 - y^2(1 + x^2) + x^2y^4, \quad Y' = -2y(1 + x^2) + 4x^2y^3,$$

wodurch vorstehende Gleichung übergeht in:

$$\frac{\varphi'}{\varphi}(1 - x^2x^2y^2) - 2x^2xy = 0$$

oder

$$\frac{dl\varphi}{dp} = \frac{2x^2p}{1 - x^2p^2}.$$

Durch Integration ergiebt sich in der That:

$$\varphi = \frac{\text{constans}}{1 - x^2x^2y^2}.$$

6.

Es entsteht die Frage, ob dieser Multiplicator φ noch für andere ganze rationale Functionen X und Y wie die eben angegebenen 4ten Grades die Integration gestattet. Dies ist nicht der Fall. Um es zu zeigen, setzen wir:

$$X = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \cdots,$$
$$Y = \beta_0 + \beta_1 y + \beta_2 y^2 + \cdots,$$

bilden die Gleichung:

$$2x^2xy[y^2 X - x^2 Y] - (1 - x^2x^2y^2)\left[\frac{y}{2} X' - \frac{x}{2} Y'\right] = 0$$

und bestimmen die Coefficienten α, β. Man sieht sogleich, dass die Polynome X und Y den vierten Grad nicht übersteigen können.

Weiter aber findet sich $\alpha_1 = \alpha_3 = \beta_1 = \beta_3 = 0$ und

$$\alpha_2 = \beta_2 \equiv \gamma,$$
$$\alpha_4 - x^2\beta_0 = 0,$$
$$\beta_4 - x^2\alpha_0 = 0,$$

also:

$$X = \alpha_0 + \gamma x^2 + x^2 \beta_0 x^4,$$
$$Y = \beta_0 + \gamma y^2 + x^2 \alpha_0 y^4.$$

Es sei:

$$J_1 = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{X}}, \quad J_2 = \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{Y}}, \quad J_1 + J_2 = C,$$

so lassen die Functionen unter den Integralen sich in einander überführen, wenn z. B. im ersten $x \sqrt{\frac{\alpha_0}{\beta_0}}$ statt x gesetzt wird.

Dann folgt:

$$\int_0^{x_1} \frac{dx}{\sqrt{1 + \frac{\gamma}{\beta_0} x^2 + x^2 \frac{\alpha_0}{\beta_0} x^4}} + \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{1 + \frac{\gamma}{\beta_0} y^2 + x^2 \frac{\alpha_0}{\beta_0} y^4}} = C \sqrt{\beta_0},$$

wo $x_1 = x \sqrt{\frac{\beta_0}{\alpha_0}}$. Wendet man die Substitution $x = x_1 \sqrt{\frac{\alpha_0}{\beta_0}}$ auf die Additionsformel

$$\frac{x\sqrt{Y} + y\sqrt{X}}{1 - x^2 x^2 y^2} = c$$

an, so kommt:

$$\frac{x_1 \sqrt{1 + \frac{\gamma}{\beta_0} y^2 + x^2 \frac{\alpha_0}{\beta_0} y^4} + y \sqrt{1 + \frac{\gamma}{\beta_0} x_1^2 + x^2 \frac{\alpha_0}{\beta_0} x_1^4}}{1 - x^2 \frac{\alpha_0}{\beta_0} x_1^2 y^2} = \frac{c}{\sqrt{\alpha_0}}.$$

Kann man z. B. bei positiven r und s dem Radical die Form geben:

$$1 + \frac{\gamma}{\beta_0} z^2 + x^2 \frac{\alpha_0}{\beta_0} z^4 = (1 - rz^2)(1 - sz^2),$$

so ist, wenn $s > r$, $x_1 \sqrt{s} = \xi$, $y\sqrt{s} = \eta$ gesetzt wird:

$$\frac{\xi \sqrt{(1 - \eta^2)\left(1 - \frac{r}{s}\eta^2\right)} - \eta \sqrt{1 - \xi^2}\left(1 - \frac{r}{s}\xi^2\right)}{1 - x^2 \frac{\alpha_0}{\beta_0} \frac{1}{s^2} \xi^2 \eta^2} = c \sqrt{\frac{s}{\alpha_0}}.$$

Es muss also sein: $x_1 = \frac{r}{s} = x^2 \frac{\alpha_0}{\beta_0} \frac{1}{s^2}$ oder $rs = x^2 \frac{\alpha_0}{\beta_0}$, was auch der Fall ist, da aus der Einführungsformel für r und s $-(r + s) = \frac{\gamma}{\beta_0}$, $rs = x^2 \frac{\alpha_0}{\beta_0}$ folgt. Die Additionsformel der Integrale wird aber, wenn erst unter den Integralen im Radical r und s eingeführt und dann die gehörigen Substitutionen gemacht werden, durch Einführung der Grössen ξ und η:

$$\int_0^{\xi} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)\left(1-\frac{r}{s}x^2\right)}} + \int_0^{\eta} \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)\left(1-\frac{r}{s}y^2\right)}} = C\sqrt{\beta_0 s}.$$

Q. E. D.

7.

Betrachten wir noch die allgemeinen Formeln des Art. 4. Es war

(1) $$c = uS + vT$$

die Lösung der Differentialgleichung $udx+vdy=0$, wenn das Integral

$$\int \frac{\partial(uS+vT)}{\partial x}\,dx + \int \frac{\partial(uS+vT)}{\partial y}\,dy$$

dadurch verschwand, dass

(2) $$v\,\frac{\partial(uS+vT)}{\partial x} - u\,\frac{\partial(uS+vT)}{\partial y} = 0$$

war. Hierin $u=\sqrt{Y}$, $v=\sqrt{X}$ gesetzt, folgt:

(3) $$\sqrt{XY}(S_x - T_y) + XT_x - YS_y + \frac{X'}{2}T - \frac{Y'}{2}S = 0.$$

Die Irrationalität fällt aus dieser Gleichung fort, wenn man $S=\frac{\partial L}{\partial y}$, $T=\frac{\partial L}{\partial x}$ setzt, und L genügt der partiellen:

(4) $$X\,\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} + \frac{X'}{2}\,\frac{\partial L}{\partial x} - y\,\frac{\partial^2 L}{\partial y^2} - \frac{Y'}{2}\,\frac{\partial L}{\partial y} = 0,$$

welche durch

(5) $$L = \varphi\left(\int \frac{dx}{\sqrt{X}} + \int \frac{dy}{\sqrt{Y}}\right) + \psi\left(\int \frac{dx}{\sqrt{X}} - \int \frac{dy}{\sqrt{Y}}\right)$$

erfüllt wird. Somit ist:

(6) $$S = \frac{1}{\sqrt{Y}}(\varphi' + \psi'), \quad T = \frac{1}{\sqrt{X}}(\varphi' - \psi').$$

Diese allgemeine Lösung muss alle transcendenten und sonstigen Lösungen enthalten. Wir benutzen sie als Muster, nach dem besondere Lösungen zu Grunde gelegt werden. Angenommen z. B.

(7) $$\begin{cases} S = \mu'(y)\,(\varrho - \varrho_1), & T = \lambda'(x)\,(\varrho + \varrho_1), \\ \varrho = \varphi(\lambda(x) + \mu(y)), & \varrho_1 = \psi(\lambda(x) - \mu(y)), \end{cases}$$

so ist erstens $S_x = T_y$. Diese Gleichung wird beiläufig auch erfüllt wenn man:

(8) $$\begin{cases} S = \frac{dl\mu(y)}{dy}\,(\varrho - \varrho_1), & T = \frac{dl\lambda(x)}{dx}\,(\varrho + \varrho_1), \\ \varrho = \varphi(\lambda(x)\cdot\mu(y)), & \varrho_1 = \psi\left(\frac{\lambda(x)}{\mu(y)}\right) \end{cases}$$

setzt. Unter Benutzung der Werthe (7) wird (3):

$$(9)\qquad XT_x + \frac{X'}{2}T - YS_y - \frac{Y'}{2}S$$

$$= (\varrho + \varrho_1)\frac{1}{2\lambda'}\frac{dX\lambda'^2}{dx} + (\varrho' + \varrho_1')X\lambda'^2 \,.$$

$$- (\varrho - \varrho_1)\frac{1}{2\mu'}\frac{dY\mu'^2}{dy} - (\varrho' + \varrho_1')Y\mu'^2 = 0,$$

oder wenn $X\lambda'^2 = \xi$, $Y\mu'^2 = \eta$, $\xi_x' = \xi_\lambda'\lambda'$, $\eta_y' = \eta_\mu'\mu'$ gesetzt wird, erhält (3) eine der Formen:

$$(10)\qquad \begin{cases} \sqrt{\xi}\,\frac{d}{d\lambda}(\varrho + \varrho_1)\sqrt{\xi} - \sqrt{\eta}\,\frac{d}{d\mu}(\varrho - \varrho_1)\sqrt{\eta} = 0, \\ \frac{1}{\varrho + \varrho_1}\frac{d}{d\lambda}(\varrho + \varrho_1)^2\xi - \frac{1}{\varrho - \varrho_1}\frac{d}{d\mu}(\varrho - \varrho_1)^2\eta = 0. \end{cases}$$

Es handelt sich um die simultanen Lösungen nach ϱ, ϱ_1, ξ, η dieser Gleichungen. Man findet deren für $\varrho = \lambda + \mu$, $\varrho_1 = \lambda - \mu$, $\varrho = e^{\alpha(\lambda+\mu)}$, $\varrho_1 = e^{\alpha(\lambda-\mu)}$, allgemein für $\varrho = e^{\alpha(\lambda+\mu)} + cc_1e^{-\alpha(\lambda+\mu)}$, $\varrho_1 = ce^{\alpha(\lambda-\mu)} + c_1e^{-\alpha(\lambda-\mu)}$*), endlich für ϱ_1 resp. $\varrho = 0$. Im letzteren Falle wird die zweite Form (10):

$$(11)\qquad \frac{\frac{\partial\xi}{\partial\lambda} - \frac{\partial\eta}{\partial\mu}}{\xi - \eta} = -2\frac{\varrho'}{\varrho}, \qquad \frac{\frac{\partial\xi}{\partial\lambda} + \frac{\partial\eta}{\partial\mu}}{\xi - \eta} = -2\frac{\varrho_1'}{\varrho_1}.$$

Diese Gleichungen reduciren sich aufeinander, wenn $-\mu$ statt μ geschrieben wird. Es genügt also:

$$\frac{\xi' - \eta'}{\xi - \eta} = -2\frac{\varrho'}{\varrho},$$

$\left(\xi' = \frac{d\xi}{d\lambda},\ \eta' = \frac{d\eta}{d\mu}\right)$ zu betrachten. Man findet leicht simultane Lösungen ξ, η, ϱ, und Hr. H. Weber zeigte mir, wie folgt, dass meine Lösungen die einzigen seien: Da $-2\frac{\varrho'}{\varrho}$ nur von $\lambda + \mu$ abhängt, so ist

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\frac{\xi' - \eta'}{\xi - \eta} = \frac{\partial}{\partial\mu}\frac{\xi' - \eta'}{\xi - \eta}$$

*) Setzt man $e^{\alpha\lambda} = l$, $e^{\alpha\mu} = m$, so folgt hieraus, dass die logarithmische Differentialgleichung:

$$\frac{dm}{m}\frac{m - \frac{c}{m}}{\sqrt{\left(m - \frac{c}{m}\right)^2 + C_1}} + \frac{dl}{l}\frac{l + \frac{c_1}{l}}{\sqrt{\left(l + \frac{c_1}{l}\right)^2 + C}} = 0$$

das Integral

$$\left(l - \frac{c_1}{l}\right)\sqrt{\left(m - \frac{c}{m}\right)^2 + C_1} + \left(m + \frac{c}{m}\right)\sqrt{\left(l + \frac{c_1}{l}\right)^2 + C} = \text{constans}$$

besitzt, wo c, c_1, C, C_1 willkürliche Parameter.

oder:

$$\xi''(\xi - \eta) - \xi'^2 = -\eta''(\xi - \eta) - \eta'^2.$$

Diese Gleichung einmal nach λ, einmal nach μ differenzirt, kommt:

$$\xi'''\eta' = \eta'''\xi'$$

oder:

$$\frac{\xi'''}{\xi'} = \frac{\eta'''}{\eta'} = \alpha = \text{const.}$$

Hier giebt es zwei Fälle:

1) $\alpha = 0 : \xi = a\lambda^2 + b\lambda + c, \quad \eta = a'\mu^2 + b'\mu + c',$

2) $\alpha \gtrless 0 : \xi = ae^{\alpha\lambda} - be^{-\alpha\lambda} + c, \quad \eta = a'e^{\alpha\mu} + b'e^{-\alpha\mu} + c'.$

Aus $\xi''(\xi - \eta) - \xi'^2 = -\eta''(\xi - \eta) - \eta'^2$ folgt dann noch:
im Falle 1) $a = a', \ b = b', \ c = c'$, also im Ganzen:

$$\xi = a\lambda^2 + b\lambda + c, \quad \eta = a\mu^2 + b\mu + c,$$

$$\frac{\xi' - \eta'}{\xi - \eta} = \frac{2a}{a(\lambda + \mu) + b}$$

im Falle 2) ist:

$$ab = a'b', \quad c = c'.$$

Falls a, a', b, b' sämmtlich von Null verschieden sind, setze man:

$$a = \sqrt{\gamma} \cdot r, \quad a' = \sqrt{\gamma} \cdot r', \quad b = \sqrt{\gamma} \cdot r^{-1}, \quad b' = \sqrt{\gamma} \cdot r'^{-1}$$

und man erhält:

$$\xi = \sqrt{\gamma}(re^{\alpha\lambda} + r^{-1}e^{-\alpha\lambda}) + c,$$

$$\eta = \sqrt{\gamma}(r_1 e^{\alpha\mu} + r_1^{-1}e^{-\alpha\mu}) + c_1$$

und

$$-2\frac{\varrho'}{\varrho} = \alpha \frac{rr_1 e^{\alpha(\lambda+\mu)} + 1}{rr_1 e^{\alpha(\lambda+\mu)} - 1}.$$

8.

Die allgemeinste Aufgabe, auf welche in dieser Richtung die Theorie des Despeyrous'schen Multiplicators führt, scheint folgende zu sein:

Man setze

$$u = \sqrt{Y} + \beta_1, \quad v = \alpha\sqrt{X} + \alpha_1,$$

wo α, α_1 in x, β, β_1 in y rational. Bekanntlich kann man in den Formeln

$$\frac{1}{\alpha\sqrt{X} + \alpha_1} = A\sqrt{X} + A_1, \quad \frac{1}{\beta\sqrt{Y} + \beta_1} = B\sqrt{Y} + B_1$$

die Coefficienten $\alpha, \alpha_1, \beta, \beta_1$ und A, A_1, B, B_1 rational durch einander ausdrücken. Nimmt man nun als Integral der Gleichung $udx + vdy = 0$ dieses:

$$L = R + S\sqrt{X} + T\sqrt{Y} + W\sqrt{XY} = c$$

an, und ordnet $v\frac{\partial L}{\partial x} - u\frac{dL}{\partial y} = 0$ nach den Irrationalitäten:

$$0 = R_1 + S_1\sqrt{X} + T_1\sqrt{Y} + W_1\sqrt{XY}$$

so ergeben die Coefficienten $= 0$ gesetzt die Gleichungen:

$$\begin{aligned}
0 = R_1 &= \alpha S^{(x)} - \beta T^{(y)} + \alpha_1 R_x - \beta_1 R_y,\\
0 = S_1 &= \alpha R_x - \beta W^{(y)} + \tfrac{\alpha_1}{X} S^{(x)} - \beta_1 S_y,\\
0 = T_1 &= \alpha W^{(x)} - \beta R_y + \alpha_1 T_x - \tfrac{\beta_1}{Y} T^{(y)},\\
0 = W_1 &= \alpha T_x - \beta S_y + \tfrac{\alpha_1}{X} W^{(x)} - \tfrac{\beta_1}{Y} W^{(y)}.
\end{aligned}$$

Hierin bezeichnen $S^{(x)}$, $T^{(y)}$, $W^{(x)}$, $W^{(y)}$ die Grössen:

$$XS_x + \frac{X'}{2}S, \quad YT_y + \frac{Y'}{2}T, \quad XW_x + \frac{X'}{2}W, \quad YW_y + \frac{Y'}{2}W,$$

denen man auch die Form $\sqrt{X}\frac{\partial S\sqrt{X}}{\partial x}$, etc. geben kann.

Die Aufgabe besteht darin, in allgemeinster Weise die gleichzeitigen Lösungen dieser Gleichungen nach den Functionen α, α_1, X von x, den Functionen β, β_1, Y von y und den Functionen R, S, T, W von x und y aufzusuchen, wobei es eben schon eine Beschränkung wäre, wenn die Functionen α, α_1, X, β, β_1, Y als gegeben angenommen würden.

Gegenstand dieses Aufsatzes war jedoch nur die Untersuchung des Multiplicators, der das elliptische Additionstheorem liefert, und ich will bei einer andern Gelegenheit das in den beiden letzten Artikeln Angedeutete des Genaueren ausführen.

Ilmenau im August 1882.

Bemerkungen über einige Transformationen von Flächen.

Von

A. Enneper in Göttingen.*)

I.

Entspricht einem Punkte P einer Fläche S ein Punkt P_1 einer andern Fläche S_1 nach einem bestimmten Gesetz, so möge die Fläche S_1 die transformirte Fläche S heissen. Man kann auch die Fläche S_1 als gegeben ansehen und sich das Problem stellen: die primitive Fläche S zu finden. Die Lösung dieses Problems enthält eine Umkehrung des Verfahrens, mittels dessen die Fläche S_1 sich aus der Fläche S ableiten lässt. Im allgemeinen führt diese Umkehrung auf eine neue Transformation. Hier bietet sich ein Fall von besonderm Interesse dar, wenn die neue Transformation mit der primitiven zusammenfällt, also die Fläche S ebenso von der Fläche S_1 abhängt, wie S_1 von S. Die Transformationen, von denen im Folgenden die Rede ist, bilden eine Erweiterung von einigen mehrfach behandelten Transformationen, über welche folgende Bemerkungen vorausgehen mögen.

Der berührenden Ebene zur Fläche S im Punkte P entspricht, in Beziehung auf eine bestimmte Kugelfläche K, der Pol P_1, welcher einer Fläche S_1 angehört, die nach dem Vorgang von Poncelet, die *reciproke Polarfläche* der Fläche S in Beziehung auf die Kugelfläche K genannt wird. Es ist dann bekanntlich umgekehrt auch S die reciproke Polarfläche von S_1. Im Vorstehenden ist der einfachste Fall der reciproken Polarflächen erwähnt, wenn statt der allgemeinen Fläche zweiten Grades die Kugelfläche K zur Basis der Transformation genommen wird.

Fällt man von einem festen Punkte O das Perpendikel OP_1 auf die berührende Ebene der Fläche S im Punkte P, so ist der Ort des

*) Die folgenden Untersuchungen enthalten den Inhalt nebst Erweiterungen zweier Mittheilungen des Verfassers an die Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Man vergleiche hierüber die „Nachrichten v. d. K. Gesellsch. d. Wissensch. zu Göttingen," aus dem Jahre 1877, pag. 369–396 und aus dem Jahre 1881, pag. 305–318.

Punktes P_1 die *Fusspunktfläche* S_1 der Fläche S in Beziehung auf den Punkt O. Sieht man die Fusspunktfläche als gegeben an, so führt die Bestimmung der primitiven Fläche S auf die Betrachtung einer Enveloppe. Es handelt sich dabei darum: die Enveloppe aller Ebenen zu finden, welche auf den Radienvectoren der Punkte einer Fläche in den betreffenden Punkten senkrecht stehen.

Auf die Fläche S_1 lässt sich dasselbe Verfahren wie auf die Fläche S anwenden, also die Fusspunktfläche der Fusspunktfläche bestimmen. Man kann sowohl in dieser Richtung weiter gehen, wie bei dem oben bemerkten inversen Problem, betreffend die Bestimmung einer Enveloppe. Beide Untersuchungen finden sich weitläufig durchgeführt bei Hirst: *Sur la courbure d'une série de surfaces et de lignes.* (Annali die Matematica. Tomo I. Anno 1859, pag. 95—112 und 138—167). Ohne hier sämmtliche Arbeiten über diesen Gegenstand aufzählen zu wollen, möge noch der Abhandlung Erwähnung geschehen, Cayley: *Sur la surface qui est l'enveloppe des plans conduits par les points d'un ellipsoide perpendiculairement aux rayons menés par le centre.* (Annali di M. T. II, A. 1859, pag. 168—179).

Die beiden bemerkten Transformationen lassen sich nach einander anwenden. Die Fusspunktfläche der reciproken Polarfläche involvirt eine neue Transformation, welche nach Liouville die *Transformation durch reciproke Radienvectoren* genannt wird. Die entsprechenden Punkte P und P_1 zweier Flächen S und S_1 liegen in Beziehung auf einen festen Punkt O mit demselben auf derselben Geraden, wobei das Product $OP.OP_1$ der beiden Radienvectoren constant ist. In Beziehung auf die erste Darstellung dieser Transformation scheint noch einige Unklarheit vorzuwalten. Dieselbe findet sich bei Plücker und bei Magnus. Man vergleiche Plücker: Analytisch geometrische Aphorismen. No. V. Ueber ein neues Uebertragungsprincip. (Crelle, *Journal für Math.* Band XI, pag. 219—225. Berlin 1834. Der Aufsatz datirt: Bonn, Ende October 1831).

Der einfache analytische Zusammenhang zwischen den Coordinaten der Punkte P und P_1 findet sich nicht bei Plücker. In dem Werke L. J. Magnus: *Sammlung von Aufgaben und Lehrsätzen aus der analytischen Geometrie.* (Geometrie der Ebene, auch u. d. T. Meyer Hirsch's: *Sammlung geometrischer Aufgaben.* Dritter Theil. Berlin 1833) findet sich Folgendes. Es seien x, y die Coordinaten eines Systems (S) von Punkten, und t, u die, auf dieselben oder auf andere Axen bezogenen, Coordinaten eines Systems (Σ). Zwischen zwei Punkten beider Systeme nimmt Magnus (p. 230) folgende Relationen an:

$$(ay + bx + c)u + (a'y + b'x + c')t + a''x + b''y + 1 = 0,$$
$$(\alpha y + \beta x + \gamma)u + (\alpha' y + \beta' x + \gamma')t + \alpha'' x + \beta'' y + 1 = 0.$$

Auf pag. 290—292 werden an Stelle dieser allgemeinen Relationen einfachere genommen, welche *zuerst in expliciter Form* die sogenannte Transformation durch reciproke Radienvectoren nebst Anwendungen auf die Geometrie der Ebene enthalten.*) In der vorhin erwähnten Abhandlung (Annali di Matematica. T. II) weist Hirst auf einen Aufsatz von Stubbs hin, welcher sich 1843 im *Philosophical Magazine* Vol. XXIII, pag. 338—347 u. d. T. „On the application of a new Method to the Geometry of Curves and Curve Surfaces" abgedruckt findet. Es ist dort die kürzere Bezeichnung *inverse Fläche* für die Fläche S_1 gebraucht statt der gebräuchlich gewordenen Benennung von Liouville. Der Aufsatz enthält manche interessante Resultate, die, ohne Beachtung gefunden zu haben, später reproducirt worden sind. Wenige Jahre nach der Arbeit von Stubbs hat W. Thomson die in Rede stehende Transformation behandelt und die Resultate in einigen Briefen an Liouville niedergelegt. (*Journal de Mathématiques.* Tome X. Année 1845, pag. 364, T. XII, A. 1847, pag. 265). Zu diesen Briefen hat Liouville (J. d. M. T. XII, pag. 265—290, die oben erwähnte Benennung auf p. 276) eine Reihe sehr geistreicher und scharfsinniger Bemerkungen gemacht, in Folge deren wahrscheinlich die in Rede stehende Transformation irrthümlich hin und wieder Thomson zugeschrieben worden ist.

Die drei bemerkten Transformationen lassen sich zur Herstellung neuer Transformationen unter einander verbinden, worüber der Verfasser schon vor längerer Zeit einige kurze Mittheilungen gemacht hat. (Zeitschrift für Mathematik. 1864, Jahrgang IX, pag. 126—131).

In einer neueren Arbeit: *„Mémoire sur une Transformation géométrique et sur la surfaces des ondes"* (Mémoires de l'Académie de Belgique, T. XXXVIII, Bruxelles 1871, auch Bulletin de l'Acad. de Belgique Trente-Huitième Année, 2. série, T. XXVII, pag. 129—142) hat Catalan folgende Transformation betrachtet und zum Gegenstand einer grösseren Abhandlung gemacht. Durch einen festen Punkt O und die Normale des Punktes P einer Fläche S sei eine Ebene gelegt. In dieser Ebene ziehe man OP_1 senkrecht zu OP und nehme $OP_1 = OP$. Der Punkt P_1 bestimmt dann eine Fläche S_1, d. i. die transformirte Fläche S. Weitere Betrachtungen hierüber findet man bei Gilbert: „Mémoire sur une transformation géométrique" (Bulletin de l'Academie de Belgique. T. XXVIII, p. 31).

Die sämmtlichen angeführten Transformationen und ihre Combinationen unter einander haben eine bemerkenswerthe Eigenschaft,

*) Die Bemerkungen über die Arbeiten von Plücker und Magnus verdankt der Verfasser einer gütigen brieflichen Mittheilung des Herrn Professor Reye in *Strassburg*. Eine kurze Erwähnung der Formeln von Magnus möchte, bei der Seltenheit seines Buchs, für manchen Mathematiker von Interesse sein.

welche im Folgenden als Definition dienen soll. Es ergeben sich dann nicht mehr einzelne, isolirte Transformationen, sondern eine unendliche Zahl derselben in Folge arbiträrer Functionen, welche in den analytischen Ausdrücken auftreten.

II.

Für die im Folgenden zu betrachtende allgemeine Transformation soll folgende Definition zu Grunde gelegt werden:

> *Die correspondirenden Punkte P und P_1 zweier Flächen S und S_1 sollen sich in Beziehung auf einen festen Punkt O so entsprechen: Die Ebene durch die Punkte O, P und P_1 enthalte die Normalen zu den Flächen S und S_1 in den respectiven Punkten P und P_1.*

Diese Definition enthält eine fundamentale Eigenschaft der sämmtlichen in I angemerkten Transformationen.

Für die analytische Behandlung der oben definirten Transformation mögen folgende Bezeichnungen eingeführt werden. Es seien x_0, y_0, z_0 die Coordinaten von O; x, y, z diejenigen von P, endlich sei P_1 durch die Coordinaten x_1, y_1, z_1 bestimmt. Die Normale im Punkte P zur Fläche S bilde mit den Coordinatenaxen die Winkel ξ, η, ζ; die Richtung der Normale zur Fläche S_1 im Punkte P_1 sei analog durch die Winkel ξ_1, η_1, ζ_1 bestimmt. Man setze ferner:

$$(1) \qquad (x - x_0)\cos\xi + (y - y_0)\cos\eta + (z - z_0)\cos\zeta = p,$$

$$(2) \qquad (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2,$$

$$(3) \qquad \sqrt{r^2 - p^2} = \Delta.$$

$$(4) \qquad \begin{cases} (x_1 - x_0)\cos\xi_1 + (y_1 - y_0)\cos\eta_1 + (z_1 - z_0)\cos\zeta_1 = p_1, \\ (x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2 = r_1^2, \\ \sqrt{r_1^2 - p_1^2} = \Delta_1. \end{cases}$$

Es ist p die Länge des Perpendikels, gefällt vom festen Punkte O auf die berührende Ebene zur Fläche S im Punkte P, ferner ist r der Radiusvector OP. Aehnliche Bedeutungen haben p_1 und r_1.

Man kann, von einigen Ausnahmefällen abgesehen, x, y und z als Functionen von p und r ansehen. Dasselbe findet dann auch für x_1, y_1 und z_1 statt. Die Ausnahmefälle, welche bei der folgenden Darstellung nicht mit in Betracht gezogen sind, reduciren sich auf die drei nachstehenden Bedingungen.*)

A) r constant. Dieser Bedingung entspricht eine Kugelfläche mit dem Mittelpunkt O.

*) Um dieser Abhandlung keine zu grosse Ausdehnung zu geben, sind die drei Bedingungen ohne Beweis mitgetheilt.

B) p constant. Neben einer Kugelfläche mit dem Mittelpunkt O enthält diese Bedingung developpable Flächen. Ausser der Ebene selbst entspricht einem constanten p die Tangentenfläche einer kürzesten Linie einer beliebigen Kegelfläche. Der Punkt O ist dann die Spitze der Kegelfläche.

C) Die Quantitäten r und p sind von einander gegenseitig abhängig. Es ergeben sich die Flächen mit einem Systeme planer Krümmungslinien, für welche die Ebenen dieser Curven die Normalen zur Fläche enthalten und durch eine feste Gerade gehen.

In Folge der oben aufgestellten Definition für die Transformation finden folgende Gleichungen statt:

$$\begin{vmatrix} \cos\xi & \cos\eta & \cos\zeta \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} \cos\xi_1 & \cos\eta_1 & \cos\zeta_1 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \end{vmatrix} = 0.$$

Sind M, N, M_1 und N_1 Unbestimmte, so lassen sich diese Gleichungen durch die folgenden ersetzen:

$$(5)\quad x_1 - x_0 = M\cos\xi + N(x - x_0),\quad y_1 - y_0 = M\cos\eta + N(y - y_0),$$
$$z_1 - z_0 = M\cos\zeta + N(z - z_0),$$

$$(6)\quad H\cos\xi = M_1\cos\xi + N_1(x - x_0),\quad H\cos\eta_1 = M_1\cos\eta + N_1(y - y_0),$$
$$H\cos\zeta_1 = M_1\cos\zeta + N_1(z - z_0),$$

wo:

$$(7)\qquad H^2 = M_1^2 + 2pM_1N_1 + r^2N_1^2.$$

Da der Punkt P einer Fläche S angehört, so ist allgemein:

$$(8)\qquad \cos\xi\,dx + \cos\eta\,dy + \cos\zeta\,dz = 0.$$

Analog findet für die Fläche S_1 die totale Differentialgleichung statt:

$$(9)\qquad \cos\xi_1\,dx_1 + \cos\eta_1\,dy_1 + \cos\zeta_1\,dz_1 = 0.$$

Mit Rücksicht auf die Gleichung (8) geben die Gleichungen (1) und (2):

$$(10)\quad \begin{cases} (x - x_0)\,d\cos\xi + (y - y_0)\,d\cos\eta + (z - z_0)\,d\cos\zeta = dp, \\ (x - x_0)\,dx + (y - y_0)\,dy + (z - z_0)\,dz = r\,dr. \end{cases}$$

Substituirt man in (9) für x_1, $\cos\xi_1$ etc. die Werthe aus (5) und (6) so geht diese Gleichung nach (1), (2), (8) und (10) in folgende über:

$$(11)\quad (M_1 + pN_1)\,dM + (pM_1 + r^2N_1)\,dN + N_1(M\,dp + N\,r\,dr) = 0.$$

Diese Gleichung ist allgemein, wie auch x, y und z als Functionen zweier Variabelen definirt werden. Man sehe nun in den Gleichungen (5) und (6) x, y und z, also auch M und N, als Function von p und r an. Unter dieser Voraussetzung ist in (11):

$$dM = \frac{dM}{dp}\,dp + \frac{dM}{dr}\,dr,\quad dN = \frac{dN}{dp}\,dp + \frac{dN}{dr}\,dr.$$

Da p und r von einander unabhängig sind, so zerfällt die Gleichung (11) in zwei Gleichungen, indem die Factoren von dp und dr einzeln verschwinden müssen. Man erhält so:

$$(12)\quad \begin{aligned} M_1\left(\frac{dM}{dp}+p\,\frac{dN}{dp}\right)+N_1\left(p\,\frac{dM}{dp}+r^2\,\frac{dN}{dp}+M\right)&=0,\\ M_1\left(\frac{dM}{dr}+p\,\frac{dN}{dr}\right)+N_1\left(p\,\frac{dM}{dr}+r^2\,\frac{dN}{dr}+rN\right)&=0. \end{aligned}$$

Durch Elimination von M_1 und N_1 folgt:

$$(13)\quad \begin{vmatrix} \frac{dM}{dp}+p\,\frac{dN}{dp} & p\,\frac{dM}{dp}+r^2\,\frac{dN}{dp}+M \\ \frac{dM}{dr}+p\,\frac{dN}{dr} & p\,\frac{dM}{dr}+r^2\,\frac{dN}{dr}+rN \end{vmatrix}=0.$$

Es sind M und N durch die Gleichung (13) mit einander verbunden. Das Verhältniss von M_1 zu N_1 — welches in den Gleichungen (6) vorkommt — ist durch eine der Gleichungen (12) gegeben. Die Gleichungen (12) lassen sich auch auf folgende Art schreiben:

$$(14)\quad \begin{cases} (M_1+pN_1)\left(\frac{dM}{dp}-\frac{pM}{r^2-p^2}\right)+(pM_1+r^2N_1)\left(\frac{dN}{dp}+\frac{M}{r^2-p^2}\right)=0,\\ (M_1+pN_1)\left(\frac{dM}{dr}-\frac{prN}{r^2-p^2}\right)+(pM_1+r^2N_1)\left(\frac{dN}{dr}+\frac{rN}{r^2-p^2}\right)=0. \end{cases}$$

Die Gleichungen (12) oder (14) geben zu einigen Annahmen Veranlassung, welche, sowohl wegen ihrer Allgemeinheit, wie relativen Einfachheit, einer weiteren Ausführung nicht unwerth erscheinen.

Die beiden Gleichungen (12) reduciren sich auf eine Gleichung, wenn die Factoren von M_1 und N_1 in einer der bemerkten Gleichungen gleichzeitig verschwinden. Man gelangt genau zu demselben Resultate wenn in einer der Gleichungen (14) die Factoren von M_1+pN_1 und $pM_1+r^2N_1$ annulirt werden. Je nachdem die erste oder zweite der Gleichungen (12) auf diese Art identisch wird, findet man, dass r_1 nur von r oder nur von p abhängig ist.

Setzt man in den Gleichungen (12) $N_1=0$, oder auch in den Gleichungen (14) $M_1+pN_1=0$, so zeigt die Ausführung der Rechnung, dass in beiden Fällen p_1 nur von p abhängt.

Nimmt man in den Gleichungen (12) $M_1=0$, oder auch in den Gleichungen (14) $pM_1+r^2N_1=0$, so ist in beiden Fällen p_1 nur von r abhängig.

Man kann nun weiter gehen und die gefundenen Resultate dadurch zu verallgemeinern suchen, dass man r_1 oder p_1 der Bedingung unterwirft nur von r oder nur von p abzuhängen. Hierbei zeichnen sich zwei Fälle durch besondere Einfachheit aus, wenn nämlich r_1 nur von r, oder p_1 nur von p abhängt.

In beiden Fällen kehrt die Transformation durch Umkehrung in sich zurück, oder mit anderen Worten, die Fläche S_1 hängt auf dieselbe Art von der Fläche S ab, wie umgekehrt die Fläche S von der Fläche S_1.

III.

Erster Fall.

r_1 nur von r abhängig.

Mit Rücksicht auf die Bedeutung von r_1 aus der zweiten Gleichung (4) geben die Gleichungen (5):

$$(15) \qquad r_1^2 = M^2 + 2pMN + r^2N^2 = (M+pN)^2 + (\Delta N)^2.$$

Da nun r_1 von p unabhängig sein soll, so folgt durch Differentiation nach p aus der Gleichung (15):

$$(16) \qquad M\left(\frac{dM}{dp} + p\frac{dN}{dp}\right) + N\left(p\frac{dM}{dp} + r^2\frac{dN}{dp} + M\right) = 0.$$

Diese Gleichung in Verbindung mit der ersten Gleichung (12) giebt:

$$(17) \qquad \frac{M_1}{M} = \frac{N_1}{N} \quad \text{oder} \quad M_1N - N_1M = 0.$$

Findet aber diese Gleichung statt, so zeigt die zweite Gleichung (12), dass

$$M^2 + 2pMN + r^2N^2$$

von p unabhängig ist. In (15) ist dann auch r_1 von r unabhängig, also constant. Die transformirte Fläche ist eine Kugelfläche, ein evidentes Resultat. Es entspricht dann einem Punkte einer Fläche S ein Punkt eines Kreises. Der Kreis ist der Durchschnitt einer Kugelfläche um den Punkt O mit derjenigen Ebene, welche den Radiusvector OP und die Normale in P zur Fläche S enthält. Man erhält weiter für S_1 eine Kugelfläche, wenn in der Gleichung (17) $M_1 = 0$, $M = 0$, oder $N_1 = 0$, $N = 0$ ist.

Soll die Gleichung (17) nicht stattfinden, so können die Gleichungen (12) und (16) nur gleichzeitig bestehen für die Bedingungen:

$$\frac{dM}{dp} + p\frac{dN}{dp} = 0, \quad p\frac{dM}{dp} + r^2\frac{dN}{dp} + M = 0.$$

Aus diesen Gleichungen leitet man leicht die folgende ab:

$$\frac{dM}{dp} = \frac{pM}{r^2 - p^2}, \qquad \frac{dN}{dp} = -\frac{M}{r^2 - p^2}.$$

Sind $\psi(r)$ und $\psi_1(r)$ beliebige Functionen von r, setzt man $\Delta = \sqrt{r^2 - p^2}$, so geben die vorstehenden Gleichungen integrirt:

$$(18) \qquad M = \frac{r\psi_1(r)}{\Delta}, \quad N = -\frac{p\psi_1(r)}{r\Delta} + \frac{\psi(r)}{r}.$$

Diese Werthe von M und N entsprechen dem allgemeinen Falle, wenn r_1 nur von r abhängig sein soll. Die zweite Gleichung (12) wird wegen der Gleichungen (18)

$$(19)\quad M_1\left[\frac{\psi_1'(r)}{r}\Delta+\frac{p^2\psi_1(r)}{r^2\Delta}+p\left\{\frac{\psi'(r)}{r}-\frac{\psi(r)}{r^2}\right\}\right]+N_1\left[r\psi'(r)+\frac{p\psi_1(r)}{\Delta}\right]=0.$$

Von den Gleichungen (5) und (6) genügt es nur je eine derselben anzuführen. Den Werthen von M und N aus (18) entsprechend findet man:

$$(20)\quad x_1-x_0=\frac{r\psi_1(r)}{\Delta}\cos\xi+\left[-\frac{p\psi_1(r)}{r\Delta}+\frac{\psi(r)}{r}\right](x-x_0).$$

$$(21)\quad H\cos\xi_1=\left[r\psi'(r)+\frac{p\psi_1(r)}{\Delta}\right]\cos\xi-\left[\frac{\psi_1'(r)}{r}\Delta+\frac{p^2\psi_1(r)}{r^2\Delta}+p\left\{\frac{\psi'(r)}{r}-\frac{\psi(r)}{r^2}\right\}\right](x-x_0),$$

wo:

$$(22)\quad H^2=\left[\Delta\psi'(r)+\frac{p\psi_1(r)}{r}\right]^2+\left[\Delta\psi_1'(r)-\frac{p\psi(r)}{r}\right]^2.$$

Eliminirt man cos ξ zwischen den Gleichungen (20) und (21), so ergiebt sich für $x-x_0$ folgende Gleichung:

$$(23)\quad (x-x_0)\left[\psi(r)\psi'(r)+\psi_1(r)\psi_1'(r)\right]=-\frac{r\psi_1(r)H}{\Delta}\cos\xi_1+\left[r\psi'(r)+\frac{p\psi_1(r)}{\Delta}\right](x-x_0).$$

Aus den Gleichungen (20) und zwei analogen Gleichungen erhält man:

$$(24)\quad r_1^2=\psi(r)^2+\psi_1(r)^2.$$

$$(25)\quad (x_1-x_0)(x-x_0)+(y_1-y_0)(y-y_0)+(z_1-z_0)(z-z_0)=r\dot{\psi}(r).$$

Die Gleichungen (24) und (25) zeigen, dass der Winkel, welchen die Radienvectoren OP und OP_1 zweier entsprechenden Punkte der Flächen S und S_1 einschliessen, nur von r abhängig ist.

Unter Zugrundelegung der Gleichungen (20) und (21) erhält man für p_1, definirt durch die erste Gleichung (4), folgende Relation:

$$(26)\quad p_1H=\frac{p}{r}\left[\psi(r)^2+\psi_1(r)^2\right]+\left[\psi_1(r)\psi'(r)-\psi(r)\psi_1'(r)\right]\Delta.$$

Von dem Product der Gleichungen (22) und (24) das Quadrat der Gleichung (26) abgezogen giebt:

$$(\Delta_1H)^2=\left[\psi(r)\psi'(r)+\psi_1(r)\psi_1'(r)\right]^2\Delta^2.$$

Da die Vorzeichen von Δ und Δ_1 beliebig sind, so ergiebt die vorstehende Gleichung:

$$(27) \qquad \frac{H}{\Delta} = \frac{\psi(r)\psi'(r) + \psi_1(r)\psi_1'(r)}{\Delta_1}.$$

Die Gleichung (26) werde durch Δ dividirt, dann aus (27) der Werth von H substituirt, hierdurch folgt zur Bestimmung von p in Function von p_1 und r die Gleichung:

$$(28) \qquad \frac{p}{\Delta}\frac{\psi(r)^2+\psi_1(r)^2}{r} = p_1\frac{\psi(r)\psi'(r)+\psi_1(r)\psi_1'(r)}{\Delta_1} - [\psi_1(r)\psi'(r) - \psi(r)\psi_1'(r)].$$

Aus (27) und (28) substituire man die Werthe von $\frac{H}{\Delta}$ und $\frac{p}{\Delta}$ in die Gleichung (23); mit Rücksicht auf die Gleichung (24) nimmt dann die Gleichung (23) folgende einfachere Form an:

$$(29) \qquad x - x_0 = -\frac{r\psi_1(r)}{\Delta_1}\cos\xi_1 + \frac{r}{r_1^2}\left[\frac{p_1\psi_1(r)}{\Delta_1} + \psi(r)\right](x_1 - x_0).$$

Nach (24) ist umgekehrt r Function von r_1. Setzt man in der Gleichung (29) $r\psi_1(r) = -r_1\varphi_1(r_1)$ und $r\psi(r) = r_1\varphi(r_1)$, so zeigen die Gleichungen (20) und (29), dass die Coordinaten des Punktes P_1 von denen des Punktes P ebenso abhängen, wie umgekehrt, die Coordinaten des Punktes P von denjenigen des Punktes P_1. Der Annahme $\psi_1(r) = 0$ und $\psi(r) = k^2$, wo k eine Constante bedeutet, entspricht die *Transformation durch reciproke Radienvectoren.* Setzt man in (20) $\psi(r) = 0$ und $\psi_1(r) = r$, so erhält man die in I erwähnte von Catalan betrachtete Transformation.

Zweiter Fall.

p_1 nur von p abhängig.

Die Gleichungen (5) und (6) geben:

$$p_1 H = M_1(M + pN) + N_1(pM + r^2N).$$

Bildet man das Quadrat dieser Gleichung, setzt aus (7) den Werth von H^2 ein, so folgt:

$$(30) \qquad p_1^2 = \frac{[M_1(M+pN) + N_1(pM+r^2N)]^2}{(M_1+pN_1)^2 + (r^2-p^2)N_1^2}.$$

Aus der zweiten Gleichung (12) setze man das Verhältniss der Werthe von M_1 und N_1 in die Gleichung (30). Nimmt man wieder $\Delta = \sqrt{r^2-p^2}$, so lässt sich die Gleichung (30) auf folgende bemerkenswerthe Form bringen:

$$(31) \qquad p_1^2 = \frac{\left[(M+pN)\frac{d\Delta N}{dr} - \Delta N\frac{d(M+pN)}{dr}\right]^2}{\left[\frac{d\Delta N}{dr}\right]^2 + \left[\frac{d(M+pN)}{dr}\right]^2}.$$

Hängt p_1 nur von p ab, so ist das Integral der vorstehenden Differentialgleichung:

(32) $$(M + pN)\cos w + \Delta N \sin w = p_1,$$

wo der Winkel w nur von p abhängig ist. Zur Vereinfachung der Rechnung setze man:

$$-(M + pN)\sin w + \Delta N \cos w = t.$$

Diese Gleichung in Verbindung mit der Gleichung (32) giebt:

(33) $$M + pN = p_1 \cos w - t \sin w, \quad \Delta N = p_1 \sin w + t \cos w.$$

Zwischen M und N findet die Gleichung (13) statt, welche in Folge der Relationen (32) in folgende übergeht:

(34) $$\left[\Delta \frac{dp_1}{dp} - \left(1 + \Delta \frac{dw}{dp}\right) t\right] \frac{dt}{dr} = 0.$$

Es soll der Fall $\frac{dt}{dr} = 0$ ausgeschlossen bleiben, weil sonst die rechten Seiten der Gleichungen (33) nur von p abhängig sind, also auch $M + pN$ und ΔN, was nach (31) nicht stattfinden soll. Die Gleichung (33) giebt also:

(35) $$\left(1 + \Delta \frac{dw}{dp}\right) t = \Delta \frac{dp_1}{dp},$$

durch welche Gleichung t bestimmt ist. Mit Hülfe der Gleichungen (33) und (35) leitet man aus den Gleichungen (5), (6) und (12) die folgenden ab:

(36) $$x_1 - x_0 = \left[p_1\left(\cos w - \frac{p \sin w}{\Delta}\right) - \frac{p\cos w + \Delta \sin w}{1 + \Delta \frac{dw}{dp}} \frac{dp_1}{dp}\right] \cos \xi$$
$$+ \left[\frac{p_1 \sin w}{\Delta} + \frac{\cos w}{1 + \Delta \frac{dw}{dp}} \frac{dp_1}{dp}\right] (x - x_0),$$

(37) $$\cos \xi_1 = \left(\cos w - \frac{p \sin w}{\Delta}\right) \cos \xi + \frac{\sin w}{\Delta} (x - x_0).$$

Aus der Gleichung (37) und zwei analogen Gleichungen folgt:

$$\cos \xi \cos \xi_1 + \cos \eta \cos \eta_1 + \cos \zeta \cos \zeta_1 = \cos w.$$

Der Winkel, welchen die Normalen zu den Flächen S und S_1 in den correspondirenden Punkten P und P_1 einschliessen, ist nur von p abhängig.

Als besondere Fälle sind die folgenden zu bemerken. Für $w = 0$ sind die Normalen beider Flächen in zwei correspondirenden Punkten parallel. Dem besonderen Fall $p_1 = \frac{k^2}{p}$ entspricht die *reciproke Polarfläche der Fusspunktfläche einer gegebenen Fläche S*. Für $\cos w = 0$ stehn die Normalen in zwei correspondirenden Punkten auf einander

senkrecht. Nimmt man $p_1 = p$, so ist auch $r_1 = r$, es ergiebt sich wieder die von Catalan untersuchte Transformation.

Aus der Gleichung (36) und zwei ähnlichen Gleichungen findet man:

$$\Delta_1^2 = r_1^2 - p_1^2 = \left(\frac{\Delta \frac{dp_1}{dp}}{1 + \Delta \frac{dw}{dp}} \right)^2 .$$

Da Δ und Δ_1 beliebige Vorzeichen haben, so kann man setzen:

$$\Delta_1 \left(1 + \Delta \frac{dw}{dp}\right) + \Delta \frac{dp_1}{dp} = 0, \tag{38}$$

oder auch:

$$\Delta \left(1 + \Delta_1 \frac{dw}{dp_1}\right) + \Delta_1 \frac{dp}{dp_1} = 0, \tag{39}$$

Es lässt sich mit Hülfe dieser Gleichung auf gleiche Art wie in der zuerst behandelten Transformation darthun, dass die Flächen S und S_1 auch in Beziehung auf diesen zweiten Fall, in einem reciproken Verhältniss zu einander stehn. Die Transformation kehrt durch Umkehrung in sich zurück. Da der Nachweis hiervon sich nur auf die Elimination von cos ξ zwischen den Gleichungen (36) und (37) reducirt, nebst Einführung des Werthes von Δ_1 und Δ mittels der Gleichung (39), so findet man durch eine leichte Rechnung:

$$x - x_0 = \left[p \left(\cos w - \frac{p_1 \sin w}{\Delta_1} \right) - \frac{p_1 \cos w + \Delta_1 \sin w}{1 + \Delta_1 \frac{dw}{dp_1}} \frac{dp}{dp_1} \right] \cos \xi_1$$

$$+ \left[\frac{p \sin w}{\Delta_1} + \frac{\cos w}{1 + \Delta_1 \frac{dw}{dp_1}} \frac{dp}{dp_1} \right] (x_1 - x_0).$$

Dritter Fall.

r_1 nur von p abhängig.

Da nach (5):

$$r_1^2 = M^2 + 2pMN + r^2 N^2,$$

so folgt, wenn r_1 unabhängig von r sein soll, durch Differentiation nach r:

$$M\left(\frac{dM}{dr} + p \frac{dN}{dr}\right) + N\left(p \frac{dM}{dr} + r^2 \frac{dN}{dr} + rN\right) = 0. \tag{40}$$

Diese Gleichung in Verbindung mit der zweiten Gleichung (12) giebt zu ganz ähnlichen Betrachtungen Veranlassung wie die Gleichung (16) des ersten Falls. Sieht man von dem besondern Fall, dass S_1 eine Kugelfläche ist, ab, so ergiebt sich als allgemeine Lösung das Ver-

schwinden der Factoren von M_1 und N_1 in der zweiten Gleichung (12), wodurch natürlich auch die linke Seite der Gleichung (40) verschwindet.

Setzt man also:

$$\frac{dM}{dr} + p\frac{dN}{dr} = 0, \quad p\frac{dM}{dr} + r^2\frac{dN}{dr} + rN = 0,$$

so geben diese Gleichungen integrirt, mit Rücksicht auf die Bedeutung von Δ aus (3),

$$N = \frac{\varphi_1 p}{\Delta}, \qquad M = -\frac{p\varphi_1 p}{\Delta} + \varphi p,$$

wo φp und $\varphi_1 p$ beliebige Functionen von p sind. Mittels der vorstehenden Werthe von M und N erhält man aus den Gleichungen 5, 6 und (12):

$$41) \quad x_1 - x_0 = \left[-\frac{p\varphi_1 p}{\Delta} + \varphi p\right]\cos\xi + \frac{\varphi_1 p}{\Delta}(x - x_0),$$

$$42) \quad H\cos\xi_1 = \left[\Delta\varphi_1 p + \varphi p - \frac{p\varphi_1 p}{\Delta} + p\varphi p\right]\cos\xi - \left[\varphi p - \frac{\varphi_1 p}{\Delta}\right](x - x_0),$$

wo:

$$43) \qquad H^2 = [\Delta\varphi_1 p + \varphi p]^2 + [\Delta\varphi p - \varphi_1 p]^2.$$

Die Annahme $\varphi_1 p = 0$ und $\varphi p = p$ giebt die *Fusspunktfläche* von S; für $\varphi_1 p = 0$ und $\varphi p = \frac{k^2}{p}$, wo k eine Constante bedeutet, erhält man die *reciproke Polarfläche* der primitiven Fläche S. Die Gleichungen 41 und 42 geben:

$$44 \qquad r_1^2 = \varphi p^2 - \varphi_1 p^2,$$

$$45 \qquad p_1 H = \varphi p^2 - \varphi_1 p^2 + [\varphi p\,\varphi_1 p - \varphi_1 p\,\varphi p]\Delta.$$

Eliminirt man $\cos\xi$ zwischen den Gleichungen 41 und 42, so kann man umgekehrt, unter Zuziehung der Gleichungen 43), 44 und 45), $x - x_1$ durch $x_1 - x_0$, $\cos\xi_1$, p_1 und r_1 ausdrücken, d. h. zu einer gegebenen Fläche S_1 die primitive Fläche S bestimmen. Man hat es hierbei mit keiner Transformation zu thun, die in sich zurückkehrt, sondern mit einer neuen Transformation.

Die auszuführenden Rechnungen sind ziemlich weitläufig, die Resultate entsprechend von complicirten Formen. Es erscheint unter diesen Umständen angemessen ein anderes Verfahren kurz anzudeuten, bei welchem die bemerkten Uebelstände vermieden werden. Bei diesem Verfahren ergiebt sich auch noch die Integration einer Differentialgleichung, die sich bei einer anderen Behandlung des Problems darbieten, wie im vierten Fall ausgeführt ist.

Nach 44 ist umgekehrt p von r_1 abhängig. Sind E_1 und u_1 Functionen von r_1, so lässt sich die Gleichung 44 ersetzen durch:

(46) $\varphi(p) = r_1 \cos u_1, \quad \varphi_1(p) = r_1 \sin u_1, \quad p = R_1.$

Setzt man zur Vereinfachung

$$\frac{du_1}{dr_1} = u_1', \qquad \frac{dR_1}{dr_1} = R_1',$$

so geben die Gleichungen (46) nach r_1 differentiirt:

(47) $\varphi'(p) R_1' = \cos u_1 - r_1 \sin u_1 u_1', \quad \varphi_1'(p) R_1' = \sin u_1 + r_1 \cos u_1 u_1'.$

Zwischen den Gleichungen (43) und (45) werde H eliminirt. Mit Rücksicht auf die Gleichungen (46) und (47) erhält man für Δ eine einfache quadratische Gleichung. Beide Wurzeln dieser Gleichung lassen sich durch:

(48) $$\Delta = \frac{r_1 \Delta_1 R_1'}{p_1 - r_1 \Delta_1 u_1'}$$

darstellen, wo wieder $\Delta_1^2 = r_1^2 - p_1^2$. Die Gleichung (45) giebt nach (46, (47) und (48):

(49) $$H = \frac{r_1^2}{p_1 - r_1 \Delta_1 u_1'}.$$

Wird nun $\cos \xi$ zwischen den Gleichungen (41) und (42) eliminirt, so folgt, unter Zuziehung der Gleichungen (46) bis (49)

(50) $$x - x_0 = M_2 \cos \xi_1 + N_2 (x_1 - x_0),$$

wo zur Abkürzung gesetzt ist:

(51) $$\begin{cases} M_2 = \dfrac{R_1 r_1 \sin u_1}{\Delta_1} - \dfrac{R_1' r_1^2 \cos u_1}{p_1 - r_1 \Delta_1 u_1'}, \\ N_2 = \dfrac{R_1}{r_1}\left(\cos u_1 - \dfrac{p_1 \sin u_1}{\Delta_1}\right) + R_1' \dfrac{p_1 \cos u_1 + \Delta_1 \sin u_1}{p_1 - r_1 \Delta_1 u_1'}. \end{cases}$$

Diese beiden Gleichungen geben:

(52) $$M_2 (p_1 \cos u_1 + \Delta_1 \sin u_1) + N_2 r_1^2 \cos u_1 = R_1 r_1 = p r_1.$$

Vierter Fall.

p_1 nur von r abhängig.

Dieser Fall kommt auf die Umkehrung des dritten Falls hinaus. Mit etwas veränderten Bezeichnungen enthalten die Gleichungen (50) und (51) die Formeln, welche diesem Falle entsprechen. Für eine directe Behandlung sind nur wenige Bemerkungen beizufügen. Die Gleichungen (5) und (6), in Verbindung mit analogen Gleichungen, geben:

$$p_1 H = M_1 (M + pN) + N_1 (pM + r^2 N).$$

Man bilde das Quadrat dieser Gleichung, dividire durch:

$$H^2 = M_1^2 + 2pM_1 N_1 + r^2 N_1^2.$$

Hierauf substituire man aus der ersten Gleichung (12) das Verhältniss von M_1 zu N_1. Zwischen M und N ergiebt sich dann folgende Differentialgleichung:

$$(53) \qquad p_1^2 = \frac{\left[(r^2-p^2)\left(M\frac{dN}{dp} - N\frac{dM}{dp}\right) + M(M+pN)\right]^2}{(r^2-p^2)\left[\frac{dM}{dp}+p\frac{dN}{dp}\right]^2 + \left[(r^2-p^2)\frac{dN}{dp}+M\right]^2}.$$

Man setze wieder $\Delta^2 = r^2 - p^2$; ist nun p_1 nur von r abhängig, so findet man, mittels der Gleichung (52), als Integral der Differentialgleichung (53):

$$(54) \qquad M(p\cos u + \Delta \sin u) + Nr^2 \cos u = p_1 r,$$

wo u nur von r abhängig ist. Um M und N zu bestimmen, nehme man zu der Gleichung (54) die folgende, in welcher t eine zu bestimmende Grösse bedeutet:

$$(55) \qquad Mr\cos u + Nr(p\cos u - \Delta \sin u) = t.$$

Aus (54) und (55) setze man die Werthe von M und N in die Gleichung (13). Die linke Seite zerfällt dann in das Product zweier Factoren. Der eine Factor

$$\frac{1}{r}\frac{dt}{dp} + \frac{pt}{r\Delta^2} - \frac{rp_1}{\Delta^2}$$

muss von Null verschieden sein, wenn nicht gleichzeitig

$$\frac{dM}{dp} + p\frac{dN}{dp} \quad \text{und} \quad d\frac{pM+r^2N}{dp}$$

verschwinden sollen. Es kann also nur der zweite Factor verschwinden, wodurch sich für t folgender Werth ergiebt:

$$(56) \qquad t = pp_1 - \frac{r\Delta^2\frac{dp_1}{dr}}{p - r\Delta\frac{du}{dr}}.$$

Für die Gleichungen (54) und (55) geht die erste Gleichung (12) über in:

$$(57) \qquad M_1(\Delta\cos u - p\sin u) = N_1 r^2 \sin u.$$

Die Gleichungen für $x_1 - x_0$ und $\cos\xi_1$ aus (5) und (6) nehmen wegen der Gleichungen (54), (55) und (57) folgende Formen an:

$$(58) \quad \begin{cases} x_1 - x_0 = \dfrac{tr\cos u - p_1 r(p\cos u - \Delta\sin u)}{\Delta^2}\cos\xi \\ \qquad\qquad + \left[p_1 r\cos u - t\dfrac{p\cos u + \Delta\sin u)}{r}\right]\dfrac{x-x_0}{\Delta^2}, \\ \Delta\cos\xi_1 = r\sin u\cos\xi + (\Delta\cos u - p\sin u)\dfrac{x-x_0}{r}. \end{cases}$$

In der ersten der vorstehenden Gleichungen ist der Werth von t aus der Gleichung (56) einzusetzen. Nimmt man in den Gleichungen (56) und (58) $u = 0$ und $p_1 = r$, so ist die Fläche S_1 *die transformirte Fusspunktfläche der primitiven Fläche S durch reciproke Radienvectoren.*

IV.

Für eine in V auszuführende Untersuchung möge die Lösung eines Problems vorangehen, welches wie folgt lautet:

Die correspondirenden Punkte P und P_1 zweier Flächen S und S_1 sollen sich in Beziehung auf einen festen Punkt O auf folgende Art entsprechen:

Die Ebene durch die Punkte O, P und P_1 enthalte die Normalen zu den Flächen S und S_1 in den respectiven Punkten P und P_1.

Problem: Wann liegt der Schnittpunkt der beiden Normalen mit den Punkten O, P und P_1 auf dem Umfange eines Kreises?

Die Lösungen des Problems lassen sehr einfache geometrische Interpretationen zu, man findet:

Der Schnittpunkt der beiden Normalen fällt entweder mit einem der Punkte P und P_1 zusammen, oder die Winkel, welche die Radienvectoren der Punkte P und P_1 mit den entsprechenden Normalen bilden, sind einander gleich, respective ist ihre Summe gleich zwei Rechten.

Die analytische Deduction lässt sich auf folgende Weise übersichtlich führen.

Es seien X, Y und Z die sogenannten laufenden Coordinaten. Die Gleichung der Ebene, welche die Punkte O, P und die Normale zur Fläche S im Punkte P enthält, ist:

$$\begin{vmatrix} X - x_0 & Y - y_0 & Z - z_0 \\ x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ \cos\xi & \cos\eta & \cos\zeta \end{vmatrix} = 0.$$

Die bemerkte Ebene enthält auch den Punkt P_1 und die Normale der Fläche S_1 im Punkte P_1. Es seien X_1, Y_1, Z_1 die Coordinaten des Mittelpunkts und ϱ der Radius des Kreises durch die Punkte O, P und P_1. Die analytische Bedingung, dass die Ebene der Punkte O, P und P_1 den Mittelpunkt (X_1, Y_1, Z_1) enthält, ist:

$$\begin{vmatrix} X_1 - x_0 & Y_1 - y_0 & Z_1 - z_0 \\ x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ \cos\xi & \cos\eta & \cos\zeta \end{vmatrix} = 0.$$

Sind λ und λ_1 näher zu bestimmende Grössen, so lässt sich die vorstehende Gleichung durch die drei folgenden ersetzen:

$$(59)\quad X_1-x_0=\lambda\cos\xi+\lambda_1(x-x_0),\quad Y_1-y_0=\lambda\cos\eta+\lambda_1(y-y_0),$$
$$Z_1-z_0=\lambda\cos\zeta+\lambda_1(z-z_0).$$

Die Gleichung einer Kugelfläche mit dem Radius ϱ um den Punkt (X_1, Y_1, Z_1) als Mittelpunkt ist:

$$(60)\qquad (X-X_1)^2+(Y-Y_1)^2+(Z-Z_1)^2=\varrho^2.$$

Soll die Kugelfläche den Punkt (x_0, y_0, z_0) enthalten, so ist:

$$(61)\qquad (x_0-X_1)^2+(y_0-Y_1)^2+(z_0-Z_1)^2=\varrho^2.$$

Diese Gleichung von der Gleichung (61) subtrahirt, giebt:

$$(X-x_0)^2+(Y-y_0)^2+(Z-z_0)^2=2(X-x_0)(X_1-x_0)$$
$$+2(Y-y_0)(Y_1-y_0)+2(Z-z_0)(Z_1-z_0).$$

Wegen der Gleichungen (59) lässt sich die vorstehende Gleichung auch auf folgende Form bringen:

$$(62)\quad \begin{aligned}&(X-x_0)^2+(Y-y_0)^2+(Z-z_0)^2\\ &=2\lambda[(X-x_0)\cos\xi+(Y-y_0)\cos\eta+(Z-z_0)\cos\zeta]\\ &+2\lambda_1[(X-x_0)(x-x_0)+(Y-y_0)(y-y_0)+(Z-z_0)(z-z_0)].\end{aligned}$$

Soll die Kugelfläche, bestimmt durch die Gleichung (62), den Punkt (x, y, z) enthalten, so folgt, mittels der in 1) und 2) angewandten Bezeichnungen:

$$(63)\qquad r^2=2\lambda p+2\lambda_1 r^2.$$

Liegt endlich der Punkt (x_1, y_1, z_1) auf der obigen Kugelfläche, so folgt mittels der Gleichungen (5) und (62):

$$M^2+2pMN+r^2N^2=2\lambda(M+pN)+2\lambda_1(pM+r^2N).$$

Die Gleichung (63) mit N multiplicirt, von der vorstehenden Gleichung subtrahirt, giebt:

$$(64)\qquad M^2+2pMN+r^2N(N-1)=2M(\lambda+p\lambda_1).$$

Durch die Gleichungen (63) und (64) sind λ und λ_1 in den Gleichungen (59) bestimmt und dadurch auch die Coordinaten X_1, Y_1, Z_1 des Mittelpunkts des Kreises durch die Punkte O, P und P_1. Soll der Umfang dieses Kreises den Schnittpunkt der Normalen zu den Flächen S und S_1 in den Punkten P und P_1 enthalten, so lässt sich für die analytische Bedingung folgende Rechnung führen. Die Gleichungen der beiden Normalen sind:

$$\frac{X-x}{\cos\xi}=\frac{Y-y}{\cos\eta}=\frac{Z-z}{\cos\zeta}=\mu,\qquad \frac{X-x_1}{\cos\xi_1}=\frac{Y-y_1}{\cos\eta_1}=\frac{Z-z_1}{\cos\zeta_1}=\mu_1,$$

wo μ und μ_1 zwei Unbestimmte bedeuten. Es sei nun (x', y', z') der Schnittpunkt der beiden Normalen; es ist dann:

$$\frac{x'-x}{\cos\xi} = \mu, \quad \frac{x'-x_1}{\cos\xi_1} = \mu_1,$$

oder:

$$x' = x + \mu\cos\xi = x_1 + \mu_1\cos\xi_1,$$

also auch durch Subtraction von x_0 und Einsetzung der Werthe von $x_1 - x_0$ und $\cos\xi_1$ aus den Gleichungen (5) und (6):

$$x'-x_0 = x-x_0+\mu\cos\xi = \left(N+\frac{\mu_1 N_1}{H}\right)(x-x_0)+\left(M+\frac{\mu_1 M_1}{H}\right)\cos\xi.$$

Es ergeben sich so die folgenden drei Doppelgleichungen:

$$(65)\quad \begin{cases} x'-x_0 = x-x_0+\mu\cos\xi = \left(N+\frac{\mu_1 N_1}{H}\right)(x-x_0)+\left(M+\frac{\mu_1 M_1}{H}\right)\cos\xi, \\ y'-y_0 = y-y_0+\mu\cos\eta = \left(N+\frac{\mu_1 N_1}{H}\right)(y-y_0)+\left(M+\frac{\mu_1 M_1}{H}\right)\cos\eta, \\ z'-z_0 = z-z_0+\mu\cos\zeta = \left(N+\frac{\mu_1 N_1}{H}\right)(z-z_0)+\left(M+\frac{\mu_1 M_1}{H}\right)\cos\zeta. \end{cases}$$

Setzt man zur Vereinfachung:

$$(66)\qquad N+\frac{\mu_1 N_1}{H}-1 = L, \quad M+\frac{\mu_1 M_1}{H}-\mu = L_1,$$

so geben die Gleichungen (65):

$$L(x-x_0)+L_1\cos\xi=0, \quad L(y-y_0)+L_1\cos\eta=0, \quad L(z-z_0)+L_1\cos\zeta=0.$$

Da nicht allgemein

$$\frac{x-x_0}{\cos\xi} = \frac{y-y_0}{\cos\eta} = \frac{z-z_0}{\cos\zeta}$$

ist, so können die obigen Gleichungen nur für $L=0$ und $L_1=0$ bestehn, d. i. nach (66):

$$N+\frac{\mu_1 N_1}{H}-1=0, \quad M+\frac{\mu_1 M_1}{H}=\mu.$$

Hieraus ergiebt sich für μ folgender Werth:

$$(67)\qquad \mu = M+\frac{1-N}{N_1}M_1.$$

Es soll nun der Punkt (x', y', z') auf der Kugelfläche liegen, enthalten in der Gleichung (62); die bemerkte Gleichung muss für $X=x'$, $Y=y'$, $Z=z'$ bestehn, oder sie muss nach (65) für

$$X = x+\mu\cos\xi, \quad Y = y+\mu\cos\eta, \quad Z = z+\mu\cos\zeta,$$

erfüllt sein. Man findet so:

$$\begin{aligned} r^2+2p\mu+\mu^2 &= 2\lambda(p+\mu)+2\lambda_1(r^2+p\mu) \\ &= 2\lambda p+2\lambda_1 r^2+\mu(2\lambda+2\lambda_1 p). \end{aligned}$$

Mittels der Gleichungen (63) und (64) reducirt sich diese Gleichung auf:

$$\mu\left[\mu - M + \frac{2pM + r^2N}{M}(1 - N)\right] = 0.$$

Hieraus folgt entweder $\mu = 0$ oder

$$\mu - M + \frac{2pM + r^2N}{M}(1 - N) = 0.$$

Wegen der Gleichung (67) ist also entweder:

$$MN_1 + M_1(1 - N) = 0, \tag{68}$$

oder:

$$[M_1M + N_1(2pM + r^2N)](1 - N) = 0. \tag{69}$$

Findet die Gleichung (68) statt, ist also $\mu = 0$, so geben die Gleichungen (65) $x' = x$, $y' = y$, $z' = z$, d. h. die Normale zur Fläche S_1 im Punkte P_1 geht durch den Punkt P der Fläche S. Dieser Fall lässt sich, wie weiter unten gezeigt ist, als Erweiterung eines Theorems der Optik auffassen. Setzt man das Verhältniss von M_1 zu N_1 aus der Gleichung (68) in die Gleichungen (12), so gehen dieselben über in:

$$\frac{1}{2}d\frac{M^2 + 2pMN + r^2N^2}{dp} - d\frac{pM + r^2N}{dp} = 0,$$

$$\frac{1}{2}d\frac{M^2 + 2pMN + r^2N^2}{dr} - d\frac{pM + r^2N}{dr} + rN = 0.$$

Diese Gleichungen lassen sich auch auf folgende Formen bringen:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}d\dfrac{M^2 + 2pM(N-1) + r^2(N-1)^2}{dp} = 0, \\ \frac{1}{2}d\dfrac{M^2 + 2pM(N-1) + r^2(N-1)^2}{dr} + r(N-1) = 0. \end{cases} \tag{70}$$

Bezeichnet R eine beliebige Function von r, so giebt die erste Gleichung (70) durch Integration:

$$M^2 + 2pM(N-1) + r^2(N-1)^2 = R^2. \tag{71}$$

Die zweite Gleichung (70) geht hierdurch über in:

$$RR' + r(N-1) = 0. \tag{72}$$

Aus den Gleichungen (71) und (72) folgt:

$$[M + p(N-1)]^2 = R^2 - \frac{r^2 - p^2}{r^2}(RR')^2,$$

oder auch:

$$[M + p(N-1)]^2 = R^2 - (\sin\varepsilon \cdot RR')^2, \tag{73}$$

wo ε der Winkel ist, welchen der Radiusvector OP mit der Normale zur Fläche S im Punkte P bildet. Ist ε_1 der Winkel, welchen die Verbindungslinie der Punkte P und P_1 mit der Normale zur Fläche S im Punkte P bildet, so besteht für $\cos\varepsilon_1$ die Gleichung:

$$\cos^2 \varepsilon_1 = \frac{[(x_1 - x)\cos\xi + (y_1 - y)\cos\eta + (z_1 - z)\cos\zeta]^2}{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2}.$$

Wegen der Gleichungen (5) ist nun

$$x_1 - x = M\cos\xi + (N-1)(x - x_0),$$
$$y_1 - y = M\cos\eta + (N-1)(y - y_0),$$
$$z_1 - z = M\cos\zeta + (N-1)(z - z_0).$$

Mit Hülfe dieser Gleichungen lässt sich der Ausdruck für $\cos^2 \varepsilon_1$ auf folgende Form bringen:

$$\cos^2 \varepsilon_1 = \frac{[M + p(N-1)]^2}{M^2 + 2pM(N-1) + r^2(N-1)^2}.$$

Mittels der Gleichungen (71) und (73) wird die vorstehende Gleichung einfacher

$$(\cos \varepsilon_1)^2 = 1 - (\sin \varepsilon \cdot R')^2.$$

Hieraus folgt:

$$\left(\frac{\sin \varepsilon_1}{\sin \varepsilon}\right)^2 = R'^2.$$

Diese Gleichung lässt folgende Interpretation zu. Man sehe den Punkt O als leuchtenden Punkt an, von dem aus Strahlen auf die Fläche S fallen. Nimmt man in jedem Punkte der Fläche S den Brechungsindex variabel, und zwar gleich einer Function der Distanz des Punktes der Fläche vom leuchtenden Punkte, so enthält das Vorhergehende eine Verallgemeinerung des Satzes von Malus.

Eine Fläche, welche zwei homogene Medien trennt, werde von einem Punkte O aus beleuchtet. In einem Punkte P der Fläche sei das Verhältniss des Sinus des Einfallswinkels zum Sinus des Brechungswinkels eine Function der Distanz OP. Die gebrochenen Strahlen sind dann die Normalen einer Fläche und ihrer Parallelflächen.

Die Gleichungen (6), (7), (68) und (71) geben:

$$R\cos\xi_1 = M\cos\xi + (N-1)(x - x_0),$$
$$R\cos\eta_1 = M\cos\eta + (N-1)(y - y_0), \quad (74)$$
$$R\cos\zeta_1 = M\cos\zeta + (N-1)(z - z_0).$$

Aus diesen Gleichungen und den Gleichungen (5) folgt:

$$p_1 R = M^2 + 2pMN + r^2N^2 - (pM + r^2N),$$
$$r_1^2 = M^2 + 2pMN + r^2N^2.$$

Die erste der vorstehenden Gleichungen werde mit 2 multiplicirt, darauf die zweite Gleichung subtrahirt. Es folgt so:

$$2p_1R - r_1^2 = M^2 + 2pM(N-1) + r^2(N-1)^2 - r^2,$$

d. i. nach (71):

$$2p_1R - r_1^2 = R^2 - r^2. \quad (75)$$

Da R eine beliebige Function von r ist, so kann man umgekehrt r als Function von R ansehn, und demnach setzen:

$$r^2 - R^2 = \Phi_1(R).$$

Die Gleichung (75) nimmt dann die Form:

$$r_1^2 - 2p_1 R = \Phi_1(R) \tag{76}$$

an. Durch Subtraction der Gleichungen (74) von den Gleichungen (5) erhält man:

$$x = x_1 - R\cos\xi_1,\quad y = y_1 - R\cos\eta_1,\quad z = z_1 - R\cos\zeta_1. \tag{77}$$

Durch diese Gleichungen ist die Fläche S analytisch definirt, welche einer gegebenen Fläche S_1 entspricht. Die Quantität R ist aus der Gleichung (76) zu bestimmen. Die Gleichungen (76) und (77) geben durch Vertauschung von x, y und z mit x_1, y_1 und z_1, also von ξ_1, η_1, ζ_1, p_1 und r_1 mit ξ, η, ζ, p und r die Formeln, welche dem Falle $N=1$ der Gleichung (69) entspricht. In der That, wenn $N=1$, so ist nach (67) $\mu = M$. Die Gleichungen (5) und (65) geben dann $x' = x_1$, $y' = y_1$, $z' = z_1$, d. h. die Normale zur Fläche S_1 im Punkte P_1 geht durch den Punkt P. Für $N = 1$ folgt aus (13) zur Bestimmung von M die partielle Differentialgleichung:

$$r\frac{dM}{dp} = M\frac{dM}{dr}.$$

Das vollständige Integral dieser Gleichung ist:

$$2pM + r^2 = \Phi(M), \tag{78}$$

wo $\Phi(M)$ eine beliebige Function von M bedeutet. Für $N = 1$ erhält man aus den Gleichungen (5):

$$x_1 = x + M\cos\xi,\quad y_1 = y + M\cos\eta,\quad z_1 = z + M\cos\zeta.$$

Diese Gleichungen in Verbindung mit der Gleichung (78) entsprechenden Gleichungen (76) und (77). Der Fall $N = 1$ kommt also auf die Bestimmung der Fläche S aus der Fläche S_1 hinaus, wenn die Normale eines Punktes P_1 der Fläche S_1 durch den entsprechenden Punkt P der Fläche S geht.

Die Gleichung (79) giebt noch die Lösung:

$$M_1 M + N_1(2pM + r^2 N) = 0. \tag{79}$$

Da diese Gleichung in der folgenden Nummer genauer behandelt ist, so kann eine weitere Discussion hier unterbleiben. Wie sich in V ergeben wird, drückt die Gleichung (79) folgende geometrische Eigenschaft der durch sie charakterisirten Transformation aus: *Die Radienvectoren der Punkte P und P_1 bilden mit den entsprechenden Normalen der Flächen S und S_1 gleiche Winkel, oder die Summe dieser Winkel ist gleich zwei Rechten.*

V.

Die in I genannten Transformationen, nämlich: *die reciproke Polarfläche, die Fusspunktfläche, die Transformation durch reciproke Radienvectoren* und die Combinationen dieser Transformationen, haben sämmtlich die Eigenschaft gemein, dass der Winkel, welchen der Radiusvector OP mit der Normalen im Punkte P zur Fläche S bildet, gleich dem Winkel ist, welchen der Radiusvector OP_1 mit der Normalen im Punkte P_1 zur Fläche S_1 einschliesst. Diese Eigenschaft hat auch die von Catalan betrachtete Transformation. Nach den in 1), 2) und 4) gebrauchten Bezeichnungen wird die bemerkte Eigenschaft durch die Gleichung:

$$\frac{p}{r} = \frac{p_1}{r_1} \tag{80}$$

ausgedrückt. Mittels der Gleichungen (5) und (6) soll folgende Transformation bestimmt werden:

Die correspondirenden Punkte P und P_1 zweier Flächen S und S_1 entsprechen sich in Beziehung auf einen festen Punkt O auf folgende Art:

Die Radienvectoren OP und OP_1 liegen mit den Normalen der Flächen S und S_1 in einer Ebene, die Winkel, welche die Radienvectoren mit den entsprechenden Normalen bilden, sollen einander gleich, oder ihre Summe gleich zwei Rechten sein.

Analog der Gleichung (80) ergiebt sich die Doppelgleichung:

$$\frac{p}{r} = \pm \frac{p_1}{r_1}$$

oder quadrirt:

$$\left(\frac{p}{r}\right)^2 = \left(\frac{p_1}{r_1}\right)^2. \tag{81}$$

Die Gleichungen (5) und (6) geben:

$$r_1^2 = M^2 + 2pMN + r^2N^2, \qquad \mathsf{H}p_1 = M_1(M + pN) + N_1(pM + r^2N),$$
$$\mathsf{H}^2 = M_1^2 + 2pM_1N_1 + r^2N_1^2.$$

Hierdurch nimmt die Gleichung (81) folgende Form an:

$$\frac{p^2}{r^2} = \frac{[M_1(M + pN) + N_1(pM + r^2N)]^2}{(M^2 + 2pMN + r^2N^2)(M_1^2 + 2pM_1N_1 + r^2N_1^2)}.$$

Nach Wegschaffung der Nenner findet man leicht, dass die Gleichung durch $r^2 - p^2$ theilbar ist. Mit Weglassung dieses Factors folgt:

$$M_1^2(M^2 + 2pMN) + 2M_1N_1(pM^2 + 2p^2MN + r^2MN + pr^2N^2)$$
$$+ N_1^2r^2(N^2r^2 + 2pMN) = 0$$

oder:

$$[M_1M + N_1(2pM + r^2N)]\,[M_1(M + 2pN) + N_1Nr^2].$$

Je nachdem der eine oder andere Factor annullirt wird, ergeben sich die beiden Annahmen:

$$M_1 M + N_1(2pM + r^2 N) = 0, \tag{82}$$

$$M_1(M + 2pN) + N_1 N r^2 = 0. \tag{83}$$

Diesen allgemeinen Gleichungen möge eine kurze Untersuchung der folgenden besonderen Fälle vorausgehn.

(A) $M_1 = 0,\ 2pM + r^2 N = 0,$ (B) $M_1 = 0,\ N = 0,$

(C) $N_1 = 0,\ M = 0,$ (D) $N_1 = 0,\ M + 2pN = 0.$

Für $M_1 = 0$ reduciren sich die Gleichungen (12) auf:

$$p\frac{dM}{dp} + r^2\frac{dN}{dp} + M = 0, \quad p\frac{dM}{dr} + r^2\frac{dN}{dr} + rN = 0,$$

oder:

$$d\frac{pM + r^2 N}{dp} = 0, \quad d\frac{pM + r^2 N}{dr} = rN.$$

Ist $\psi(r)$ eine beliebige Function von r, so erhält man leicht:

$$pM + r^2 N = \psi(r), \quad rN = \psi'(r). \tag{84}$$

Die Gleichungen (84) geben mit der in (A) enthaltenen Bedingung $2pM + r^2 N = 0$ zur Bestimmung von $\psi(r)$ die Gleichung:

$$\frac{\psi'(r)}{\psi(r)} = \frac{2}{r}.$$

Bedeutet k eine Constante, so ist $\psi(r) = kr^2$. Aus (84) ist dann weiter $N = 2k$ und $pM + kr^2 = 0$. Der Annahme (A) entsprechen nach (5) folgende Gleichungen:

$$x_1 - x_0 = k\left[2(x - x_0) - \frac{r^2}{p}\cos\xi\right], \quad y_1 - y_0 = k\left[2(y - y_0) - \frac{r^2}{p}\cos\eta\right],$$

$$z_1 - z_0 = k\left[2(z - z_0) - \frac{r^2}{p}\cos\zeta\right].$$

Für $k = 1$ entsprechen diese Gleichungen der *Umkehrung der Fusspunktfläche.*

Fügt man zu den Gleichungen (84) die in der Annahme (B) vorkommende Gleichung $N = 0$ hinzu, so ist $\psi(r) = k$, wo k eine Constante bedeutet, ferner $pM = k$. Die Gleichungen (5) geben dann:

$$x_1 - x_0 = \frac{k\cos\xi}{p}, \quad y_1 - y_0 = \frac{k\cos\eta}{p}, \quad z_1 - z_0 = \frac{k\cos\zeta}{p}.$$

Diesen Gleichungen entspricht die *reciproke Polarfläche* in Beziehung auf eine Kugelfläche mit dem Mittelpunkt O und dem Radius k.

Für $N_1 = 0$ reduciren sich die Gleichungen (12) auf:

$$\frac{dM}{dp} + p\frac{dN}{dp} = 0, \quad \frac{dM}{dr} + p\frac{dN}{dr} = 0,$$

oder:

$$d\,\frac{M+pN}{dp} = N, \quad d\,\frac{M+pN}{dr} = 0.$$

Ist $\varphi(p)$ eine Function von p, so geben die vorstehenden Gleichungen:

(85) $$M + pN = \varphi(p), \quad N = \varphi'(p).$$

Die Annahme (C) giebt $M = 0$, dann ist in (85) $p\varphi'(p) = \varphi(p)$, also $\varphi(p) = kp$ und $N = k$, wo k eine Constante bedeutet. Die Gleichungen (5) geben, $M = 0$, $N = k$ gesetzt:

$$\frac{x_1 - x_0}{x - x_0} = \frac{y_1 - y_0}{y - y_0} = \frac{z_1 - z_0}{z - z_0} = k.$$

Die beiden Radienvectoren OP_1 und OP haben dieselbe Richtung, es ist $OP_1 = k \cdot OP$.

Für die Annahme (D) ist $M + 2pN = 0$. Diese Gleichung mit den Gleichungen (85) giebt:

$$p\varphi'(p) + \varphi(p) = 0,$$

also:

$$\varphi(p) = \frac{k}{p}, \quad M = \frac{2k}{p}, \quad N = -\frac{k}{p^2}.$$

Diesen Werthen von M und N entspricht nach (5) folgendes System:

$$x_1 - x_0 = k\,\frac{2p\cos\xi - (x - x_0)}{p^2}, \quad y_1 - y_0 = k\,\frac{2p\cos\eta - (y - y_0)}{p^2},$$

$$z_1 - z_0 = k\,\frac{2p\cos\zeta - (z - z_0)}{p^2}.$$

Diesen Gleichungen entspricht die *reciproke Polarfläche der Fusspunktfläche.*

Durch Elimination von M_1 und N_1 zwischen der Gleichung (82) und jeder der Gleichungen (12) folgt:

(86) $$(pM + r^2N)\left(\frac{dM}{dp} + p\,\frac{dN}{dp}\right) = (r^2 - p^2)\,M\,\frac{dN}{dp} + M^2,$$

(87) $$(pM + r^2N)\left(\frac{dM}{dr} + p\,\frac{dN}{dr}\right) = (r^2 - p^2)\,M\,\frac{dN}{dr} + MNr.$$

Die Gleichung (86) multiplicire man mit $\frac{dM}{dr} + p\,\frac{dN}{dr}$, die Gleichung (87) mit $\frac{dM}{dp} + p\,\frac{dN}{dp}$ und bilde die Differenz der erhaltenen Producte. Dann folgt:

(88) $$(r^2 - p^2)\left(\frac{dM}{dp}\,\frac{dN}{dr} - \frac{dM}{dr}\,\frac{dN}{dp}\right) = M\left(\frac{dM}{dr} + p\,\frac{dN}{dr}\right) - rN\left(\frac{dM}{dp} + p\,\frac{dN}{dp}\right).$$

Die Gleichung (86) werde nach r, die Gleichung (87) nach p differentiirt, aus der Differenz der beiden erhaltenen Gleichungen leitet man folgendes Resultat ab:

$$2(r^2-p^2)\left(\frac{dM}{dp}\frac{dN}{dr}-\frac{dM}{dr}\frac{dN}{dp}\right)+3rN\frac{dM}{dp}-3M\frac{dM}{dr}$$
$$+(2prN-rM)\frac{dN}{dp}-(4pM+r^2N)\frac{dN}{dr}=0.$$

Von dieser Gleichung ziehe man die mit 2 multiplicirte Gleichung (88) ab. Dann ist einfacher:

$$rN\frac{dM}{dp}-M\frac{dM}{dr}=rM\frac{dN}{dp}+(2pM+r^2N)\frac{dN}{dr}.$$

Durch Elimination von $\frac{dM}{dp}$ und $\frac{dM}{dr}$ zwischen dieser Gleichung, den Gleichungen (86) und (87) folgt:

$$p\frac{dN}{dp}+r\frac{dN}{dr}=0. \tag{89}$$

Eliminirt man $\frac{dN}{dp}$ und $\frac{dN}{dr}$ zwischen den Gleichungen (86), (87) und (89), so folgt zur Bestimmung von M:

$$p\frac{dM}{dp}+r\frac{dM}{dr}=M. \tag{90}$$

Setzt man zur Vereinfachung:

$$\frac{p}{r}=q, \tag{91}$$

so geben die Gleichungen (89) und (90)

$$N=\psi(q),\quad M=p\varphi(q). \tag{92}$$

Setzt man einfach ψ und φ statt $\psi(q)$ und $\varphi(q)$, so giebt die Substitution der Werthe von M und N in die Gleichung (88) zwischen den Functionen φ und ψ folgende Differentialgleichung:

$$-(1-q^2)q\varphi\psi'+\psi(\varphi+q\varphi'+q\psi')+q^3\varphi(\varphi'+\psi')=0. \tag{93}$$

Die Gleichung (82) ist identisch mit der Gleichung (79), die Gleichung (82) geometrisch interpretirt drückt aus, dass:

die Punkte O, P, P_1 mit dem Schnittpunkt der Normalen zu den Flächen S und S_1 in P und P_1 auf dem Umfange eines Kreises liegen.

Das Verhältniss von M_1 zu N_1 aus der Gleichung (83) in jede der Gleichungen (12) gesetzt, giebt:

$$(M+pN)\left(p\frac{dM}{dp}+r^2\frac{dN}{dp}\right)=(r^2-p^2)N\frac{dM}{dp}-M(M+2pN), \tag{94}$$

$$(M+pN)\left(p\frac{dM}{dr}+r^2\frac{dN}{dr}\right)=(r^2-p^2)N\frac{dN}{dr}-rN(M+2pN). \tag{95}$$

Durch Elimination des Factors $M+pN$ folgt:

$$(96) \qquad (r^2 - p^2) N r^2 \left(\frac{dM}{dp} \frac{dN}{dr} - \frac{dM}{dr} \frac{dN}{dp} \right)$$

$$= (M + 2pN) \left[M \left(p \frac{dM}{dr} + r^2 \frac{dN}{dr} \right) - Nr \left(p \frac{dM}{dp} + r^2 \frac{dN}{dp} \right) \right].$$

Die Gleichung (94) werde nach r, die Gleichung (95) nach p differentiirt, aus der Differenz der erhaltenen Resultate erhält man:

$$2(r^2 - p^2) \left(\frac{dM}{dp} \frac{dN}{dr} - \frac{dM}{dr} \frac{dN}{dp} \right) = (M - 2pN) \frac{dM}{dr} + (2pM - Nr^2) \frac{dN}{dr}$$

$$- 3rN \frac{dM}{dp} + (rM - 2prN) \frac{dN}{dp} - 2rN^2 = 0.$$

Zwischen dieser Gleichung und der Gleichung (96) werde $\frac{dM}{dp} \frac{dN}{dr} - \frac{dM}{dr} \frac{dN}{dp}$ eliminirt, es ergiebt sich dann folgende Gleichung:

$$[2p(M^2 + 2pMN + r^2N^2) - r^2MN] \frac{dM}{dr}$$

$$+ rN[3r^2N - 2p(M + 2pN)] \frac{dM}{dp}$$

$$+ r^2[2M^2 + 2pMN + r^2N^2] \frac{dN}{dr}$$

$$- r^3N[3M + 2pN] \frac{dN}{dp} + 2r^3N^3 = 0.$$

Die Einsetzung der Werthe von $\frac{dN}{dp}$ und $\frac{dN}{dr}$ aus den Gleichungen (94) und (95) in die vorstehende Gleichung giebt für M die einfache partielle Differentialgleichung:

$$(97) \qquad p \frac{dM}{dp} + r \frac{dM}{dr} + M = 0.$$

Um zur Bestimmung von N zu einer Gleichung zu gelangen, eliminire man $\frac{dM}{dp}$ und $\frac{dM}{dr}$ zwischen den Gleichungen (94), (95) und (97). Es folgt so:

$$(98) \qquad p \frac{dN}{dp} + r \frac{dN}{dr} + 2N = 0.$$

Die Herstellung der Gleichung (97) ist ziemlich weitläufig und mühsam, man hat jeden einzelnen Term durch den gemeinsamen Factor $Nr(M^2 + 2pMN + r^2N^2)$ zu dividiren. Ist q wieder durch die Gleichung (91) definirt, so erhält man durch Integration der Gleichungen (97) und (98):

$$(99) \qquad M = \frac{\varphi(q)}{r}, \quad N = \frac{\psi(q)}{r^2}, \quad q = \frac{p}{r}.$$

Diese Werthe von M und N in eine der Gleichungen (94) oder (95) gesetzt, geben zwischen den Functionen φ und ψ die Differentialgleichung:

$$(100)\quad (q\varphi - 2q^2\psi - \psi)\varphi' + (\varphi + q\psi)\psi' + \varphi(\varphi + 2q\psi) = 0.$$

Die Gleichungen (92), (93), (99) und (100) geben zu einer Menge Detailuntersuchungen Veranlassung, deren Ausführungen keine Schwierigkeiten darbieten, und desshalb hier nicht weiter discutirt werden sollen.

VI.

Als eine weitere Anwendung der in II aufgestellten Formeln, soll eine Aufgabe behandelt werden, welche von den bisher geführten Untersuchungen wesentlich verschieden ist und, ungeachtet einer anfänglich scheinbaren Complication der Rechnung, sich ziemlich einfach ausführen lässt. Die hier zu betrachtende Transformation ist folgende:

Die correspondirenden Puncte P und P_1 zweier Flächen S und S_1 sollen sich in Beziehung auf einen festen Punkt O auf folgende Art entsprechen:

Die Ebene durch die Punkte O, P und P_1 enthalte die Normalen zu den Flächen S und S_1 in den respectiven Punkten P und P_1.

Problem: Wann entsprechen allgemein den Krümmungslinien der Fläche S Curven derselben Art auf der Fläche S_1?

Die Gleichung (8), welche für eine beliebige Variabele gilt, giebt für die Variabelen p und r die beiden Gleichungen:

$$(101)\quad \begin{aligned} \frac{dx}{dp}\cos\xi + \frac{dy}{dp}\cos\eta + \frac{dz}{dp}\cos\zeta &= 0, \\ \frac{dx}{dr}\cos\xi + \frac{dy}{dr}\cos\eta + \frac{dz}{dr}\cos\zeta &= 0. \end{aligned}$$

Mit Rücksicht hierauf geben die Gleichungen (1) und (2) nach p und r differentiirt:

$$(102)\quad \begin{aligned} (x-x_0)\frac{d\cos\xi}{dp} + (y-y_0)\frac{d\cos\eta}{dp} + (z-z_0)\frac{d\cos\zeta}{dp} &= 1, \\ (x-x_0)\frac{d\cos\xi}{dr} + (y-y_0)\frac{d\cos\eta}{dr} + (z-z_0)\frac{d\cos\zeta}{dr} &= 0, \\ (x-x_0)\frac{dx}{dp} + (y-y_0)\frac{dy}{dp} + (z-z_0)\frac{dz}{dp} &= 0, \\ (x-x_0)\frac{dx}{dr} + (y-y_0)\frac{dy}{dr} + (z-z_0)\frac{dz}{dr} &= r. \end{aligned}$$

Die Differentialgleichungen der Krümmungslinien der Flächen S und S_1 sind in folgenden Gleichungen enthalten:

$$(103)\quad \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ d\cos\xi & d\cos\eta & d\cos\zeta \\ \cos\xi & \cos\eta & \cos\zeta \end{vmatrix} = 0, \qquad (104)\quad \begin{vmatrix} dx_1 & dy_1 & dz_1 \\ d\cos\xi_1 & d\cos\eta_1 & d\cos\zeta_1 \\ \cos\xi_1 & \cos\eta_1 & \cos\zeta_1 \end{vmatrix} = 0.$$

In die Gleichung (104) sind aus (5) und (6) die Werthe von x_1, $\cos\xi_1$ etc. einzusetzen.

Es werde zuerst der Fall $N_1 = 0$ betrachtet. Die Gleichungen (6) geben dann

$$\cos\xi_1 = \cos\xi, \quad \cos\eta_1 = \cos\eta, \quad \cos\zeta_1 = \cos\zeta.$$

In Folge dieser Gleichungen und der Gleichungen (5) nimmt die Gleichung (104) folgende Form an, wenn gleichzeitig die Gleichung (103) stattfindet:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ d\cos\xi & d\cos\eta & d\cos\zeta \\ \cos\xi & \cos\eta & \cos\zeta \end{vmatrix} dN = 0.$$

Hieraus folgt allgemein $dN = 0$, also N constant. Für diesen Werth von N und $N_1 = 0$ zeigen die Gleichungen (12), dass M ebenfalls constant ist. Im Folgenden soll N_1 von Null verschieden angenommen werden.

Um die Gleichung (104) leichter behandeln zu können, setze man in den Gleichungen (6)

$$\frac{M_1}{N_1} = t. \tag{105}$$

Dann folgt:

$$\begin{gathered} \mathsf{H}_1\cos\xi_1 = t\cos\xi + x - x_0, \quad \mathsf{H}_1\cos\eta_1 = t\cos\eta + y - y_0, \\ \mathsf{H}_1\cos\zeta_1 = t\cos\zeta + z - z_0, \end{gathered} \tag{106}$$

wo:

$$\mathsf{H}_1^2 = t^2 + 2pt + r^2. \tag{107}$$

An Stelle der Gleichungen (12) treten nach (105) die folgenden:

$$\begin{aligned} (p+t)\frac{dM}{dp} + (pt + r^2)\frac{dN}{dp} + M = 0, \\ (p+t)\frac{dM}{dr} + (pt + r^2)\frac{dN}{dr} + rN = 0. \end{aligned} \tag{108}$$

Die Differentialgleichung (103) lässt sich auf eine einfache Form bringen durch Einführung der folgenden Bezeichnungen:

$$\left\{\begin{aligned} &\begin{vmatrix} \frac{dx}{dp} & \frac{dy}{dp} & \frac{dz}{dp} \\ x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ \cos\xi & \cos\eta & \cos\zeta \end{vmatrix} = A, \quad \begin{vmatrix} \frac{dx}{dr} & \frac{dy}{dr} & \frac{dz}{dr} \\ x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ \cos\xi & \cos\eta & \cos\zeta \end{vmatrix} = B, \\ &\begin{vmatrix} \frac{d\cos\xi}{dp} & \frac{d\cos\eta}{dp} & \frac{d\cos\zeta}{dp} \\ x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ \cos\xi & \cos\eta & \cos\zeta \end{vmatrix} = C, \quad \begin{vmatrix} \frac{d\cos\xi}{dr} & \frac{d\cos\eta}{dr} & \frac{d\cos\zeta}{dr} \\ x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ \cos\xi & \cos\eta & \cos\zeta \end{vmatrix} = D, \end{aligned}\right. \tag{109}$$

Zwischen den vorstehenden Determinanten leitet man mit Hülfe der Gleichungen (101) und (102) folgende Relation ab:

$$AD - BC = r.$$

Zur Herstellung dieser Gleichung ist noch die folgende zu beachten, welche durch Differentiation der ersten Gleichung (101) nach r und der zweiten nach p folgt:

$$\frac{dx}{dp}\frac{d\cos\xi}{dr} + \frac{dy}{dp}\frac{d\cos\eta}{dr} + \frac{dz}{dp}\frac{d\cos\zeta}{dr}$$
$$= \frac{dx}{dr}\frac{d\cos\xi}{dp} + \frac{dy}{dr}\frac{d\cos\eta}{dp} + \frac{dz}{dr}\frac{d\cos\zeta}{dp}.$$

Man multiplicire die Gleichung (103) mit der folgenden:

$$(110)\quad \begin{vmatrix} \cos\xi, & x - x_0, & (y - y_0)\cos\zeta - (z - z_0)\cos\eta \\ \cos\eta, & y - y_0, & (z - z_0)\cos\xi - (x - x_0)\cos\zeta \\ \cos\zeta, & z - z_0, & (x - x_0)\cos\eta - (y - y_0)\cos\xi \end{vmatrix} = p^2 - r^2.$$

Zur Erleichterung des Druckes sind in der Determinante die Elemente so gestellt um möglichst wenig Raum in Anspruch zu nehmen. Bei Ausführung der Multiplication sind die Verticalreihen mit den Horizontalreihen zu vertauschen.

Mit Rücksicht auf die Gleichungen (101), (102) und die unter (109) aufgestellten Bezeichnungen folgt:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ rdr & dp & p \\ Adp + Bdr & Cdp + Ddr & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Setzt man also:

$$(111)\qquad \Sigma = (Cdp + Ddr)\,rdr - (Adp + Bdr)dp,$$

so ist $\Sigma = 0$ die Differentialgleichung der Krümmungslinien der Fläche S.

Um die Gleichung (104) auf eine möglichst einfache Form zu bringen, eliminire man $x - x_0$, $y - y_0$ und $z - z_0$ zwischen den Gleichungen (5) und (106). Nimmt man zur Abkürzung:

$$(112)\qquad tN - M = Q,$$

so erhält man:

$$x_1 - x_0 = -Q\cos\xi + NH_1\cos\xi_1,$$
$$y_1 - y_0 = -Q\cos\eta + NH_1\cos\eta_1,$$
$$z_1 - z_0 = -Q\cos\zeta + NH_1\cos\zeta_1.$$

Diese Werthe von x_1, y_1, z_1 setze man in die Gleichung (104), darauf

für $\cos\xi_1$, $\cos\eta_1$, $\cos\zeta_1$ ihre Werthe aus (106). Werden dann in der Determinante der Gleichung (104) der Einfachheit halber nur die Elemente der ersten Verticalreihe angemerkt, so nimmt die bemerkte Gleichung folgende Form an:

$$\begin{vmatrix} dQ\cdot\cos\xi + Qd\cos\xi & \cdots \\ dt\cdot\cos\xi + td\cos\xi + dx & \cdots \\ t\cos\xi + x - x_0 & \cdots \end{vmatrix} = 0.$$

Diese Gleichung multiplicire man mit der Gleichung (110). Unter Zuziehung der Gleichungen (101), (102) und (109) folgt dann:

$$\begin{vmatrix} dQ & dt & t+p \\ pdQ + Qdp & pdt + tdp + rdr & tp + r^2 \\ Q(Cdp + Ddr) & t(Cdp + Ddr) + Adp + Bdr & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Die vorstehende Gleichung entwickelt, giebt, mit Rücksicht auf die Bedeutung von Σ aus (111):

(113) $$(t+p)Q\Sigma + (r^2 - p^2)\Sigma_1 = 0,$$

wo:

(114) $$\Sigma_1 = (Cdp + Ddr)(tdQ - Qdt) + (Adp + Bdr)dQ.$$

Es sollen die Gleichungen (103) und (104) zwischen p und r dieselbe Differentialgleichung geben. Wegen $\Sigma = 0$ reducirt sich die Gleichung (113) auf $\Sigma_1 = 0$. Die beiden Gleichungen $\Sigma = 0$ und $\Sigma_1 = 0$ geben nach (111) und (114):

$$\frac{Adp + Bdr}{Cdp + Ddr} = \frac{rdr}{dp}, \qquad \frac{Adp + Bdr}{Cdp + Ddr} = \frac{Qdt - tdQ}{dQ}.$$

Diese Gleichungen geben:

$$\frac{rdr}{dp} = \frac{Qdt - tdQ}{dQ}$$

d. i.

$$\frac{rdr}{dp} = \frac{\left(Q\frac{dt}{dr} - t\frac{dQ}{dr}\right)dr + \left(Q\frac{dt}{dp} - t\frac{dQ}{dp}\right)dp}{\frac{dQ}{dr}dr + \frac{dQ}{dp}dp}.$$

Soll die Transformation unabhängig von den besonderen Eigenschaften der Fläche S sein, so giebt die vorstehende Gleichung:

$$Q\frac{dt}{dp} - t\frac{dQ}{dp} = 0, \quad \frac{dQ}{dr} = 0, \quad r\frac{dQ}{dp} = Q\frac{dt}{dr} - t\frac{dQ}{dr}$$

oder

$$d\frac{\frac{t}{Q}}{dp} = 0, \quad \frac{dQ}{dr} = 0, \quad r\frac{dQ}{dp} = Q\frac{dt}{dr}.$$

Ist $\varphi(p)$ nur von p, $\psi(r)$ nur von r abhängig, so geben diese Gleichungen:

$$Q = \varphi(p), \quad t = \varphi(p)\psi(r) \tag{115}$$

und:

$$\frac{\varphi'(p)}{\varphi(p)^2} = \frac{\psi'(r)}{r}.$$

Da zwischen p und r keine Relation bestehen kann, so zerfällt die letzte Gleichung in:

$$\frac{\varphi'(p)}{\varphi(p)^2} = -2\alpha, \quad \frac{\psi'(r)}{r} = -2\alpha,$$

wo α eine Constante bedeutet. Sind β und γ Constanten, so folgt weiter:

$$\frac{1}{\varphi(p)} = 2(\beta + \alpha p), \quad \psi(r) = \gamma - \alpha r^2. \tag{116}$$

Die in (115) aufgestellten Werthe von Q und t werden hierdurch:

$$Q = \frac{1}{2(\beta + \alpha p)}, \quad t = \frac{\gamma - \alpha r^2}{2(\beta + \alpha p)}. \tag{117}$$

In die Gleichungen (108) setze man nach (112) $M = tN - Q$. Man erhält dann, wegen $Q = \varphi(p)$:

$$(t^2 + 2pt + r^2)\frac{dN}{dp} + \left[(t + p)\frac{dt}{dp} + t\right]N = (p + t)\frac{dQ}{dp} + Q$$
$$= (p + t)\varphi'(p) + \varphi(p),$$
$$(t^2 + 2pt + r^2)\frac{dN}{dr} + \left[(t + p)\frac{dt}{dr} + t\right]N = 0.$$

Diese Gleichungen lassen sich auf folgende Art schreiben:

$$d\frac{N\sqrt{t^2 + 2pt + r^2}}{dp} = \frac{(p + t)\varphi'(p) + \varphi(p)}{\sqrt{t^2 + 2pt + r^2}}, \tag{118}$$

$$d\frac{N\sqrt{t^2 + 2pt + r^2}}{dr} = 0.$$

Die Elimination von N zwischen den vorstehenden Gleichungen führt auf:

$$\frac{dt}{dr}\cdot[(r^2 - p^2)\varphi'(p) - (t + p)\varphi(p)] = [(t + p)\varphi'(p) + \varphi(p)]r.$$

Nach (116) und (117) reducirt sich diese Gleichung auf:

$$\beta^2 = \alpha\gamma.$$

Man ersetze die vorstehende Gleichung durch $\beta = \alpha k$, $\gamma = \alpha k^2$, so dass also aus (117):

$$Q = \frac{1}{2\alpha(p + k)} = \varphi(p), \quad t = \frac{k^2 - r^2}{2(p + k)}. \tag{119}$$

Die Substitution der Werthe von $\varphi(p)$ und t in die Gleichungen 18) giebt:

$$d\frac{N(r^2+2pk+k^2)}{\frac{p+k}{dp}} = \frac{1}{\alpha(p+k)^2}, \qquad d\frac{N(r^2+2pk+k^2)}{\frac{p+k}{dr}} = 0.$$

urch Integration folgt:

20) $$N = \frac{g-2mp}{r^2+2pk+k^2}.$$

s bedeutet m eine beliebige Constante, an Stelle von α ist eine neue onstante g mittels der Gleichung:

$$\frac{1}{\alpha} = -(g+2mk)$$

etreten. Die Gleichungen (119) werden hierdurch:

21) $$Q = -\frac{g+2mk}{2(p+k)}, \qquad t = \frac{k^2-r^2}{2(p+k)}.$$

Aus den Gleichungen (120) und (121) ergiebt sich folgender 'erth für M:

$$M = \frac{gk+(r^2+k^2)m}{r^2+2pk+k^2},$$

ler:

22) $$M = m + \frac{k(g-2mp)}{r^2+2pk+k^2}.$$

ie Gleichungen (107) und (121) geben:

23) $$H_1 = \frac{r^2+2pk+k^2}{2(p+k)}.$$

it Hülfe der Gleichungen (120) und (122) erhält man aus den Gleiungen (5) für x_1, y_1 und z_1 folgende Werthe:

24)
$$\begin{cases} x_1 - x_0 = m\cos\xi + \frac{(g-2mp)(x-x_0+k\cos\xi)}{r^2+2pk+k^2}, \\ y_1 - y_0 = m\cos\eta + \frac{(g-2mp)(y-y_0+k\cos\eta)}{r^2+2pk+k^2}, \\ z_1 - z_0 = m\cos\zeta + \frac{(g-2mp)(z-z_0+k\cos\zeta)}{r^2+2pk+k^2}. \end{cases}$$

ie Gleichungen (106) und (124) geben:

25)
$$\begin{cases} \cos\xi_1 = -\cos\xi + \frac{2(p+k)(x-x_0+k\cos\xi)}{r^2+2pk+k^2}, \\ \cos\eta_1 = -\cos\eta + \frac{2(p+k)(y-y_0+k\cos\eta)}{r^2+2pk+k^2}, \\ \cos\zeta_1 = -\cos\zeta + \frac{2(p+k)(z-z_0+k\cos\zeta)}{r^2+2pk+k^2}. \end{cases}$$

etzt man zur Abkürzung $g+2mk = k_1$, so geben die Gleichungen 24) und (125):

$$(126)\qquad \begin{cases} x_1 - x_0 + m\cos\xi_1 = \dfrac{k_1(x - x_0 + k\cos\xi)}{r^2 + 2pk + k^2}, \\ y_1 - y_0 + m\cos\eta_1 = \dfrac{k_1(y - y_0 + k\cos\eta)}{r^2 + 2pk + k^2}, \\ z_1 - z_0 + m\cos\zeta_1 = \dfrac{k_1(z - z_0 + k\cos\zeta)}{r^2 + 2pk + k^2}. \end{cases}$$

Da nach den in (1) gewählten Bezeichnungen:

$(x-x_0+k\cos\xi)^2+(y-y_0+k\cos\eta)^2+(z-z_0+k\cos\zeta)^2=r^2+2pk+k^2$,

so geben die Gleichungen (126) unmittelbar folgenden Satz:

Die correspondirenden Punkte P und P_1 zweier Flächen S und S_1 sollen sich in Beziehung auf einen festen Punkt O auf folgende Art entsprechen:

Die Ebene durch die Punkte O, P und P_1 enthalte die Normalen zu den Flächen S und S_1 in den respectiven Punkten P und P_1.

Entsprechen den Krümmungslinien der Fläche S auf der Fläche S_1 ebenfalls Krümmungslinien, so ist eine Parallelfläche der Fläche S_1 die transformirte Fläche mittels reciproker Radienvectoren einer Parallelfläche der Fläche S in Beziehung auf den Punkt O.

Hannover, 2. October 1882.

Ueber eine Configuration $(3, 3)_{10}$ und unicursale Curven 4. Ordnung.

Von

S. Kantor in Prag.

(Auszug aus einem Schreiben an Herrn A. Brill in München.)

Im Hinblicke auf die neuliche Zusendung meiner Abhandlungen über das Problem der Configurationen und nach wiederholter Lectüre Ihrer mir freundlichst übersandten Note werde ich zu der folgenden Mittheilung, die Sie mir erlauben mögen, veranlasst.

1. Den von Ihnen in den Math. Ann. Bd. XX, pag. 531 „Ueber das Polvierseit" gegebenen Satz kann ich mit Hülfe gewisser allgemeiner Untersuchungen, welche ich in der Abhandlung: „Ueber die allgemeinsten linearen Systeme linearer Transformationen bei Coincidenz gleichartiger Träger und successiver Anwendung der Transformation"*) mitgetheilt habe, beweisen und zur Herleitung einiger neuer Resultate benützen.

Bereits bei einer früheren Gelegenheit**) konnte ich die Entstehung der Configuration $(3, 3)_{10}$ aus dem Polvierseite und einem conjugirten Vierecke besprechen und anderwärts***) habe ich angegeben, wie man ein Viereck auf sechserlei Arten einem Vierseite umschreiben kann, wodurch sechs der 10 damals aufgefundenen Configurationen $(3, 3)_{10}$ entstehen. Bei der in Rede stehenden $(3, 3)_{10}$ geschieht das Umschreiben derart, dass jedesmal drei convergente Strahlen durch drei allineirte Punkte gehen und dass gegenüberliegende Seiten mit zwei Gegenecken incident sind. Es ist in der zweiten citirten Abhandlung auch erwähnt, dass man die $(3, 3)_{10}$ auf fünferlei Art so zusammensetzen kann, oder dass sich fünf vollständige Vierseite und fünf vollständige Vierecke in dieser $(3, 3)_{10}$ auffinden lassen. Diese fünf Vierseite und Vierecke sind im Folgenden von Bedeutung.

*) Denkschriften der kais. Academie der Wiss. zu Wien, Juni 1882. Cf. Math. Ann. Bd. XX, p. 297: „Bemerkung etc."

**) „Ueber eine Gattung von Configurationen in der Ebene und im Raume," Wiener Sitzungsber. Oct. 1879, II. Abth.

***) „Die Configurationen $(3, 3)_{10}$". Wiener Sitzungsber. Dec. 1881, II. Abth.

2. Sind nun drei Paare sich entsprechender Punkte aa', bb', cc' einer linearen Transformation in der Ebene gegeben, so dass aa', bb', cc' gegen s convergiren, so werde das durch sie bestimmte Netz von linearen Transformationen betrachtet. Erst ein weiteres Punktepaar individualisirt eine lineare Transformation. Jede dieser linearen Transformationen besitzt drei Doppelpunkte und so entstehen ∞^2 Doppelpunktstripel in der Ebene. Es gilt nun der Satz (cf. die cit. Denkschriftenarbeit p. 301):

Bewegt sich der einem festen Punkte p entsprechende Punkt p' in einer Geraden, beschreibt also die lineare Transformation ein Büschel, so beschreibt das Doppelpunktstripel eine Curve 3. Ordnung L_3 durch $a\,b\,c\,\varphi\,\psi\,\chi$, wo $\varphi = (b\,c,\ b'\,c')$, $\psi = (c\,a,\ c'\,a')$, $\chi = (a\,b,\ a'\,b')$. *Die Jacobi'sche Curve des Netzes dieser L_3 besteht aus der Geraden $\varphi\psi\chi$ und aus dem Kegelschnitte, bezüglich dessen die Configuration $a\,b\,c\,a'\,b'\,c'\,\varphi\psi\chi$ sich selbst polar ist.*

Die Doppelpunktstripel selbst sind bezüglich des Kegelschnittes conjugirte Dreiecke, welche auch die Bedingung erfüllen müssen, dass sie mit den sechs Eckpunkten des vollständigen Vierseites $a\,b\,c\,\varphi\,\psi\,\chi$ die Basis eines Curvenbüschels 3. Ordnung bilden. Durch Umkehrung der Transformation sieht man, dass jedes solche Tripel auch mit $a'\,b'\,c'\,\varphi\,\psi\,\chi$ eine solche Basis bildet. Geht man dann von einer anderen Seite als $\varphi\,\psi\,\chi$ des letzteren Vierseites aus, so findet man schliesslich:

*Die sämmtlichen Doppelpunktstripel des Netzes sind conjugirte Dreiecke bezüglich des Kegelschnittes Γ und bilden mit den sechs Eckpunkten irgend eines der fünf in der Configuration $(3,\ 3)_{10}$ enthaltenen vollständigen Vierseite die Basis eines Curvenbüschels 3. Ordnung.**)

Unter den L_3 eines Netzes sind vier Büschel von Kegelschnitten mit je einer Seite des vollständigen Vierseites enthalten. Die vierten Basispunkte dieser Büschel sind bezüglich s, a', $b'\,c'$. Somit:

Verbindet man irgend einen Punkt der Ebene mit den fünf in der $(3,\ 3)_{10}$ enthaltenen vollständigen Vierecken durch Kegelschnitte, so schneiden sich dieselben in zwei gemeinsamen weiteren Punkten.

Da aber Γ die Hesse'sche Curve aller fünf Netze L_3 ist, so folgt:

Die Punkte, in denen sich Kegelschnitte der Büschel berühren, liegen sämmtlich auf dem Kegelschnitte Γ.

Ferner:

Es giebt sechs Punkte, in denen sich sämmtliche fünf Kegelschnitte osculiren. *Diese Punkte liegen in Γ und in ihnen berühren die Kegelschnitte auch den Kegelschnitt Γ.*

---

*) Die zu einer L_3 bezüglich Γ polare C^3 hat offenbar solche Lage, dass sich der L_3 ∞^1 Dreiecke einschreiben lassen, die der C^3 umgeschrieben sind. Ich bemerke, dass sich in der citirten Denkschriftenarbeit bei verschiedenen Gelegenheiten solche Curvenpaare darbieten, allerdings ohne den polaren Kegelschnitt.

3. Betrachten wir jedoch statt der Doppelpunktstripel unserer zehn Transformationsnetze die Doppelgeradentripel, so finden wir zu den vorigen duale Sätze und namentlich denselben Kegelschnitt Γ. Ich hebe hervor:

Von den Kegelschnitten, welche irgend einem der fünf vollständigen Vierseite der $(3, 3)_{10}$ *eingeschrieben sind, berühren sechs den Kegelschnitt* Γ *und die sechs Berührungspunkte stimmen mit den sechs Berührungspunkten der vorigen Nummer überein.*

In jedem der zehn Transformationsnetze der Configuration treten sechs lineare Transformationen mit gänzlich coincidenten Doppelpunkten auf und für alle zehn Netze sind diese sechs Doppelpunkte dieselben.

Wird die Hesse'sche Curve in dem Netze der L_3 in die conjugirte Curve umgesetzt, so erhält man eine Curve, welche jene in allen freien Punkten berührt, in denen sie sie trifft. So findet man:

Es giebt eine Curve 6. Ordnung, welche die zehn Punkte der Configuration (B) zu Doppelpunkten hat und den covarianten Kegelschnitt Γ in den mehrerwähnten sechs Punkten berührt. Projicirt man aus irgend einem Punkte derselben zwei perspective Dreiecke von (B), so erhält man drei Strahlenpaare einer Projectivität mit zusammenfallenden Doppelstrahlen. Und dieser Strahl ist dieselbe Tangente von Γ für alle zehn Projectivitäten.

4. Für den Kegelschnitt Γ ist $abc\varphi\psi\chi$ ein Polvierseit und $a'b'c's$ ein Polviereck. Aus 2. a. E. bietet sich dann das Ergebniss:

Ist irgend einem vollständigen Vierseite ein vollständiges Viereck so umgeschrieben (cf. Nr. 1), dass die Configuration (B) *entsteht, so hat jeder Kegelschnitt, welcher dem ersteren eingeschrieben, zu jedem dem Vierecke umgeschriebenen Kegelschnitte solche Lage, dass es* ∞^1 *Dreiecke giebt, welche dem ersten Kegelschnitte umgeschrieben und dem zweiten eingeschrieben sind. Der Kegelschnitt, zu welchem alle diese Dreiecke conjugirt sind, hat das Vierseit und das Viereck zu Polvierseit und Polviereck.* —

5. Es seien nun die Punkte $d_1\, d_2\, d_3$ und ein Kegelschnitt Γ gegeben. Man construire das bestimmte dem Dreiecke $d_1\, d_2\, d_3$ eingeschriebene Polvierseit von Γ.

Zu diesem Polvierseite gehören dann ∞^3 Kegelschnitte, welche ein lineares System 3. Stufe bilden, zu dem auch Γ gehört. Zieht man durch einen Punkt O der Ebene alle Strahlen, so giebt es unendlich viele Büschel, welche an den einzelnen dieser Strahlen je zwei zusammenfallende Basispunkte haben. Jedes dieser Büschel enthält das Geradenpaar, welches in O einen Doppelpunkt besitzt. Demzufolge kann es nur zwei Büschel des Systems geben, wo sich alle Kegelschnitte im Punkte O osculiren und die beiden gemeinsamen Tangenten bilden das von O ausgehende sich selbst conjugirte Strahlenpaar. Nun

weiss man, dass diese beiden Tangentenrichtungen in O auch jene der beiden durch O gehenden Kegelschnitte der durch das Vierseit bestimmten Schaar sind. Demnach:

Ein Kegelschnitt Γ *des linearen Systemes wird in denselben sechs Punkten von anderen Kegelschnitten des Systemes osculirt, wo er von Kegelschnitten, die dem Polvierseite eingeschrieben sind, berührt wird.*

Da unter den Kegelschnitten des Systemes auch jene vorkommen, welche durch die Punkte $d_1\, d_2\, d_3$ gehen, so folgt:

Die sechs Punkte, in denen durch d_1, d_2, d_3 *gehende Kegelschnitte den Kegelschnitt* Γ *osculiren, sind dieselben wie jene, in denen dem zugehörigen Polvierseite eingeschriebene Kegelschnitte den* Γ *berühren.*

6. Bildet man nun aus einer Configuration $(3, 3)_{10}$ die fünf möglichen Polvierseite des covarianten Kegelschnittes Γ, so sind nach Nr. 2. a. E. die *sechs Berührungspunkte für alle fünf Polvierseite dieselben*, folglich sind auch nach Nr. 5 *die sechs Osculationspunkte für alle fünf Diagonaldreiecke dieselben.* Und dies ist der Inhalt des von Ihnen gegebenen Satzes.

7. Der Zusatz, welcher in der Nr. 5 gefundenen Uebereinstimmung liegt, ist wichtig für die Theorie der rationalen Curve 4. Ordnung, welche durch quadratische Transformation aus Γ entsteht.

Die sechs Wendepunkte (Osculationspunkte auf Γ) sind nunmehr definirt als die Doppelpunkte der biquadratischen Involution, welche von der Schaar der das Polvierseit tangirenden Kegelschnitte mittelst der gemeinsamen Tangentenquadrupel inducirt wird.

Die Tangentenquadrupel bilden Vierseite, die eine Curve 3. Ordnung J_3 erfüllen, welche wegen der drei Punktepaare der Kegelschnittschaar auch durch die sechs Eckpunkte des Polvierseites geht. Man kann noch um die Schnittpunkte von J_3 mit $d_2\, d_3$, $\cdots$ fragen. Von solchem Schnittpunkte geht ein Paar Tangenten an Γ, das durch $d_2\, d_3$ und den Strahl nach d_1 harmonisch getheilt wird. Der Strahl nach d_1 muss auch durch den Pol von $d_2\, d_3$ nach Γ gehen. Daher:

Die sechs Osculationspunkte liegen mit den Eckpunkten des Polvierseites in einer C_3, *welche* $d_2\, d_3$, $d_3\, d_1$, $d_1\, d_2$ *in den Punkten trifft, wo diese Geraden von den Verbindungslinien ihrer respectiven Pole mit den* d_1, d_2, d_3 *getroffen werden. Diese Verbindungslinien gehen übrigens durch denselben Punkt* V.

Diese J_3 ist jene Curve, welche durch quadratische Transformation in die von Ihnen p. 99, Bd. XII der Math. Ann. (Ueber rationale Curven 4. Ordnung) benützte Curve 6. Ordnung übergeht. Für die Configuration (B) erfolgt:

Die sechs covarianten Punkte auf dem Kegelschnitte Γ *der Configuration liegen mit jedem der fünf in der Configuration enthaltenen Vierseite in einer Curve 3. Ordnung.*

Vermöge einer Untersuchung, die sich schon vor mehreren Jahren mir dargeboten, kann ich die biquadratische Involution auch in interessanter Art auf der C_4^6 selbst deuten. Die Veröffentlichung jener Betrachtungen dürfte demnächst erfolgen und ich erwähne dieses Resultat:

Zieht man von einem Gegeneckenpaare des Doppeltangentenvierseites einer C_4^6 die beiden weiteren Tangenten an die C_4^6 und fasst die vier Berührungspunkte als Quadrupel auf, so bilden die drei so erhältlichen Quadrupel eine Involution, deren sechs Doppelpunkte die sechs Wendepunkte sind. —

Prag, Ober-Krč, den 11. November 1882.

[P. S. Es mögen nur gelegentlich noch über die in Nr. 3 aus dem Transformationsnetze entstandene C_6^{10} zwei Daten folgen:

1. Wegen Nr. 2. a. E. gilt: Jede Tangente von Γ wird von den Kegelschnitten aus den fünf Vierseiten in demselben Punkte T berührt. *Der Ort der Punkte T ist die C_6^{10} der Configuration.* Hierin erkennt man eine Abbildung der C_6^{10} auf den Kegelschnitt Γ und die Fundamentalrelation für sie ist: Jede Curve 3. Classe der durch die Seiten des Polvierseites und dessen Diagonalen bestimmten Schaar hat mit Γ sechs Tangenten gemeinsam, deren incidente T sechs allineirte Punkte von C_6^{10} sind.

2. Jeder einem Polvierseite eingeschriebene Kegelschnitt wird von dem bezüglich Γ polaren in vier Punkten geschnitten, *deren Ort wieder die C_6^{10} ist.*
(Folgt aus Nr. 4.) 12. December 1882.]

Ueber Primzahlmengen.

Von

Meissel in Kiel.

Im dritten Bande gegenwärtiger Zeitschrift pag. 523 theilte ich die Berechnung der Menge von Primzahlen im Zahlenkreise bis Hundert Millionen mit. Bei nochmaliger Durchrechnung der einzelnen Positionen habe ich folgende drei Fehler aufgefunden.

Es ist pag. 524:

$$\Phi(321\,543, 63) = 29\,758 \text{ statt } (29\,757),$$
$$\Phi(325\,732, 62) = 30\,274 \quad \text{„} \quad (30\,273).$$

Ferner ist zu setzen bei der Bildung von $\sum_{91}^{1229} \varphi\left(\frac{m}{p_s}\right)$, pag. 525.

Colonne $(451-480) = 98\,291$ statt $(98\,288)$.

Die beiden ersten Fehler hängen von einander ab, da ich die eine Grösse aus der anderen durch Factorenzählung herleitete. Der dritte Fehler ist ein optischer, da statt des Summandus

$$\varphi\left(\frac{m}{p_{475}}\right) = \varphi\left(\frac{m}{3391}\right) = \varphi(29489) = 3203$$

der falsche Summand $\varphi(29449) = 3200$

gesetzt ist.

Andere Fehler habe ich nicht gefunden.

Hiernach ändern sich die Resultate folgendermassen ab:

Es wird:

$$\Phi(m, 90) = 9\,110\,819,$$
$$\sum_{91}^{1229} \varphi\left(\frac{m}{p_s}\right) = 4\,100\,054,$$
$$\varphi(m) = 5\,761\,455.$$

Kiel, den 7. October 1882.

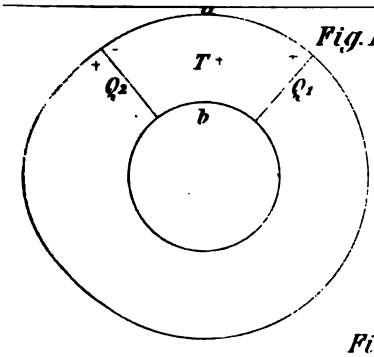


Fig.1.

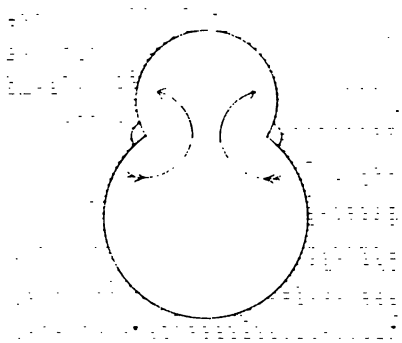
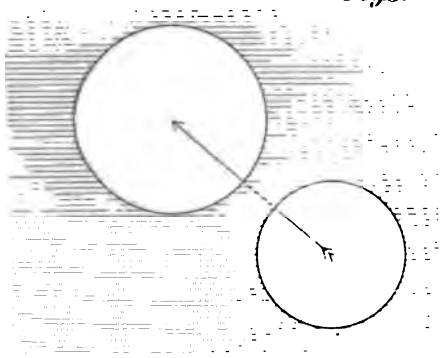


Fig.2

Fig.3.



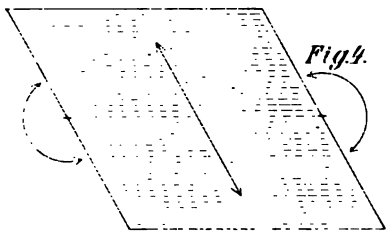


Fig.4.

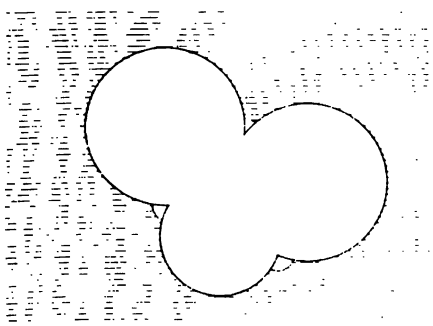


Fig.5.

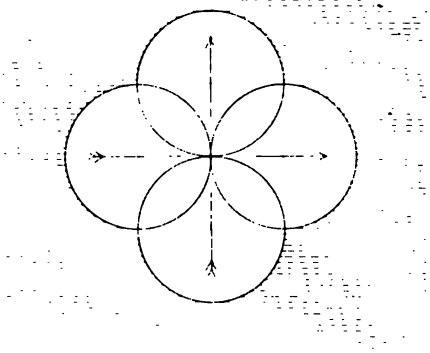
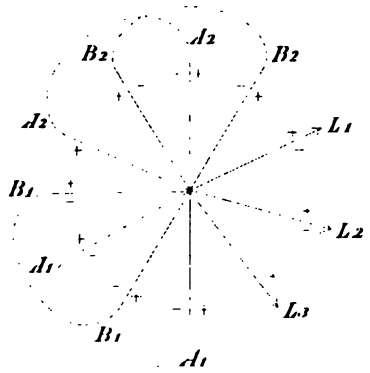


Fig.6.

Fig.7.



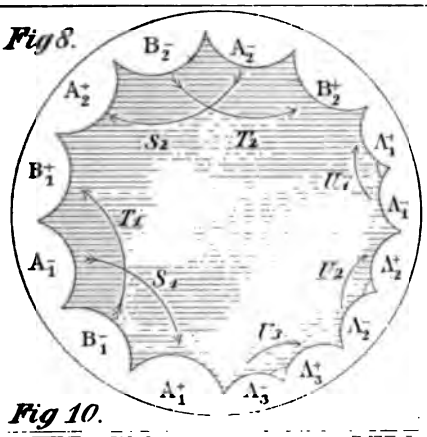


Fig 8.

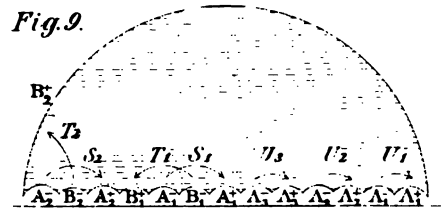


Fig. 9.

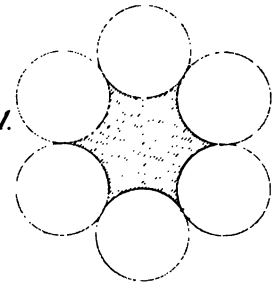


Fig. 11.

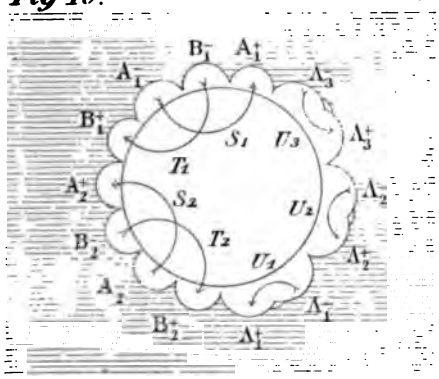


Fig 10.

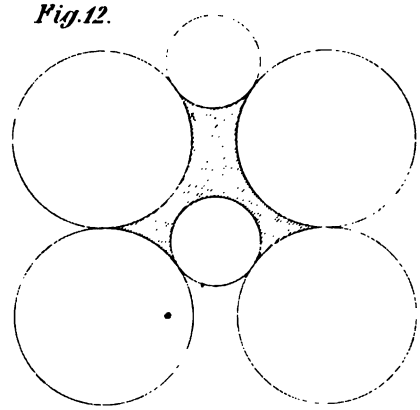


Fig. 12.

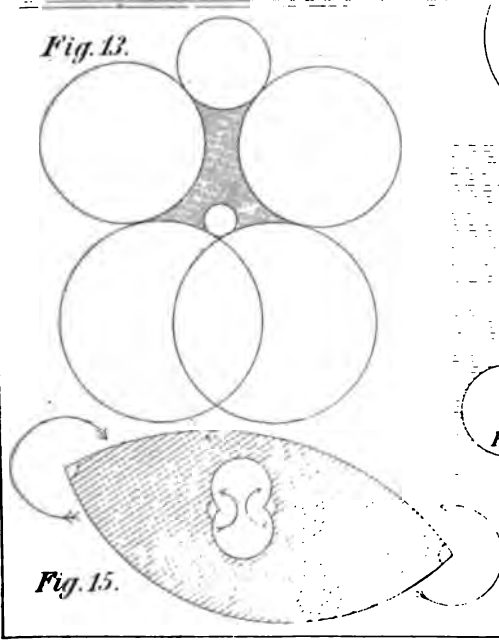


Fig. 13.

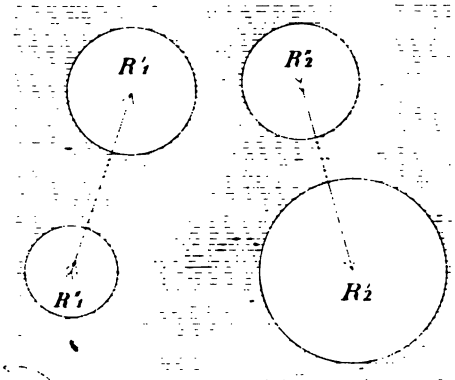


Fig. 14.

Fig. 15.

F. Klein. Neue Beiträge zur Riemannschen Functionentheorie. Math. Annalen Bd. 21.

Fig. 4.

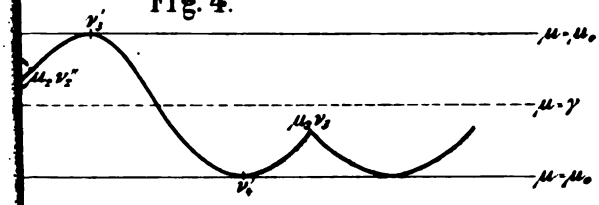


Fig. 6.

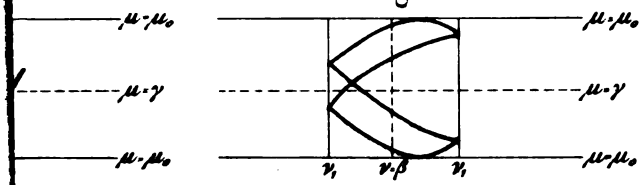


Fig. 7.

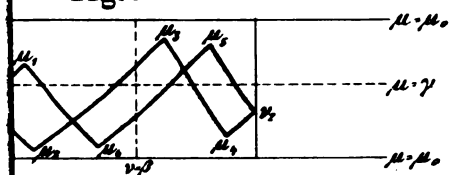
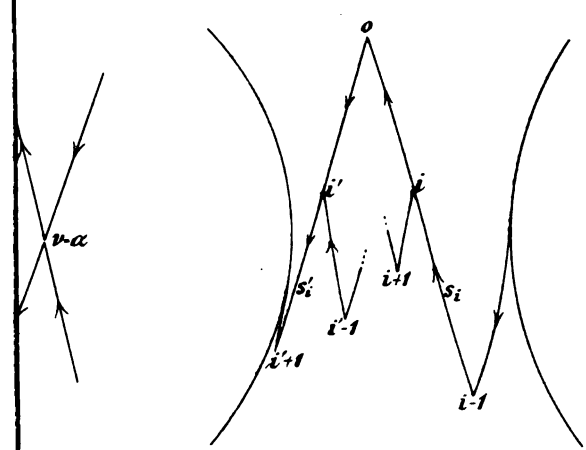


Fig. 10.



Anwendung der Fourier'schen Reihe auf die Theorie der Functionen einer complexen Veränderlichen.

Von

Axel Harnack in Dresden.

Mit der vorliegenden Arbeit suche ich im wesentlichen zwei Aufgaben zu erledigen. Erstlich möchte ich zeigen, in welcher Weise man die Fourier'sche Reihe zu benützen hat, um sie zu einem unbestreitbaren Fundamente für den Cauchy-Riemann'schen Fundamentalsatz der Entwickelbarkeit der „Functionen einer complexen Variabelen" zu machen. Die einfache Methode, vermittelst derer ich die in den partiellen Differentialgleichungen enthaltenen Bedingungen in Relationen für die Coefficienten der Fourier'schen Reihe verwandele, erweist sich meiner Meinung nach als der einzig mögliche, zum Ziele führende Weg, bei allen Problemen dieser Art, z. B. auch bei der Integration der einfachsten partiellen Differentialgleichung in der Theorie der Wärmeleitung. Aus dem Beweise für die Darstellung der Function durch Potenzreihen, wobei ich die zulässigen Voraussetzungen möglichst zu erweitern suchte, ergiebt sich dann der Cauchy'sche Integralsatz als eine Folgerung.

Sodann habe ich die einfache Aufgabe der Construction einer analytischen Function, ohne singuläre Stellen im Innern eines Kreises, aus dem reellen Theile ihrer Randwerthe unter den allgemeinsten Voraussetzungen behandelt, nämlich der Integrirbarkeit dieser Randwerthe und der Forderung eines „im allgemeinen" gleichmässig stetigen Ueberganges der Function in dieselben. Diese Voraussetzungen erscheinen mir in dem Sinne als die allgemeinsten, dass, solange dieselben festgehalten werden, die Function durch ihre Randwerthe eindeutig bestimmt ist, während diese Bestimmbarkeit nicht mehr bestehen bleibt, sobald eine der beiden Vorauseetzungen fallen gelassen wird. Auf eine Untersuchung dieser principiellen Frage bin ich indessen nicht eingegangen; dieselbe ist meines Wissens bisher nur in einer Note von Herrn Christoffel (Göttinger Nachrichten 1871, pag. 435ff.), angeregt worden.

I.

Beweis der Entwickelbarkeit der „Functionen einer complexen Veränderlichen" nach Potenzreihen.

1. Bei der Begründung der Functionentheorie nach Cauchy und Riemann handelt es sich um den Beweis des Fundamentalsatzes: Es sei ein die Ebene $z = x + iy$ oder einen Theil derselben einfach überdeckendes, und einfach oder mehrfach zusammenhängendes Gebiet gegeben; für alle Punkte im Innern des Gebietes sei eine Function $w = u + iv$ definirt, welche dort überall *einen* bestimmten endlichen, mit der Lage des Punktes xy stetig sich ändernden Werth hat, und ferner partielle Ableitungen nach x und y besitzt, die ebenfalls für alle Punkte im Innern stetig sind und dabei den Gleichungen

$$(1) \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{oder} \quad \frac{\partial w}{\partial x} + i\frac{\partial w}{\partial y} = 0$$

genügen: so soll gezeigt werden, dass die Function w eine Function der complexen Veränderlichen $z = x + iy$ in dem Sinne ist, dass sich dieselbe überall im Gebiete durch Potenzreihen darstellen lässt; d. h. bezeichnet a einen beliebigen Punkt im Innern des Gebietes, so ist

$$w = a_0 + a_1(z-a) + a_2(z-a)^2 + \cdots + a_n(z-a)^n \cdots$$

und diese Reihe convergirt zum mindesten für alle Punkte z innerhalb eines Kreises um den Punkt a, der ganz im Innern des anfänglich definirten Gebietes liegt, also die Randcurve allenfalls berührt, aber nicht durchschneidet. Auf Grund dieser Eigenschaft soll w eine analytische Function der Variabelen z ohne singuläre Punkte im Innern des Gebietes genannt werden. Aus derselben folgt, dass auch alle Ableitungen der Function w innerhalb des gegebenen Gebietes analytische Functionen von z ohne singuläre Punkte sind.

Ich betone dabei absichtlich zunächst nur den einfachsten Fall, indem ich innerhalb des gegebenen Gebietes keinerlei Ausnahmepunkte annehme, also keine Punkte, in denen w oder seine ersten partiellen Ableitungen unendlich oder unstetig werden, oder in denen es dahin gestellt bleibt, ob w daselbst partielle Ableitungen nach x oder nach y besitzt, und ob die Differentialgleichung (1) daselbst noch gilt.

2. Man kann das Problem auch nur vermittelst der reellen Functionen u und v aussprechen: Wenn zwei Functionen u und v der reellen Veränderlichen x und y die Eigenschaft haben, dass sie nebst ihren ersten partiellen Ableitungen innerhalb eines gegebenen Gebietes eindeutig und stetig sind, und dass zweitens zwischen diesen Ableitungen die Gleichungen (1) bestehen, so existiren auch alle höheren Ableitungen der beiden Functionen u und v, und diese selbst lassen sich als die reellen und imaginären Bestandtheile einer nach Potenzen von $z - a$ fortschreitenden Reihe entwickeln.

3. Endlich kann man noch einen Schritt weiter gehen, und das Problem nur an *einer* der Functionen u oder v formuliren. Setzt man nämlich von der Function u voraus, dass sie auch eine zweite partielle Ableitung nach x besitzt, und dass dieselbe eine stetige Function der beiden Variabelen ist, so erhält man durch Differentiation der ersten Differentialgleichung zwischen u und v:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}$$

und daraus folgt, dass man die zweite Differentialgleichung sub (1) nach y differentiiren kann, und dass demnach

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

ist. Man erhält folglich die Gleichung:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0. \tag{2}$$

Umgekehrt: wenn eine Function u die Eigenschaft hat, dass ihre zweiten partiellen Ableitungen $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ innerhalb eines Gebietes stetig sind, und dieser Gleichung genügen, so lässt sich immer eine stetige Function v ausfindig machen, für welche

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

wird. Denn die Bedingung des exacten Differentiales ist erfüllt. Sonach wird mit dem Probleme 2 zugleich das dritte bewiesen sein: Wenn eine Function u der beiden reellen Veränderlichen x und y innerhalb eines Gebietes eindeutig und nebst ihren partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung: $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ durchweg stetig ist, während die zweiten Ableitungen die Gleichung (2) befriedigen, so sind auch alle Ableitungen von u durchweg stetige Functionen der beiden Variabelen in diesem Gebiete.

4. Riemann geht in seiner Begründung der Functionentheorie von dieser partiellen Differentialgleichung 2ter Ordnung aus, und beweist für diese die Behauptung mit Hülfe des Green'schen Satzes für Doppelintegrale. Dieser Satz führt zugleich auf den Cauchy'schen Integralsatz für complexe Functionen, aus welchem die Reihenentwickelung hervorgeht. Mir kommt es im folgenden wesentlich darauf an, zu zeigen, wie sich ein directerer Beweis ohne das Doppelintegral, welches ich, abgesehen von seinen complicirten Eigenschaften, für das vorliegende Problem nicht als nothwendig gefordertes Hilfsmittel betrachten kann, führen lässt, indem man die ursprünglichen Differentialgleichungen erster Ordnung zum Ausgang wählt.

Da es sich um den Nachweis einer Potenzentwickelung um einen beliebigen Punkt $a = \alpha + i\beta$ handelt, so führe man Polarcoordinaten ein:

$$x = \alpha + r\cos\vartheta, \quad y = \beta + r\sin\vartheta,$$

so wird

$$w = f(\alpha + r\cos\vartheta, \beta + r\sin\vartheta) = u(r, \vartheta) + iv(r, \vartheta).$$

Der Radius r darf nur so gross gewählt werden, dass der zugehörige Kreis ganz im gegebenen Gebiete eingeschlossen liegt; dieser Maximalwerth von r, welcher zu einem bestimmten α und β gehört, heisse R. Die Functionen u und v sind stetige Functionen der Variabelen r und ϑ, und ausserdem periodische Functionen von ϑ mit der Periode 2π. Bekanntlich ist nun

$$\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial w}{\partial x}\cos\vartheta + \frac{\partial w}{\partial y}\sin\vartheta,$$

$$\frac{\partial w}{\partial \vartheta} = -\frac{\partial w}{\partial x} r\sin\vartheta + \frac{\partial w}{\partial y} r\cos\vartheta,$$

also wird

$$\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{i}{r}\frac{\partial w}{\partial \vartheta} = \left(\frac{\partial w}{\partial x} + i\frac{\partial w}{\partial y}\right)(\cos\vartheta - i\sin\vartheta).$$

Mithin lautet die Differentialgleichung in Polarcoordinaten:

$$\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{i}{r}\frac{\partial w}{\partial \vartheta} = 0. \tag{3}$$

Dieselbe zerlegt sich in die beiden:

$$\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \vartheta} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \vartheta} = 0. \tag{4}$$

Da die partiellen Ableitungen $\frac{\partial w}{\partial x}$, $\frac{\partial w}{\partial y}$ auch an der Stelle $r = 0$ endlich bleiben, so ist bei allen Werthen von ϑ

$$\lim_{r=0}\left[\frac{\partial u}{\partial \vartheta}\right] = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{r=0}\left[\frac{\partial v}{\partial \vartheta}\right] = 0. \tag{5}$$

Weil nun auf jedem Kreise mit dem Radius $r < R$ u und v stetige Functionen von ϑ sind, welche überdies die stetigen Ableitungen $\frac{\partial u}{\partial \vartheta}$ und $\frac{\partial v}{\partial \vartheta}$ besitzen, so sind die Werthe von u und v ausnahmslos durch Fourier'sche Reihen darstellbar; d. h. es ist

$$u(r, \vartheta) = B_0 + \sum_{k=1}^{k=\infty}(A_k\sin k\vartheta + B_k\cos k\vartheta),$$

$$v(r, \vartheta) = \mathsf{B}_0 + \sum_{k=1}^{k=\infty}(\mathsf{A}_k\sin k\vartheta + \mathsf{B}_k\cos k\vartheta) \tag{6}$$

wobei:

$$B_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} u(r, \vartheta)\, d\vartheta, \quad A_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} u(r, \vartheta)\sin k\vartheta\, d\vartheta,$$

$$B_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} u(r, \vartheta)\cos k\vartheta\, d\vartheta$$

und analoge Gleichungen für v gelten. Demnach ist

$$(7) \quad w = (B_0 + i\mathsf{B}_0) + \sum_{k=1}^{k=\infty} (A_k + i\mathsf{A}_k) \sin k\vartheta + (B_k + i\mathsf{B}_k) \cos k\vartheta.$$

Die Coefficienten A_k B_k A_k B_k sind reelle Functionen des Radius r. Wie beschaffen müssen dieselben sein, damit die partiellen Differentialgleichungen (4) erfüllt sind? Man kann die Frage nicht so lösen, dass man die Reihen (5) gliedweise nach r sowohl, wie nach ϑ differentiirt; denn damit würde die Darstellbarkeit der Functionen $\frac{\partial u}{\partial r}$, $\frac{\partial u}{\partial \vartheta}$ u. s. w. durch trigonometrische Reihen vorausgesetzt werden, die aus der Stetigkeit dieser Functionen allein nicht hervorgeht. Man gelangt vielmehr zu den gesuchten Relationen auf entgegengesetztem Wege, indem man die Differentialgleichungen integrirt.

Multiplicirt man die erste der Gleichungen (4) mit $\sin k\vartheta$, so wird

$$\frac{\partial u}{\partial r} \sin k\vartheta - \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \vartheta} \sin k\vartheta = 0,$$

und da diese Gleichung bei allen Werthen von ϑ gilt, so wird auch

$$(8) \quad r \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\partial u}{\partial r} \sin k\vartheta \, d\vartheta - \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\partial v}{\partial \vartheta} \sin k\vartheta \, d\vartheta = 0.$$

Das zweite Integral lässt sich durch partielle Integration umformen: es ist

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\partial v}{\partial \vartheta} \sin k\vartheta \, d\vartheta = \Big[v \sin k\vartheta \Big]_{-\pi}^{+\pi} - k \int_{-\pi}^{+\pi} v \cos k\vartheta \, d\vartheta,$$

und da der erste Term der rechten Seite verschwindet, so lautet nunmehr die Gleichung (8):

$$r \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\partial u}{\partial r} \sin k\vartheta \, d\vartheta + k \int_{-\pi}^{+\pi} v \cos k\vartheta \, d\vartheta = 0.$$

Da ferner $\frac{\partial u}{\partial r}$ eine stetige Function der beiden Variabelen ist, so ist

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\partial u}{\partial r} \sin k\vartheta \, d\vartheta = \frac{\partial}{\partial r} \int_{-\pi}^{+\pi} u \sin k\vartheta \, d\vartheta$$

und sonach ergiebt sich an Stelle von (8) die Bedingungsgleichung:

$$(9) \quad r \frac{\partial A_k}{\partial r} + k\mathsf{B}_k = 0.$$

Wird dieselbe Differentialgleichung (4) mit $\cos k\vartheta$ multiplicirt, so folgt nach demselben Verfahren

$$(10) \quad r \frac{\partial B_k}{\partial r} - k\mathsf{A}_k = 0$$

und wird die zweite der Gleichungen (4) in derselben Weise behandelt, so erhält man

$$r\frac{\partial \mathsf{A}_k}{\partial r} - k B_k = 0, \tag{11}$$

$$r\frac{\partial \mathsf{B}_k}{\partial r} + k A_k = 0. \tag{12}$$

Das simultane System dieser vier Gleichungen definirt die Coefficienten für die Reihenentwickelungen (6) der Functionen u und v; dasselbe gilt für alle Werthe von $k = 1$ an. Für $k = 0$ hat man die Gleichungen:

$$\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{\partial u}{\partial r}\,d\vartheta - \frac{1}{r}\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{\partial v}{\partial \vartheta}\,d\vartheta = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{\partial B_0}{\partial r} = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{\partial v}{\partial r}\,d\vartheta + \frac{1}{r}\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{\partial u}{\partial \vartheta}\,d\vartheta = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{\partial \mathsf{B}_0}{\partial r} = 0,$$

da u und v auf jedem Kreise stetige und periodische Functionen von ϑ sein müssen. Also B_0 und B_0 sind Constanten. Das obige System aber lässt sich in einfachster Weise vollständig integriren. Differentiirt man die Gleichung (9) nach r, was gestattet ist, da B_k eine Ableitung nach r besitzt, so folgt vermittelst der Gleichung (11):

$$\frac{\partial^2 A_k}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_k}{\partial r} - \frac{k^2}{r^2}A_k = 0. \tag{13}$$

Demnach:

$$\begin{aligned} A_k &= \quad C_1 r^k + C_2 r^{-k} \quad \text{und ferner:} \\ \mathsf{B}_k &= -C_1 r^k + C_2 r^{-k}, \\ B_k &= \quad C_1' r^k + C_2' r^{-k}, \\ \mathsf{A}_k &= \quad C_1' r^k - C_2' r^{-k}. \end{aligned} \tag{14}$$

Die Grössen $C_1 C_2 C_1' C_2'$ sind vier willkürliche reelle Integrationsconstanten. Da aber $\frac{\partial u}{\partial r}$ auch für $r = 0$ endlich bleibt, so ist auch $\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{\partial u}{\partial r}\sin k\vartheta\,d\vartheta = \frac{\partial A_k}{\partial r}$ für $r = 0$ endlich. Mithin müssen die Coefficienten der negativen Potenzen von r sämmtlich 0 sein, d. h. es ist

$$A_k = C_1 r^k, \quad \mathsf{B}_k = -C_1 r^k, \quad B_k = C_1' r^k, \quad \mathsf{A}_k = C_1' r^k. \tag{15}$$

Weil solche Gleichungen für sämmtliche Werthe von k gelten, während die beiden Integrationsconstanten je nach den Werthen von k verschieden sein können, so sollen diese Constanten ebenfalls durch den Index k unterschieden werden.

Man setze also:

$$B_0 = C_0, \quad \mathsf{B}_0 = C_0', \quad -A_k = \mathsf{B}_k = C_k' r^k, \quad \mathsf{A}_k = B_k = C_k r^k,$$

so erhält die Reihe (7) die Form

$$w = (C_0 + iC_0') + \sum_{k=1}^{k=\infty} (-C_k' + iC_k) r^k \sin k\vartheta + (C_k + iC_k') r^k \cos k\vartheta$$

oder:

$$(16) \qquad w = (C_0 + iC_0') + \sum_{k=1}^{k=\infty} (C_k + iC_k') r^k e^{ik\vartheta}$$

$$= (C_0 + iC_0') + \sum_{k=1}^{k=\infty} (C_k + iC_k') (z-a)^k,$$

sie ist also eine Potenzreihe der complexen Variabelen $z - a$.

5. Das Auftreten der negativen Potenzen von r in dem vollständigen Integrale des simultanen Systemes weist darauf hin, dass die soeben entwickelte Methode sofort eine Erweiterung des Problemes gestattet: Es sei die Function w so beschaffen, dass sie für eine endliche Anzahl von Stellen im Innern des Gebietes unendlich wird. In diesem Falle kann man solch einen Punkt c mit einem Kreise von beliebig kleinem Radius ϱ umschliessen, dessen Mittelpunkt c ist, und ausserdem einen zweiten Kreis vom Radius R mit demselben Mittelpunkt construiren, dessen Radius so gross gewählt wird, dass in dem ringförmigen Gebiete zwischen ϱ und R kein Unendlichkeitspunkt der Function angetroffen wird. Für alle Werthe von r, die zwischen ϱ und R sich befinden, ist alsdann die Function w durch eine convergente Potenzreihe von der Form

$$(17) \qquad w = (C_0 + iC_0') + \sum_{k=1}^{k=\infty} (C_k + iC_k') r^k e^{ik\vartheta} + (D_k + iD_k') r^{-k} e^{-ik\vartheta}$$

ausdrückbar, wobei D_k und D_k' ein neues Paar von Integrationsconstanten bezeichnen, welches oben zuerst C_2' und C_2 genannt wurde. Diese Entwickelung bleibt bei beliebig kleinen Werthen von r gültig. Wird nun die Function im Punkte c derart unendlich, dass $w(z-c)$ für $z = c$ gleich 0 wird, so müssen auch jetzt noch alle Coefficienten der negativen Potenzen von r verschwinden, und es besteht also der Satz: Wenn für eine Function w, welche im übrigen den anfänglichen Bedingungen (§ 1) genügt, nur die Möglichkeit offen gelassen wird, dass sie in einzelnen Punkten im Innern des Gebietes unendlich wird, so jedoch, dass für jeden beliebigen Punkt der Fläche, wo $z = z'$ ist, $w(z - z')$ für $z = z'$ gleich 0 wird, so ist sie nothwendig nebst allen ihren Differentialquotienten in allen Punkten im Innern der Fläche ohne Ausnahme endlich und stetig.

Sind in dem Gebiete beliebig viele Unendlichkeitsstellen enthalten, so gilt die vorstehende Reihe für jedes durch zwei concentrische Kreise

begrenzte Gebiet, in welchem keine singulären Punkte gelegen sind; nur kann in diesem Falle der innere Kreis im allgemeinen nicht mehr beliebig klein gemacht werden.

II.

Erweiterung der Voraussetzungen für die nach Potenzreihen entwickelbaren Functionen.

6. Es soll nun untersucht werden, in welcher Weise sich die Voraussetzungen des Theoremes (§ 1) noch erweitern lassen, ohne dass die Gültigkeit desselben aufhört. Es sei nach wie vor w innerhalb des Gebietes eine *durchweg stetige* Function (ohne Unendlichkeitspunkte); aber es gebe Stellen, von denen nicht bekannt ist, ob an denselben die Differentialgleichung

$$\frac{\partial w}{\partial x} + i\frac{\partial w}{\partial y} = 0$$

vermittelst endlicher bestimmter Werthe der Ableitungen erfüllt ist, Stellen also, an denen entweder diese Ableitungen einzeln oder beide unbestimmt, auch unendlich werden, oder an denen dieselben nicht mehr der Differentialgleichung genügen könnten. Auch werde die Möglichkeit offen gelassen, dass Stellen vorhanden sind, an denen diese Ableitungen, mögen sie dort der Differentialgleichung genügen oder nicht, nicht mehr stetige Functionen der beiden Variabelen x und y sind. Wählt man wiederum einen beliebigen Punkt im Innern des Bereiches zum Mittelpunkt der Reihenentwickelungen, wie sie durch Gleichung (7) definirt sind, so werden alle früheren Schlüsse, aus denen hervorging, dass die Coefficienten gemäss den Gleichungen (15) Potenzen von r multiplicirt mit gewissen Constanten sind, anwendbar sein, wenn dreierlei erhalten bleibt. Erstlich müssen diese Coefficienten noch immer stetige Functionen von r bleiben, und dies ist zufolge der Definition derselben vermittelst bestimmter Integrale der Fall, wenn w durchweg stetig ist. Zweitens müssen auch die Ableitungen $\frac{\partial A_k}{\partial r}$, $\frac{\partial B_k}{\partial r}$, $\frac{\partial \mathsf{A}_k}{\partial r}$, $\frac{\partial \mathsf{B}_k}{\partial r}$ stetige Functionen von r sein, und drittens müssen die Differentialgleichungen (9) bis (12) wenn sie auch nicht von vornherein als für jeden Werth von r geltende bekannt sind, doch noch in beliebiger Nähe eines jeden Werthes Geltung haben. Sind nämlich die Coefficienten nebst ihren ersten Ableitungen stetige Functionen von r, so folgt, dass diese Differentialgleichungen ausnahmslos erfüllt sind, weil zwei stetige Functionen $\frac{\partial A_k}{\partial r}$ und B_k, die der Gleichung (9)

$$r\frac{\partial A_k}{\partial r} + k\mathsf{B}_k = 0$$

in jedem kleinsten Intervalle mindestens an einer Stelle genügen, durchweg diese Relation befriedigen. Die Stetigkeit der ersten Ableitungen bleibt gesichert, sobald das simultane System erster Ordnung (9) bis (12) und die aus demselben abgeleiteten Differentialgleichungen zweiter Ordnung (13) bei allen Werthen von r mit Ausnahme einer discreten Menge Geltung haben.*) Denn alsdann ist

$$\frac{\partial^2 A_k}{\partial r^2} = -\frac{1}{r}\frac{\partial A_k}{\partial r} - \frac{k^2}{r^2} A_k = \frac{k}{r^2} B_k - \frac{k^2}{r^2} A_k$$

eine integrirbare Function und folglich ist $\frac{\partial A_k}{\partial r}$ vollständig definirt, weil eine willkürliche Abänderung einer zu integrirenden Function in discreten Punkten ohne Einfluss ist auf das Integral. Mithin wird man zu der Forderung geführt, dass das simultane System (9) bis (12) bis auf Werthe einer discreten Menge von r gegeben sein muss und es handelt sich darum diese Forderung vermittelst der ursprünglichen Differentialgleichungen (4) auszudrücken.

7. Aus der Gleichung $\frac{\partial u}{\partial r} \sin k\vartheta - \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \vartheta} \sin k\vartheta = 0$ und den analogen, kann aber bei festem Werthe von r stets die Gleichung

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \left(\frac{\partial u}{\partial r} \sin k\vartheta - \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \vartheta} \sin k\vartheta \right) d\vartheta = 0$$

gefolgert werden, wenn die Stellen, an welchen die obige Gleichung nicht gilt, eine discrete Menge von Punkten auf der Kreisperipherie bilden. Nimmt man also vorerst an, dass die Ausnahmepunkte mit keinem Kreise des concentrischen Systemes streckenweise zusammenfallen, so *können* sie zwar continuirliche das Kreissystem durchschneidende Curven bilden, und zwar auch unendlich viele; doch muss dieses System von Curven die Eigenschaft haben, dass es sich in eine endliche Anzahl von Flächenstreifen einschliessen lässt, deren Flächeninhalt, bei beliebiger Vermehrung und Zusammenziehung der einzelnen Streifen beliebig klein wird; dann bilden die Schnittpunkte des Curven-

*) Hinsichtlich der Definition einer *discreten* Menge von Punkten, die von einem Systeme *isolirter* Punkte zu unterscheiden ist, und der aus derselben folgenden Integralsätze verweise ich auf das erste Capitel meiner Arbeit über die Fourier'sche Reihe, Math. Annal. Bd. XIX, die in einer neuen, zum Theil verbesserten Darstellung im Bulletin des Scienc. Math. ann. 1882 erschienen ist. Zu bemerken ist nur noch, dass ich der Kürze wegen im Texte eine Function zweier Variabelen „unstetig in discreten Punkten" einer Curve nenne, wenn die Gesammtheit aller der Stellen auf der Curve, an denen die Stetigkeitsbedingung einer Function zweier Variabelen nicht erfüllt ist, an denen vielmehr die Schwankungen der Function grösser sind als eine endliche Zahl σ, sei es, dass dieselbe unbestimmt wird, oder sprungweise Veränderungen erleidet, stets nur eine discrete Menge auf der Curve bilden.

systemes auf jedem Kreise eine discrete Menge. Insbesondere können diese Ausnahmecurven aber auch streckenweise, oder gänzlich mit Kreisen des concentrischen Systemes zusammenfallen: Auf solchen Kreisen gilt dann die Integralgleichung nicht ohne weiteres, und die Gesammtheit dieser Kreise muss demnach zu Werthen von r gehören, welche eine discrete Menge bilden.

Ein System von Curven, welches die Eigenschaft hat, dass es sich in ein System von Flächenstreifen einschliessen lässt, deren Inhalt in Summa beliebig klein gemacht werden kann, oder analytisch gesprochen, welches von einem Parameter abhängig ist, dessen Werthe eine discrete Menge bilden, will ich kurz ein discretes Curvensystem nennen. (Die hierin enthaltene Forderung bezüglich der Ausnahmepunkte ist von Riemann durch die nicht ganz correcte Formulirung ausgedrückt, es dürfen die Ausnahmepunkte keinen Flächentheil stetig erfüllen).

Aus der obigen Integralgleichung kann nun weiter gefolgert werden:

$$r\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{\partial u}{\partial r}\sin k\vartheta\, d\vartheta = \int_{-\pi}^{+\pi}\frac{\partial v}{\partial \vartheta}\sin k\vartheta\, d\vartheta = -k\int_{-\pi}^{+\pi} v\cos k\vartheta\, d\vartheta$$

sobald v, wie vorausgesetzt, stetig ist und $\frac{\partial v}{\partial \vartheta}$ auf dem Kreise mit dem Radius r integrirbar ist. Die Integrirbarkeit bleibt bestehen, wenn diese Function nur in discreten Punkten eines Kreises unstetig (auch unendlich) wird. Es bilden dann auch die Punkte, an denen $\frac{\partial u}{\partial r}$ auf einem beliebigen Kreise unstetig (auch unendlich) wird, zufolge der Relation $\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \vartheta}$ nur eine discrete Menge.

Endlich bleibt auch die Gleichung

$$\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{\partial u}{\partial r}\sin k\vartheta\, d\vartheta = \frac{\partial}{\partial r}\int_{-\pi}^{+\pi} u\sin k\vartheta\, d\vartheta$$

bei einem bestimmten Werthe von r erhalten, sobald die Stellen, an denen $\frac{\partial u}{\partial r}$ nicht mehr eine stetige Function beider Variabelen ist, in Intervalle auf der Kreisperipherie eingeschlossen werden können, deren Summe beliebig klein wird, also wiederum sobald die Unstetigkeitspunkte der Ableitungen ein discretes System von Curven bestimmen. Sonach lässt sich dem Hauptsatze die Fassung geben:

Wenn eine Function w innerhalb eines die Ebene einfach überdeckenden Gebietes ausnahmslos stetig ist, und der Differentialgleichung $\frac{\partial w}{\partial x} + i\frac{\partial w}{\partial y} = 0$ *„im allgemeinen" genügt, d. h. so, dass die Punkte, an denen diese Differentialgleichung nicht erfüllt ist, sowie die Punkte, an denen die partiellen Ableitungen* $\frac{\partial w}{\partial x}$, $\frac{\partial w}{\partial y}$ *unbestimmt zwischen end-*

lichen oder unendlichen Grenzen oder unstetig werden, nur ein discretes System von Curven erfüllen, so ist die Function nebst allen ihren Differentialquotienten für alle Punkte im Innern dieser Fläche endlich und stetig, und es sind überhaupt keine Ausnahmepunkte vorhanden.

8. Wird schliesslich noch die Möglichkeit offen gelassen, dass auch die Function w an irgend welchen Stellen im Innern des Gebietes zwar endlich bleibt, aber unstetig wird, so gelten alle früheren Sätze, wenn diese Unstetigkeitsstellen so vertheilt sind, dass erstlich die Integrale $B_0, \mathfrak{B}_0, A_k, B_k, \mathfrak{A}_k, \mathfrak{B}_k$ stetige Functionen von r bleiben, und dass zweitens, weil der Satz der theilweisen Integration auf jedem Kreise zur Ableitung der Differentialgleichungen angewandt wurde, u und v nur bei Werthen von r, die eine discrete Menge bilden, unstetige Functionen von ϑ sind. *Beiden Forderungen wird genügt, falls alle Stellen, an denen die Stetigkeitsbedingung von w nicht gegeben ist, auf einer beliebigen Curve nur eine discrete Menge bilden, und die Curven selbst, auf denen sie gelegen sind, nur ein discretes System zusammensetzen.* Unter diesen Bedingungen kann w überhaupt an keiner Stelle im Innern des Gebietes unstetig sein, wenn eine durch Abänderung des Werthes in einzelnen Punkten hebbare Unstetigkeit ausgeschlossen ist. Die von Riemann gegebene Formulirung, es dürfen die Unstetigkeitspunkte der Function keine Linie stetig erfüllen, ist zu weit; thatsächlich enthält sein Beweis auch nur den speciellen Fall, dass die Unstetigkeitspunkte isolirt sind.

III.

Integraleigenschaften der Coefficienten der Potenzreihen.

9. Ist die Function innerhalb eines Kreises mit dem Radius R durch die Reihe

$$u + iv = f(re^{i\vartheta}) = C_0 + iC_0' + \sum_{k=1}^{k=\infty} (C_k + iC_k')\, r^k e^{ik\vartheta}$$

dargestellt, so haben die Coefficienten folgende Bedeutung. Es ist

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} u\, d\vartheta = C_0, \qquad \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} v\, d\vartheta = C_0',$$

$$\frac{1}{\pi}\frac{1}{r^k}\int_{-\pi}^{+\pi} u \cos k\vartheta\, d\vartheta = \frac{1}{\pi}\frac{1}{r^k}\int_{-\pi}^{+\pi} v \sin k\vartheta\, d\vartheta = C_k,$$

$$-\frac{1}{\pi}\frac{1}{r^k}\int_{-\pi}^{+\pi} u \sin k\vartheta\, d\vartheta = \frac{1}{\pi}\frac{1}{r^k}\int_{-\pi}^{+\pi} v \cos k\vartheta\, d\vartheta = C_k'$$

und diese Grössen sind also unabhängig von r. Diese Gleichungen

bleiben auch dann noch bestehen, wenn u und v die Eigenschaft haben, dass sie für $r = R$ stetig in die Werthe U und V übergehen, so zwar, dass bei allen Werthen von ϑ ein und derselbe Werth von h ausreichend ist, um die Bedingung

$$\text{abs}\,[u(R - \Theta h, \vartheta) - U(\vartheta)] < \delta$$

und

$$\text{abs}\,[v(R - \Theta h, \vartheta) - V(\vartheta)] < \delta$$

zu befriedigen, selbst wenn für diesen extremen Werth von r die unendliche Reihe nicht mehr convergirt. Sonach besteht der Satz: *Weiss man von einer Function $f(z) = u + iv$, dass sie innerhalb eines von einem Kreise mit dem Radius $r = R$ begrenzten Gebietes einschliesslich dieser Begrenzung eine stetige Function der Variabelen r und ϑ ist, auf dieser Begrenzung die Werthe $U + iV$ erhält, und innerhalb des Gebietes den Bedingungen einer analytischen Function ohne Unendlichkeitspunkte genügt, so ist sie für alle Punkte im Innern des Kreises durch eine Potenzreihe darstellbar, deren Coefficienten aus den Gleichungen zu entnehmen sind:*

$$\frac{1}{\pi}\frac{1}{R^k}\int_{-\pi}^{+\pi} U \cos k\vartheta\, d\vartheta = \frac{1}{\pi}\frac{1}{R^k}\int_{-\pi}^{+\pi} V \sin k\vartheta\, d\vartheta = C_k,$$

$$-\frac{1}{\pi}\frac{1}{R^k}\int_{-\pi}^{+\pi} U \sin k\vartheta\, d\vartheta = \frac{1}{\pi}\frac{1}{R^k}\int_{-\pi}^{+\pi} V \cos k\vartheta\, d\vartheta = C_k'.$$

Zwischen den Randwerthen U und V, und allgemein zwischen den Functionen u und v bestehen demnach, wie die vorstehenden Gleichungen lehren, Integralrelationen.

Für die Functionen u und v sind dieselben bereits in den Differentialgleichungen (4) enthalten, an der Grenze dagegen sind sie aus den Differentialgleichungen nicht ableitbar, da hier die Differentiirbarkeit der Functionen nicht mehr vorausgesetzt ist, und auch in der That nicht mehr zu bestehen braucht. Weiter folgt: Weiss man von einer Function, dass sie innerhalb eines Kreises mit dem Radius R analytisch ist, und kennt man die Werthe U, welche der reelle Bestandtheil für $r = R$ erhält durch gleichmässig stetigen Uebergang d. h. in einem für alle Werthe von ϑ gleichem Maasse der Annäherung, so ist die Function bis auf die imaginäre Constante iC_0' vollkommen bestimmt; denn man kann alle anderen Coefficienten vermittelst der Function U allein berechnen.

Dagegen ist eine Function aus ihren Randwerthen allein nicht mehr bestimmbar, wenn die Integrale

$$\frac{1}{r^k}\int_{-\pi}^{+\pi} u \cos k\vartheta\, d\vartheta \text{ u. s. w.}$$

nicht mehr stetige Functionen von r auch für $r = R$ bleiben; was im wesentlichen mit der Bedingung übereinstimmt, dass die Function u eine stetige Function der beiden Variabelen r und ϑ einschliesslich des Randes sein muss. Die Verallgemeinerung dieser Bedingung siehe § V.

10. In dem allgemeineren Falle, dass der Mittelpunkt a des Kreises ein singulärer Punkt ist, bekommen die Coefficienten der Reihe:

$$u + iv = (C_0 + iC_0') + \sum_{k=1}^{k=\infty} (C_k + iC_k') r^k e^{ik\vartheta} + (D_k + iD_k') \frac{1}{r^k} e^{-ik\vartheta}$$

folgende Bedeutung. Es wird:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} u\, d\vartheta = C_0, \qquad \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} v\, d\vartheta = C_0',$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} u \cos k\vartheta\, d\vartheta = r^k C_k + \frac{1}{r^k} D_k,$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} u \sin k\vartheta\, d\vartheta = -r^k C_k' + \frac{1}{r^k} D_k',$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} v \cos k\vartheta\, d\vartheta = r^k C_k' + \frac{1}{r^k} D_k',$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} v \sin k\vartheta\, d\vartheta = r^k C_k - \frac{1}{r^k} D_k.$$

Man kann die Gleichungen auch in der Form schreiben:

$$C_k = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{r^k}\int_{-\pi}^{+\pi} (u \cos k\vartheta - v \sin k\vartheta)\, d\vartheta,$$

$$D_k = \frac{1}{2\pi} r^k \int_{-\pi}^{+\pi} (u \cos k\vartheta - v \sin k\vartheta)\, d\vartheta,$$

$$C_k' = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{r^k}\int_{-\pi}^{+\pi} (v \cos k\vartheta - u \sin k\vartheta)\, d\vartheta,$$

$$D_k' = \frac{1}{2\pi} r^k \int_{-\pi}^{+\pi} (v \cos k\vartheta + u \sin k\vartheta)\, d\vartheta.$$

Demnach wird

$$C_k + iC_k' = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{r^k}\int_{-\pi}^{+\pi} (u + iv) e^{-ik\vartheta} d\vartheta = \frac{1}{2i\pi}\int \frac{f(z')}{(z'-a)^{k+1}}\, dz',$$

$$D_k + iD_k' = \frac{1}{2\pi} r^k \int_{-\pi}^{+\pi} (u + iv)\, e^{ik\vartheta}\, d\vartheta = \frac{1}{2i\pi} \int f(z')\, (z' - a)^{k-1}\, dz'.$$

Dabei müssen die rechts stehenden complexen Integrale auf irgend einem der Kreise, dessen Radius der Bedingung $0 < r \leq R$ genügt, geführt werden. Also ist

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int \frac{f(z')}{z' - a}\, dz' + \frac{1}{2i\pi} \sum_{k=1}^{k=\infty} (z-a)^k \int \frac{f(z')}{(z' - a)^{k+1}}\, dz'$$
$$+ \frac{1}{(z-a)^k} \int f(z')(z' - a)^{k-1}\, dz'.$$

Die Reihen

$$\sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{(z-a)^k}{(z'-a)^k} \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{(z'-a)^k}{(z-a)^k}$$

sind gleichmässig convergente, solange bei der ersten

$$\text{abs}\,(z - a) < \text{abs}\,(z' - a).$$

bei der zweiten

$$\text{abs}\,(z' - a) < \text{abs}\,(z - a).$$

Man erhält alsdann durch Summation

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int \frac{f(z')}{z' - z}\, dz' + \frac{1}{2i\pi} \int \frac{f(z')}{z - z'}\, dz'$$

wobei das erste Integral auf einem den Punkt z umschliessenden Kreise in der Richtung von $-\pi$ nach $+\pi$, das zweite in der nämlichen Richtung auf einem den Punkt z ausschliessenden Kreise zu führen ist. Sonach ergiebt sich der Cauchy'sche Integralsatz zunächst in der speciellen Fassung: Für eine beliebige Stelle im Innern des Kreises, in welchem der Mittelpunkt $z = a$ ein singulärer Punkt ist, ist der Werth der Function $f(z)$ darstellbar durch das Integral

$$\frac{1}{2i\pi} \int \frac{f(z')}{z' - z}\, dz'$$

wenn dasselbe auf zwei concentrischen Kreisen, von denen der eine die Stelle $z' = z$ einschliesst, der andere dieselbe ausschliesst, so geführt wird, dass die eingeschlossene Ringfläche zur linken bleibt. Ist der Mittelpunkt regulär, so wird das Integral auf dem inneren Kreise Null.

Die Function, welche im Punkte $z' = a$ einen singulären Punkt hat, ist durch die Werthe, welche der reelle Bestandtheil u am Rande für $r = R$ besitzt, nicht mehr bis auf eine additive rein imaginäre Constante bestimmt. Es werden vielmehr aus den Werthen von U die Coefficienten C_k und C_k' nur dann berechenbar sein, wenn sämmtliche Coefficienten D_k und D_k' von vornherein bekannt sind.

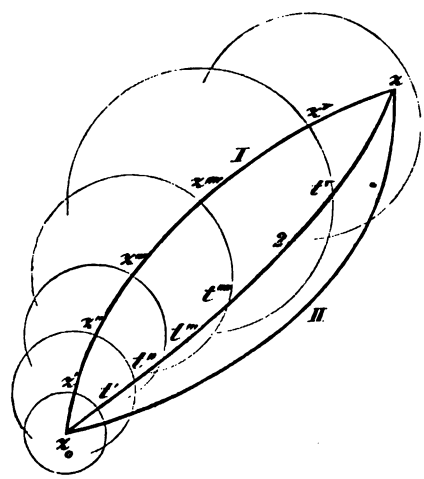
IV.

Der Cauchy'sche Integralsatz.

11. Aus den bisherigen Resultaten lässt sich der Cauchy'sche Integralsatz allgemein ableiten, der gewöhnlich mit Hülfe des Doppelintegrales oder durch Continuitätsbetrachtungen vermittelst der Methode des unendlich kleinen*) bewiesen, umgekehrt dazu dient, die Potenzentwickelung der Functionen einer complexen Variabelen nachzuweisen.

Der Satz, aus welchem alle weiteren Folgerungen hervorgehen, kann in folgender Weise deducirt werden: Innerhalb eines einfach oder mehrfach zusammenhängenden Gebietes sei eine beliebige sich selbst nicht schneidende Curve (Linie mit integrabelem Differentialquotienten) gegeben, welche für sich allein einen einfach zusammenhängenden Bereich begrenzt, in welchem einschliesslich der Begrenzungscurve die Function $f(z)$ eine analytische Function ohne singuläre Stellen ist: so soll gezeigt werden, dass das complexe Integral $\int f(z)\,dz$ geführt längs dieser Begrenzungscurve den Werth 0 hat. Oder kürzer noch: Begrenzen zwei vom Punkte z_0 nach z führende Curven I und II einen einfach zusammenhängenden Bereich, in dessem Innern einschliesslich der Begrenzung $f(z)$ eine analytische Function ohne singuläre Punkte ist, so ist der Werth des Integrals von z_0 nach z geführt auf der einen oder anderen Curve der nämliche.

Der analytische Charakter der Function erfordert, dass zu jedem Punkte im Innern oder auf der Begrenzung ein Kreis mit endlichem Radius angebbar ist, in welchem die Function durch eine Potenzreihe dargestellt werden kann. Der Minimalwerth aller dieser Radien sinkt nicht unter eine bestimmte Grösse herab. Demnach construire man ein System von Kreisen, welches auf der Curve I die Schnittpunkte $z', z'', \cdots$ bildet, und in denen einschliesslich der Kreisperipherien die Function durch Potenzreihen entwickelbar ist. Wählt man nun eine Curve 2, welche ganz innerhalb dieser Kreise verläuft,



so kann man zunächst beweisen, dass das Integral vom Punkte z_0 bis z auf der Curve I mit dem Integrale zwischen denselben Grenzen auf der Curve 2

*) Briot et Bouquet, Théorie des fonctions ellipt. 2. ed. pag. 128 ff. Auch der Beweis von Mittag-Leffler (Göttinger Nachrichten 1875) vollzieht, wenn auch in schärferer analytischer Fassung, einen analogen Grenzprocess.

identisch ist. Von dieser Curve kann man durch ähnliche Kreisconstructionen weiter gehen, bis man vermittelst einer endlichen Anzahl von Hülfscurven zu der Curve II gelangt. Dieser Process versagt nur dann, wenn in unendlicher Nähe einer zwischen z_0 und z im Innern des gegebenen Bereiches verlaufenden Curve ein singulärer Punkt gelegen ist, was aber durch die Bedingung des Satzes ausgeschlossen ist.

Der Nachweis der Gleichheit der Integrale auf den Curven I und 2 erfordert aber nur den Beweis des Satzes: Das Integral einer Potenzreihe geführt längs einer geschlossenen Curve innerhalb ihres Convergenzgebietes hat den Werth 0. Denn alsdann ist

$$\int_{z_0}^{z'} = \int_{z_0}^{z} + \int_{z}^{z'}$$

$$\int_{z'}^{z''} = \int_{z}^{z} + \int_{z}^{z'} + \int_{z'}^{z''}$$

$$\int_{z''}^{z'''} = \int_{z}^{z''} + \int_{z''}^{z'''} + \int_{z'''}^{z'''}$$

. . . . . .

woraus durch Summation die Behauptung hervorgeht. Und um diesen Satz zu beweisen, hat man auf Grund des Theoremes, dass das Integral einer Potenzreihe, zwischen Grenzen, die innerhalb des Convergenzgebietes liegen, durch gliedweise Integration gewonnen wird, nur zu zeigen, dass das Integral einer Potenz $(z - a)^n$ auf einem beliebigen geschlossenen Wege gleich Null wird, was evident ist.

V.

Die Bestimmung der Function aus den Randwerthen längs einer Kreisfläche.

12. Die allgemeinste Aufgabe, welche man beim sogenannten Dirichlet'sche Princip angewandt auf die Kreisfläche und eine im Innern derselben analytische Function ohne singuläre Punkte zu stellen hat, lautet: Gegeben ist für alle Punkte eines Kreises mit dem Radius R eine reelle Function U, welche lediglich der Bedingung der Integrirbarkeit genügt. Alle Unstetigkeitsstellen der Function U, in deren Umgebung die Schwankungen derselben grösser sind als eine beliebig kleine Zahl ε, bilden demnach eine discrete Menge und lassen sich also in Intervalle auf der Peripherie einschliessen, deren Summe beliebig klein gemacht werden kann. Es soll eine Function $u + iv$ construirt werden, welche im Innern des Kreises analytisch ohne singuläre Punkte ist, und deren reeller Bestandtheil bei beliebig gearteter Annäherung an irgend welche Stelle des Randes, „im allgemeinen" gleichmässig, nach

einem Grenzwerth convergirt, der von dem daselbst geltenden Werthe U (resp. von den Unbestimmtheitsgrenzen von U) um eine Grösse unterschieden ist, die von ε beliebig wenig abweicht. Genauer formulirt sagt diese Forderung der gleichmässigen Convergenz „im allgemeinen" aus: Es ist bei allen Werthen von φ

$$\operatorname{Lim}_{r=R} \int_{\alpha}^{\varphi} u\, d\varphi = \int_{\alpha}^{\varphi} U\, d\varphi$$

und die Annäherung des Integrales links an den Integralwerth auf der rechten Seite erfolgt unabhängig von dem Werthe φ lediglich durch Wahl einer unteren Grenze von r.

Nun ist zu zeigen, dass solch eine Function existirt, und dass sie bis auf eine additive rein imaginäre Constante durch die Werthe U vollkommen bestimmt ist.

Die Function $u + iv$ muss als analytische Function für alle Werthe von $r < R$ durch eine Reihe

$$(C_0 + iC_0') + \sum_{k=1}^{k=\infty} (C_k + iC_k')\, r^k e^{ik\vartheta}$$

definirbar sein, in welcher die Coefficienten bestimmte Integrale sind. Infolge der gleichmässigen Convergenz im allgemeinen wird auch

$$\operatorname{Lim} \frac{1}{r^k} \int_{-\pi}^{+\pi} u \cos k\varphi\, d\varphi = \frac{1}{R^k} \int_{-\pi}^{+\pi} U \cos k\varphi\, d\varphi = \pi C_k,$$

$$-\operatorname{Lim} \frac{1}{r^k} \int_{-\pi}^{+\pi} u \sin k\varphi\, d\varphi = -\frac{1}{R^k} \int_{-\pi}^{+\pi} U \cos k\varphi\, d\varphi = \pi C_k'.$$

Mithin folgt, dass wenn es überhaupt eine Function $u + iv$ giebt, dies nur die Function sein kann, welche für alle Punkte im Innern des Kreises durch die Reihe

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} U\, d\varphi + iC_0' + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{k=\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^k e^{ik\vartheta} \int_{-\pi}^{+\pi} U e^{-ik\varphi}\, d\varphi$$

definirt ist. Es muss gezeigt werden, dass diese Function die geforderten Eigenschaften hat. Für jeden Werth $r < R$ convergirt die Reihe und definirt eine analytische Function, selbst wenn, wie das bei unendlich werdendem U wohl möglich ist,

$$\operatorname{Lim} \int_{-\pi}^{+\pi} U e^{-ik\varphi}\, d\varphi$$

für $k = \infty$ selbst unendlich wird. Denn nach einem Satze aus der Theorie der Fourier'schen Reihen wird

$$\lim_{k=\infty} \frac{1}{k} \int_{-\pi}^{+\pi} U e^{-ik\varphi}\, d\varphi = 0$$

sobald U nur eine integrirbare Function ist. Es bleibt nur zu untersuchen, wie sich der reelle Bestandtheil der Function bei Annäherung an den Rand verhält. Da die obige Reihe nicht für $r = R$ zu convergiren braucht, so muss die Reihe für u erst summirt, und dann der Grenzwerth für $r = R$ bestimmt werden. Diese Summation wird vermittelst des Poisson'schen bestimmten Integrals geleistet*): Es ist

$$u = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} U\, d\varphi \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{k=\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^k \cos k(\varphi - \vartheta) \right]$$

gleich dem reellen Theile von

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} U\, d\varphi \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{k=\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^k e^{ik(\varphi-\vartheta)} \right] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} U\, d\varphi \, \frac{1 + \frac{r}{R} e^{i(\varphi-\vartheta)}}{1 - \frac{r}{R} e^{i(\varphi-\vartheta)}}$$

da hier die Vertauschung der Summation und Integration gestattet ist. Sonach ist

$$u(r,\vartheta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} U(\varphi) \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\varphi - \vartheta) + r^2}\, d\varphi$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi-\vartheta}^{+\pi-\vartheta} U(\psi + \vartheta) \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos\psi + r^2}\, d\psi$$

eine Gleichung, die aber nur solange gilt, als $r < R$ ist. Da nun die Function U periodisch ist, da ferner

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos\psi + r^2}\, d\psi = 1,$$

so wird

$$u(r,\vartheta) - U(\vartheta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} [U(\psi + \vartheta) - U(\vartheta)] \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos\psi + r^2}\, d\psi.$$

Die discreten Punkte, an denen die Schwankungen der Function

*) Diese Methode, welche nach einer Bemerkung von Christoffel (a. a. p. 439) schon von Dirichlet angewandt wurde, ist zuerst von Herrn C. Neumann (Journ. Bd. 59), sodann von Herrn Prym (J. Bd. 73) und Herrn Schwarz (J. Bd. 74) in ihren Arbeiten über die partielle Differentialgleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ angewandt worden und hier nur mit der durch die Erweiterung des Problemes gebotenen Modification wiederholt.

grösser sind als ε, sowie diejenigen an denen U unendlich wird, sind n eine endliche Anzahl von Intervallen einschliessbar, deren Summe o klein gewählt werden kann, dass der auf dieselben entfallende Antheil des Integrales eine beliebig kleine Grösse ε_1 nicht überschreitet. Im Folgenden wird nur noch von solchen Werthen ϑ und $\vartheta+\psi$ gehandelt, lie nicht in diesen Intervallen liegen. Die Function u wird der gestellten Forderung genügen, wenn eine Grösse η ausfindig gemacht werden kann, so dass bei allen Werthen von $r \geqq R - \eta$ die Differenz $u(r, \vartheta) - U(\vartheta)$ ihrem Betrage nach von ε beliebig wenig abweicht, welchen Werth auch ϑ haben mag. Man zerlege das Integrationsntervall, da die Stelle $\psi = 0$ eine kritische Stelle ist, in die Theile von $-\pi$ bis $-\delta$, $-\delta$ bis $+\delta$, $+\delta$ bis $+\pi$. In dem ersten und dritten Integrale bleibt der Nenner stets grösser als

$$R^2 - 2Rr\cos\delta + r^2 > 2Rr(1 - \cos\delta).$$

Demnach ist der Werth des ersten und dritten Theilintegrales jedenfalls nicht grösser als

$$\frac{(R^2 - r^2)\,G}{Rr(1 - \cos\delta)} = \varepsilon_2,$$

wobei G den Maximalwerth bezeichnet, welchen die Function U innerhalb der Bögen, in denen kein Unendlichkeitspunkt gelegen ist, annimmt.

Das mittlere Integral aber liefert, da δ so klein gewählt werden kann, dass abs $[U(\pm\Theta\delta + \vartheta) - U(\vartheta)]$ nicht grösser wird als $\varepsilon + \varepsilon_3$, wobei ε_3 eine beliebig kleine Zahl bedeutet, einen Beitrag, der kleiner ist als

$$(\varepsilon+\varepsilon_3)\frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{+\delta}\frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos\psi + r^2}\,d\psi < (\varepsilon+\varepsilon_3)\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos\psi + r^2}\,d\psi$$

also kleiner als $\varepsilon + \varepsilon_3$. Mithin ist

$$u(r, \vartheta) - U(\vartheta) < (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon + \varepsilon_3).$$

Soll dieser Werth kleiner werden als $\varepsilon + \sigma$, wobei σ beliebig klein ist, so verfahre man folgendermassen. Man wähle zuerst δ so klein, dass das zuletzt behandelte Integral höchstens den Werth $\varepsilon + \frac{\sigma}{3}$ erhält. Nachdem dies geschehen, bestimme man die Intervalle, welche die Unendlichkeitspunkte einschliessen, sowie die Punkte, an denen die Schwankungen der Function U grösser sind als ε, so klein, dass die zu denselben gehörigen Integrale, wie nahe auch r dem Werthe R kommt, eine Summe $\varepsilon_1 < \frac{\sigma}{3}$ liefern. Dies ist möglich; denn in dem Integrale

$$\int [U(\psi+\vartheta) - U(\vartheta)]\frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos\psi + r^2}\,d\psi$$

ist der zweite Factor immer positiv. Er wächst im Intervalle von $-\pi$ bis $-\delta$, und nimmt ab im Intervalle von $+\delta$ bis $+\pi$. Demnach lassen sich alle in das Intervall von $-\pi$ bis $-\delta$, und alle in das Intervall von δ bis π fallenden Theilintegrale vermittelst des zweiten Mittelwerthsatzes darstellen, und sonach wird die Bedingung in Bezug auf die auszuschliessenden Stellen (unabhängig vom Werthe r) erfüllt werden können, sobald dies für dieselben Intervalle in Bezug auf die einfacheren Integrale

$$\int U(\psi)\, d\psi$$

geschehen ist. Schliesslich wird nun auch die Differenz $R - r$ so klein gemacht werden können, dass die Grösse $\varepsilon_2 < \frac{\sigma}{3}$ ist; denn nunmehr ist G eine bestimmte endliche Zahl; und hiermit ist die verlangte Grenze für diesen Werth von r sowie für alle Werthe, die noch näher an R liegen, erreicht.

In Bezug auf die Annäherung der Function an die ausgeschlossenen Stellen folgt aus den bisherigen Betrachtungen der Satz: Besitzt die Function U an der Stelle mit den Coordinaten R, ϑ Schwankungen, deren Grösse schliesslich durch die Zahl ε gemessen wird, d. h. ist der Unterschied der grössten und kleinsten Werthe der Function in unmittelbarer Umgebung dieser Stelle schliesslich gleich ε, so lässt sich hier ein in das Innere des Kreises sich erstreckender endlicher Bereich angeben, auf dessen Begrenzung die betrachtete Stelle liegt, und welcher die Eigenschaft hat, dass sämmtliche Werthe, welche die Function u an allen Stellen im Bereiche annimmt, von den extremen Werthen der Function U an dieser Stelle um Grössen unterschieden sind, welche von ε beliebig wenig abweichen. Auf eine nähere Discussion des Verhaltens in der Umgebung der singulären Stellen von U will ich hier nicht eingehen; dieselbe ist für gewisse Arten der Unstetigkeiten in den oben genannten Arbeiten der Herren Prym und Schwarz erledigt.

Eine willkürliche Abänderung der Function U in discreten Punkten des begrenzenden Kreises ist ohne Einfluss auf die Function $u + iv$.

Anhang.

Für die Ausdehnung des zweiten Mittelwerthsatzes auf Functionen, die in beliebig vielen Punkten unendlich werden, welche im vorstehenden benutzt wurde, ist mir nur ein Beweis von Herrn Dini (Serie di Fourier, Pisa, Nistri 1880, pag. 22ff.) bekannt geworden. Die dort gemachte Einschränkung, dass die Unendlichkeitsstellen eine „Punktmenge erster Gattung" bilden, ist indessen, wie aus dem Beweise dort selbst hervorgeht, unwesentlich; und es wird, wie ich hoffe, nicht überflüssig erscheinen, wenn ich in Kürze einen Beweis hier mittheile, den ich formulirte, noch bevor ich den Dini'schen kennen lernte.

Es ist zu zeigen, dass der Satz:

$$\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx = f(a+0)\int_a^\xi \varphi(x)\,dx + f(b-0)\int_\xi^b \varphi(x)\,dx$$

wobei $f(x)$ eine Function ist, die im Intervalle von a bis b entweder nicht wächst, oder nicht abnimmt, auch dann noch Gültigkeit behält, wenn die Function $\varphi(x)$ im Integrationsintervalle an unendlich vielen Stellen, die eine discrete Menge bilden, unendlich wird, so jedoch, dass sie selbst und auch das Product $f(x)\,\varphi(x)$ integrabel bleibt.

Zunächst bemerke ich, dass man die Riemann'sche Definition des bestimmten Integrales auf ein Intervall a bis b, (sowie über jeden Theil desselben), in welchem die Function $\varphi(x)$ an unendlich vielen Stellen, welche eine discrete Menge bilden, unendlich wird, in folgender Weise auszudehnen hat. Man schliesse die Unendlichkeitsstellen in eine endliche Anzahl von Intervallen ein, deren Summe zuletzt beliebig klein wird, und construire eine Function $\varphi_1(x)$, welche innerhalb dieser Intervalle den Werth 0 hat, ausserhalb derselben mit $\varphi(x)$ identisch ist. Die Function $\varphi(x)$ ist im Intervalle von a bis b oder auch in jedem Theile desselben integrabel, wenn das Integral

$$\int_a^x \varphi_1(x)\,dx \qquad (a < x \leqq b)$$

bei beliebiger Vermehrung der einschliessenden Intervalle, wobei deren Summe beliebig klein wird, einem bestimmten endlichen Grenzwerth zustrebt, *der unabhängig ist von der Art, in welcher die Intervallsumme nach Null convergirt.* Dieser Grenzwerth werde dann mit

$$\int_a^x \varphi(x)\,dx$$

bezeichnet.

Aus dieser Definition folgt, dass, sobald $\varphi(x)$ eine im Intervalle integrabele Function ist, die Einschliessung der Unendlichkeitsstellen so vollzogen werden kann, dass bei *allen* Werthen von x zwischen a und b

$$\int_a^x \varphi_1(x)\,dx \quad \text{von} \quad \int_a^x \varphi(x)\,dx$$

um weniger abweicht als eine beliebig vorgeschriebene Grösse. Denn da es sich immer nur um eine endliche Anzahl von Strecken handelt, die im Integrationsgebiete gelegen, Unendlichkeitspunkte der Function $\varphi(x)$ enthalten, und da ferner die Zusammenziehung dieser Strecken auf eine immer grössere Anzahl von kleineren Längen auch schon in jedem Theile des Integrationsgebietes, eine Annäherung des Integrales

an seinen Grenzwerth zur Folge haben muss, so erkennt man, dass kurz gesagt die über die Unendlichkeitsstellen erstreckten Integrale

$$\int_a^x \varphi'(x)\,dx - \int_a^x \varphi_1(x)\,dx$$

nicht dadurch zu Null werden, dass sie sich gegenseitig aufheben, sondern dass jedes einzelne derselben unterhalb der vorgeschriebenen Grenze bleibt, indem die Summe aller Integrale mit positivem Werthe und ebenso der Betrag der Summe aller negativen Integrale einzeln für sich betrachtet die vorgeschriebene Grenze nicht überschreiten kann.

Man verfahre nun folgendermassen. Nachdem die Unendlichkeitspunkte in eine endliche Anzahl von Intervallen eingeschlossen sind, derart, dass bei allen Werthen von x

$$\int_a^x \varphi_1(x)\,dx \quad \text{von} \quad \int_a^x \varphi'(x)\,dx$$

um weniger abweicht als eine vorgegebene Grösse δ, besteht die Gleichung:

$$\int_a^b f(x)\,\varphi_1(x)\,dx = f(a+0)\int_a^\xi \varphi_1(x)\,dx + f(b-0)\int_\xi^b \varphi_1(x)\,dx;$$

mithin ist auch

$$\int_a^b f(x)\,\varphi_1(x)\,dx \quad \text{von} \quad f(a+0)\int_a^\xi \varphi(x)\,dx + f(b-0)\int_\xi^b \varphi(x)\,dx$$

um eine Grösse unterschieden, die höchstens gleich

$$\text{abs}\,[\delta f(a+0)] + \text{abs}\,[\delta f(b-0)] \quad \text{ist.}$$

Da nun auch

$$\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx \quad \text{beliebig nahe gleich} \quad \int_a^b f(x)\,\varphi_1(x)\,dx$$

wird, so folgt: Es lässt sich eine Grösse ξ zwischen a und b so bestimmen, dass

$$f(a+0)\int_a^\xi \varphi(x)\,dx + f(b-0)\int_a^\xi \varphi(x)\,dx \quad \text{dem Werthe} \quad \int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx$$

beliebig nahe kommt. Weil aber die Summe links eine stetige Function von ξ ist, so folgt hieraus weiter, dass es einen Werth ξ geben muss, für welchen genau die geforderte Gleichung besteht.

Dresden, im September 1882.

Ueber die Multiplication bedingt convergenter Reihen.

Von

Alfred Pringsheim in München.

I.

Die von Cauchy*) zuerst bewiesene Multiplicationsregel für zwei unendliche Reihen, welche aussagt, dass das Product der beiden Reihen

$$U = \sum_{0}^{\infty} u_\nu, \quad V = \sum_{0}^{\infty} v_\nu$$

sich in die Form setzen lässt:

$$UV = W = \sum_{0}^{\infty} w_\nu \quad \text{wo} \quad w_\nu = \sum_{0}^{\nu} u_\varkappa v_{\nu-\varkappa},$$

beruht ihrer Herleitung gemäss wesentlich auf der Voraussetzung, dass die absoluten Beträge der beiden Grössenfolgen u_ν, v_ν ebenfalls convergente Reihen bilden, dass also mit anderen Worten die Reihen U, V *unbedingt* convergiren. Nachdem nun seit jener Zeit auch die *bedingt* convergirenden Reihen — besonders in Folge von Dirichlet's Arbeiten über die Fourier'sche Reihe — längst eine zunehmende Bedeutung für die Analysis erlangt und alsbald zu der Erkenntniss geführt haben, dass sie keineswegs ohne weiteres den für unbedingt convergirende Reihen geltenden Gesetzen unterliegen, hätte es nahe gelegen, jenes Multiplicationsgesetz auch auf bedingt convergente Reihen auszudehnen, bezw. seine Gültigkeitsgrenze nach dieser Seite hin festzustellen. Nichts destoweniger ist erst vor verhältnissmässig kurzer Zeit (1875) der Beweis jener Regel von Herrn Mertens**) wenigstens in soweit verallgemeinert worden, als dabei nur noch die *unbedingte* Convergenz der *einen* Reihe vorausgesetzt wird, während die andere nur bedingt zu convergiren braucht. Ein anderer Beweis des Multiplicationssatzes in dieser verallgemeinerten Form findet sich auch in dem

*) Cours d'Analyse algébrique, Paris 1821.

**) Crelle's Journal, Bd. 79.

vor etwa zwei Jahren erschienenen Lehrbuche der Differential- und Integralrechnung von Herrn Worpitzky. Hingegen beobachten nun in Betreff der Anwendung jenes Satzes auf *zwei* bedingt convergente Reihen die mir bekannten Monographien über Reihentheorie*) und selbst die grösseren und angesehensten Compendien der Analysis**) entweder vollständiges Stillschweigen oder sie fertigen diesen Fall ganz kurz mit mehr oder weniger unzureichenden, ja falschen Bemerkungen ab. So heisst es z. B. in dem vielfach verbreiteten Schlömilch'schen Lehrbuche der algebraischen Analysis — unter Hinweisung auf das Beispiel $u_\nu = v_\nu = \frac{(-1)^\nu}{\sqrt{\nu+1}}$ — schlechthin, dass für bedingt convergente Reihen der Multiplicationssatz seine Gültigkeit verliert, was offenbar geradezu falsch ist, da der Satz in der That in unendlich vielen, dem angeführten Beispiele ganz ähnlichen Fällen (nämlich bei geeigneten alternirenden Reihen mit abnehmenden Gliedern) richtig bleibt, wie sich im folgenden zeigen wird; während die etwas vorsichtigere Bemerkung, die sich in Bertrand's grossem Traité de Calcul différentiel unter Anführung eines ähnlichen Beispieles findet, dass nämlich der Satz für bedingt convergente Reihen versagen *kann*, abgesehen von ihrer völlig nichtssagenden Unbestimmtheit, vor allem darum fehlerhaft ist, weil sie stillschweigend die an der betreffenden Stelle mit keinem Worte bewiesene Behauptung wie etwas selbstverständliches involvirt, dass der Satz in gewissen Fällen auch für bedingt convergente Reihen überhaupt Geltung behält. Denn allerdings folgt aus der Divergenz der oben mit W bezeichneten Reihe bei dem angeführten und ähnlichen Beispielen mit voller Evidenz, dass W in solchen Fällen nicht das Product der beiden endlichen Summen U und V darstellen kann, der Satz also falsch wird; wohingegen es keineswegs ohne weiteres als feststehend angesehen werden darf, dass der Satz im Falle der Convergenz von W auch richtig bleiben muss, d. h. dass die Summe der Reihe W dann auch wirklich gleich dem Producte $U \cdot V$ ist. Diese letztere Beweislücke findet man auch in dem bereits oben erwähnten Worpitzky'schen Lehrbuche, obschon gerade dieses gegenüber den zahlreichen, bisher im Gebrauche befindlichen Compendien eine grössere Präcision der Definitionen und Strenge der Beweise mit besonderer Rücksichtnahme auf neuere Anschauungen und Methoden sichtlich anstrebt. Gerade hier, wo die *eventuelle Gültigkeit* des Multiplicationssatzes für zwei bedingt convergente Reihen

*) Mit Ausnahme der sogleich noch näher zu betrachtenden Abhandlung von Abel über die Binominalreihe. Crelle's J. Bd. I.

**) Mit Ausnahme desjenigen von Herrn Lipschitz, welcher den Abel'schen Gedankengang reproducirt.

meines Wissens zum ersten Male wenigstens an einem Beispiele erörtert wird, findet sich ausser dem soeben bei Bertrand bemerkten, noch ein zweiter, nicht minder wesentlicher Fehler: es wird nämlich an der Stelle, wo es sich darum handelt die bedingt convergente Reihe

$$\sum_1^\infty \frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu^{1-m}} \quad \left(m < \frac{1}{2}\right)$$

mit sich selbst zu multipliciren, in welchem Falle die Productreihe in der Form

$$W = \sum_1^\infty w_\nu \quad \text{wo} \quad w_\nu = (-1)^{\nu-1} \sum_1^\nu \frac{1}{\{\varkappa(\nu+1-\varkappa)\}^{1-m}}$$

erscheint, aus dem Verschwinden von $\lim w_\nu$ für $\nu = \infty$ ohne weiteres die Convergenz der Reihe W gefolgert*) — eine Schlussweise, die, unbeschadet der zufälligen Richtigkeit des Resultates, an und für sich

---

*) a. a. O. S. 188—190. Beiläufig sei noch bemerkt, dass der Beweis für das Verschwinden von $\lim w_\nu$ für $\nu = \infty$, welchen Herr W. führt, indem er zeigt, dass $\lim \frac{|w_\nu|}{\nu^{2m-1}} = \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{m-1}\,dx$ — also gleich einem bekannten Euler'schen Integrale und daher für $m > 0$ endlich ist, sich bei weitem einfacher, durchaus elementar gestalten lässt.

Setzt man $1 - m = \frac{1}{2} + \varepsilon$, wo $\varepsilon > 0$ sein muss, da $m < \frac{1}{2}$ sein sollte, so wird:

$$|w_{2\mu}| = \sum_1^{2\mu} \frac{1}{\{\varkappa\cdot(2\mu+1-\varkappa)\}^{\frac{1}{2}+\varepsilon}} = 2\sum_1^{\mu} \frac{1}{\{\varkappa(2\mu+1-\varkappa)\}^{\frac{1}{2}+\varepsilon}}$$

$$< 2\sum_1^{\mu} \frac{1}{\varkappa^{1+\varepsilon}(2\mu+1-\varkappa)^{\varepsilon}} < 2\cdot\frac{1}{\mu^{\varepsilon}}\sum_1^{\mu}\frac{1}{\varkappa^{1+\varepsilon}}$$

$$|w_{2\mu-1}| = \sum_1^{2\mu-1} \frac{1}{\{\varkappa(2\mu-\varkappa)\}^{\frac{1}{2}+\varepsilon}} = 2\sum_1^{\mu} \frac{1}{\{\varkappa(2\mu-\varkappa)\}^{\frac{1}{2}+\varepsilon}} - \frac{1}{\{\mu\cdot\mu\}^{\frac{1}{2}+\varepsilon}}$$

$$< 2\sum_1^{\mu} \frac{1}{\varkappa^{1+\varepsilon}(2\mu-\varkappa)^{\varepsilon}} < 2\cdot\frac{1}{\mu^{\varepsilon}}\sum_1^{\mu}\frac{1}{\varkappa^{1+\varepsilon}}$$

folglich für $\mu = \infty$

$$\lim |w_{2\mu}| = \lim |w_{2\mu-1}| = 0$$

— da

$$\lim \sum_1^{\mu} \frac{1}{\varkappa^{1+\varepsilon}}$$

als Summe einer convergenten Reihe endlich ist und $\lim \frac{1}{\mu^{\varepsilon}} = 0$ wird.

offenbar falsch ist, da Reihen mit alternirenden Zeichen, auch wenn der Quotient je zweier aufeinanderfolgender Glieder mit unendlich wachsendem Index gegen die Einheit und jene selbst gegen Null convergiren, sehr wohl divergent sein können, wie z. B. die Reihe:

$$\sum_1^\infty{}' \left\{ \frac{1}{(\nu+1)^{\frac{1}{2}}-1} - \frac{1}{(\nu+1)^{\frac{1}{2}}+1} \right\}$$

zeigt, welche offenbar die eben angegebenen Bedingungen erfüllt, aber nichtsdestoweniger $= 2\sum_1^\infty{}' \frac{1}{\nu}$, also divergent ist.

Was nun aber jenen erst erwähnten, so allgemein verbreiteten Fehler betrifft (nämlich die völlige Abwesenheit des Beweises, dass die Convergenz der Reihe W auch bei nur bedingter Convergenz der Reihen U, V die Gültigkeit der Beziehung $W = U \cdot V$ nach sich zieht), so muss derselbe um so auffälliger erscheinen, als schon Abel in der oben bereits genannten Abhandlung über die Binomialreihe diesen Punkt vollständig erledigt hat.*) Nachdem er nämlich den Multiplicationssatz zunächst, wie Cauchy, für unbedingt convergente Potenzreihen bewiesen, zieht er daraus auf Grund eines zuvor von ihm bewiesenen Satzes über die Stetigkeit von Potenzreihen einen Schluss auf die Anwendbarkeit der nämlichen Regel auch für solche Grenzwerthe der Variablen, für welche die betreffenden Reihen nur noch bedingt zu convergiren brauchen. Vielleicht ist der Umstand, dass dieser wichtige Zusatz, weder durch die Ausdrucksweise, noch durch den Druck irgendwie hervorgehoben, geradezu wie zum Beweise des schon durch Cauchy bekannten Hauptsatzes gehörig erscheint, dass ausserdem auch der Hauptsatz selbst durch ein paar völlig sinnentstellende Druckfehler verdunkelt ist, die Veranlassung dazu gewesen, ihn der Kenntniss oder doch wenigstens der genügenden Beachtung zahlreicher mathematischer Schriftsteller zu entziehen. Es mag daher nicht überflüssig erscheinen, jenen Abel'schen Beweis in möglichst gedrängter Fassung hier nochmals zu reproduciren. Die Grundlage dazu bildet, wie bemerkt, der zuerst von Abel**), später auch von Dirichlet***) in etwas präciserer Form bewiesene Satz, dass die Summe einer Potenzreihe:

$$\mathfrak{P}(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

welche für positive reelle $x < 1$ als unbedingt convergent, für ebensolche $x > 1$ als divergent vorausgesetzt wird, bei der Annäherung der wachsenden Variablen x an den Werth 1 dem Werthe

*) a. a. O. S. 316.

**) a. a. O. S. 314.

***) Journal des Mathématiques von Liouville, 2e série, T. VII, p. 253.

$$s = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots$$

stetig zustrebt, sofern diese letztere Reihe eine endliche Summe besitzt (gleichgültig ob sie unbedingt oder bedingt convergirt) — dergestalt dass also

$$\lim \mathfrak{P}(1-h) = s, \qquad (\text{für } h = 0)$$

zu setzen ist. —

Seien nun

$$(1) \qquad U = \sum_0^\infty u_\nu, \qquad V = \sum_0^\infty v_\nu$$

zwei bedingt convergente Reihen, so werden die beiden Potenzreihen

$$(2) \qquad \mathfrak{P}_u(x) = \sum_0^\infty u_\nu x^\nu, \qquad \mathfrak{P}_v(x) = \sum_0^\infty v_\nu x^\nu$$

für $|x| < 1$ unbedingt, für $|x| = 1$ bedingt convergiren, für $|x| > 1$ divergiren. Dann ist zunächst nach dem soeben citirten Abel-Dirichlet'schen Satze

$$(3) \qquad \lim_{h=0} \mathfrak{P}_u(1-h) = U, \qquad \lim_{h=0} \mathfrak{P}_v(1-h) = V.$$

Nun gilt, wenn $|x| < 1$, für die beiden unbedingt convergenten Potenzreihen (2) die Cauchy'sche Regel, also

$$\mathfrak{P}_u(x)\,\mathfrak{P}_v(x) = \sum_0^\infty w_\nu x^\nu, \qquad \text{wo} \quad w_\nu = \sum_0^\nu u_\varkappa v_{\nu-\varkappa}$$

und da die rechte Seite dieser Gleichung als Potenzreihe erscheint, so wird wiederum nach jenem Satze

$$\lim_{h=0} \{\mathfrak{P}_u(1-h) \cdot \mathfrak{P}_v(1-h)\} = \sum_0^\infty w_\nu$$

sein, sofern die Reihe der w_ν convergirt, was allerdings nicht der Fall zu sein braucht, sondern in jedem Falle erst besonders festzustellen ist. Folglich wird dann nach (3) in der That

$$UV = \sum u_\nu \cdot \sum v_\nu = \sum w_\nu = W$$

und es lässt sich jetzt daher das Multiplicationsgesetz, wenn man noch die oben erwähnte Verallgemeinerung des Herrn Mertens mit in Betracht zieht, folgendermassen aussprechen:

Das Product der beiden convergenten Reihen $\sum_0^\infty u_\nu$, $\sum_0^\infty v_\nu$

ist darstellbar durch eine Reihe von der Form

$$\sum_0^\infty w_\nu \quad — \text{ wo } \quad w_\nu = \sum_0^\nu u_\varkappa v_{\nu-\varkappa}$$

sofern diese letztere convergirt. Dies findet immer statt,

wenn mindestens *eine* der beiden Reihen $\sum u_\nu$, $\sum v_\nu$ *unbedingt* convergirt, braucht jedoch nicht der Fall zu sein und muss daher jedesmal erst besonders bewiesen werden, wenn *beide* Reihen nur bedingt convergiren.

Ist nun auch hiermit die Gültigkeitsgrenze des Multiplicationssatzes für bedingt convergente Reihen völlig unzweideutig bestimmt, nämlich auf die blosse Convergenzuntersuchung der Reihe $\sum w_\nu$ zurückgeführt, so ist damit freilich für die Praxis so gut wie gar nichts erreicht, insofern es im allgemeinen nicht möglich sein wird, die Convergenz oder Divergenz jener Reihe festzustellen. Fasst man zunächst die Frage ins Auge, ob die Reihe W stets auch nur bedingt oder ob sie eventuell auch unbedingt convergiren kann, so scheint die Möglichkeit *unbedingter* Convergenz a priori keineswegs ausgeschlossen — wie ja analog auch durch Addition oder Subtraction zweier nur bedingt convergenter Reihen sehr wohl eine unbedingt convergente Reihe resultiren kann*). In der That — wenn die u_ν, v_ν Grössen mit beliebig wechselnden Zeichen bedeuten, so erscheint es sehr wohl denkbar, dass die Grössen $w_\nu = u_0 v_\nu + u_1 v_{\nu-1} + \cdots + u_\nu v_0$ dem absoluten Betrage nach tief genug herabsinken, um die Reihe $\sum w_\nu$ zu einer unbedingt convergenten zu machen. Allerdings war es mir bisher nicht möglich, an irgend einem bestimmten derartigen Falle die unbedingte Convergenz zu constatiren, und es dürfte dies — wenn es überhaupt solche Fälle giebt, was ja immerhin als fraglich erscheinen muss — wegen der zusammengesetzten Beschaffenheit der Reihenglieder w_ν eben nur sehr schwer gelingen. Bietet nun aber hier schon die Anwendung der in grosser Vollständigkeit vorhandenen und fast für jeden denkbaren Fall ausreichenden Kriterien für unbedingte Convergenz derartige Schwierigkeiten, so wird natürlich eine ausreichende Prüfung jener Reihe W auf etwaige bedingte Convergenz im allgemeinen um so weniger durchführbar sein, als hier zu der Schwierigkeit, die etwa vorhandenen Kriterien auf die complicirten Reihenglieder w_ν anzuwenden, noch der ausserordentliche Mangel an Kriterien für bedingte Convergenz hinzukommt. Denn — sieht man von der Fourier'schen und ähnlichen speciellen Reihen ab — so besitzen wir

*) Andererseits muss hier freilich bemerkt werden, dass — im Gegensatz zur Addition und Subtraction — die Multiplication einer unbedingt und einer bedingt convergenten Reihe auch eine *unbedingt* convergente Reihe liefern kann, ja dass das nämliche sogar unter Umständen bei der Anwendung der Multiplicationsregel auf eine unbedingt convergente und eine *divergente* Reihe eintreten kann. Da hierauf meines Wissens noch niemals aufmerksam gemacht worden ist, so gebe ich für beide Behauptungen weiter unten ein allgemein gehaltenes Beispiel — (s. Gl. (22) bis (27)).

meines Wissens nach zur Feststellung der bedingten Convergenz einer Reihe nicht mehr als zwei einigermassen allgemeine Kriterien, die aber ihrer Natur nach immerhin nur in einer sehr beschränkten Anzahl von Fällen eine Anwendung gestatten: das eine, welches sich auf Reihen mit alternirenden, niemals zunehmenden und schliesslich gegen Null convergirenden Gliedern bezieht (oder etwas allgemeiner auf solche Reihen, deren Glieder gruppenweise zusammengefasst unbedingt convergente Reihen bilden); das andere, von Dirichlet herrührend*), lehrt aus der Beschaffenheit zweier Grössenfolgen $a_0, a_1, a_2, \cdots$ und $b_0, b_1, b_2, \cdots$ auf die Convergenz der Reihe $a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots$ schliessen. Weitere allgemeine Kriterien habe ich bisher auch in neueren Arbeiten über diesen Gegenstand nicht aufgefunden: so fördert z. B. auch die ganz speciell auf Kriterien für bedingte Convergenz ausgehende Abhandlung des Herrn Du Bois-Reymond: „Neue Lehrsätze über die Summen unendlicher Reihen“**) trotz mancher neuen, bemerkenswerthen Gesichtspunkte (dahin gehört namentlich die Einführung der sogenannten Unbestimmtheitsgrenzen einer Reihe) als einziges wirkliches Convergenzkriterium schliesslich doch nur wieder jenes Dirichlet'sche (nebst einigen einfachen Modificationen desselben) zu Tage.

Für unseren besonderen Fall — die Untersuchung der Reihe $\sum' w_\nu$ — wird nun aber wegen der Bildungsweise der Reihenglieder w_ν jenes letztere (das Dirichlet'sche) Kriterium wohl niemals, das erstere nur in sehr wenigen Fällen anwendbar sein — (in der That kommt es schon für den nächstliegenden Fall, nämlich wenn die zu multiplicirenden Reihen $\sum' u_\nu$, $\sum' v_\nu$ selbst alternirende, niemals zunehmende Glieder besitzen, im allgemeinen nicht in Betracht: siehe weiter unten sub IV) — und es muss somit als wünschenswerth erscheinen, für die eventuelle Gültigkeit der Cauchy'schen Regel bei der Multiplication bedingt convergenter Reihen irgend welche directeren, unmittelbar auf der Beschaffenheit der Grössen u_ν, v_ν basirenden Kriterien zu besitzen. Derartige Kriterien sollen nun im folgenden zunächst für eine ziemlich allgemeine Kategorie hierher gehöriger Fälle aufgestellt und dann insbesondere auf die Multiplication alternirender Reihen angewandt werden; eine Anwendung auf gewisse trigonometrische Reihen soll dann bei einer späteren Gelegenheit erfolgen.

---

*) Lionville's Journal, 2e série, T. VII. Auch in den Vorlesungen über Zahlentheorie, herausgegeben von Dedekind § 143.

**) Antrittsprogramm zur Uebernahme der ordentl. Professur in Freiburg.

II.

Ich beweise zunächst den folgenden allgemeinen Satz über Reihenmultiplication, welcher die Cauchy'sche Regel und deren Mertens'sche Verallgemeinerung als specielle Fälle enthält, zugleich aber auch die Multiplication zahlreicher bedingt convergenter Reihen umfasst — und zwar unabhängig von dem oben angeführten, mit Hülfe von Stetigkeitsbetrachtungen gewonnenen Abel'schen Resultate. Derselbe lautet:

Sind

$$U = \sum_0^\infty u_\nu, \qquad V = \sum_0^\infty v_\nu \tag{1}$$

convergente Reihen, von denen eine z. B. U die Eigenschaft besitzt, dass ihre Glieder in gewisse Gruppen von stets endlich bleibender Anzahl zusammengefasst eine *unbedingt* convergente Reihe bilden, dass also

$$U = (u_0 + u_1 + \cdots + u_{m_1}) + (u_{m_1+1} + \cdots + u_{m_2}) \cdots \tag{2}$$

unbedingt convergirt, so hat man

$$UV = \sum_0^\infty w_\nu = W, \text{ wo } w_\nu = \sum_0^\nu u_\varkappa v_{\nu-\varkappa}, \tag{3}$$

sofern die Reihe $\sum_0^\infty u_\nu v_\nu$ unbedingt convergirt und diese Eigenschaft behält, falls man beliebig viele der Grössen u_ν, v_ν durch solche mit höherem Index ersetzt*).

(Dass dieser Satz jene genannten in der That mit umfasst, ist leicht ersichtlich. Denn ist $\sum_0^\infty u_\nu$ — also auch

$$(u_0 + \cdots + u_{m_1}) + (u_{m_1} + \cdots + u_{m_2}) + \cdots$$

— *unbedingt* convergent, so gilt das Gleiche von jeder Reihe der Form $\sum_0^\infty u_{\nu+\nu_1}$ (wo die positive ganze Zahl ν_1 mit ν beliebig variiren kann), folglich auch von $\sum_0^\infty u_\nu v_\nu$, $\sum_0^\infty u_{\nu+\nu_1} v_\nu$, $\sum_0^\infty u_\nu v_{\nu+\nu_1}$, sodass also sämmtliche Voraussetzungen des oben ausgesprochenen Satzes befriedigt sind.

*) Dies ist so zu verstehen, dass immerhin kein Index mehr als einmal vorkommen soll. — Die u_ν, v_ν sind, sofern nicht das Gegentheil besonders bemerkt, als beliebig complex zu denken.

Was übrigens jenen Zusatz betrifft, dass die unbedingte Convergenz erhalten bleiben soll, sofern man in der Reihe $\sum u_\nu v_\nu$ beliebig viele der Factoren u_ν oder v_ν durch solche mit höherem Index ersetzt, so sei ausdrücklich bemerkt, dass derselbe keineswegs etwas selbstverständliches enthält. Sei z. B.

$$U = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{\sqrt{7}} - \frac{1}{\sqrt{8}} + \cdots$$

$$\cdots = \sum_0^\infty{}_\nu \left\{ \frac{1}{4\nu+1} - \frac{1}{4\nu+2} + \frac{1}{\sqrt{4\nu+3}} - \frac{1}{\sqrt{4\nu+4}} \right\},$$

so ist U bedingt convergent und zwar in der Weise, dass

$$U = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{7}} - \frac{1}{\sqrt{8}}\right) + \cdots$$

$$\cdots = \sum_0^\infty{}_\nu \left(\frac{1}{4\nu+1} - \frac{1}{4\nu+2}\right) + \sum_0^\infty{}_\nu \left(\frac{1}{\sqrt{4n+3}} - \frac{1}{\sqrt{4n+4}}\right)$$

unbedingt convergirt. Setzt man nun

$$V = \frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \cdots$$

$$\cdots = \sum_0^\infty{}_\nu \left\{ \frac{1}{\sqrt{4\nu+1}} - \frac{1}{\sqrt{4\nu+2}} + \frac{1}{4\nu+3} - \frac{1}{4\nu+4} \right\},$$

sodass also V ebenfalls bedingt convergirt, so ist

$$\sum_0^\infty{}_\nu u_\nu v_\nu = \sum_0^\infty{}_\nu \frac{1}{(\nu+1)^{\frac{1}{2}}}$$

unbedingt convergent, während z. B.

$$\sum_0^\infty{}_\nu |u_\nu v_{\nu+1}| = \sum_0^\infty{}_\nu \left\{ \frac{1}{(4\nu+1)(4\nu+3)} + \frac{1}{(4\nu+2)(4\nu+4)} + \frac{1}{\sqrt{(4\nu+3)(4\nu+5)}} + \frac{1}{\sqrt{(4\nu+4)(4\nu+6)}} \right\}$$

(und allgemein $\sum_0^\infty{}_\nu |u_\nu v_{\nu+4\varkappa+1}|$, $\sum_0^\infty{}_\nu |u_\nu v_{\nu+4\varkappa+2}|$ etc.) divergirt. In der That ist auch in diesem Falle das Product UV nicht durch die Reihe W darstellbar, da letztere divergirt (oder vielmehr oscillirt), wie noch aus später anzustellenden Betrachtungen deutlich werden wird. Damit soll übrigens keineswegs gesagt sein, dass die Convergenz der Reihe $\sum |u_\nu v_\nu|$ bezw. $\sum |u_\nu v_{\nu+\nu_1}|$, $\sum |u_{\nu+\nu_1} v_\nu|$ eine *nothwendige* Bedingung für die Convergenz der Productreihe W bildet: dass dies

thatsächlich nicht der Fall ist, werden ebenfalls spätere Betrachtungen zeigen). —

Um nun den Beweis des oben ausgesprochenen Satzes nicht in überflüssiger Weise zu compliciren, soll angenommen werden, dass U in der folgenden Form:

$$U = (u_0 + u_1) + (u_2 + u_3) + \cdots + (u_{2n} + u_{2n+1}) + \cdots$$

unbedingt convergire: der Gang des Beweises wird zeigen, dass derselbe sich ohne weiteres auch anwenden lässt, wenn die unbedingt convergente Form der Reihe U aus Gruppen von beliebig vielen Gliedern (auch mit wechselnder, aber stets endlich bleibender Anzahl) besteht.

Da offenbar eine nothwendige Bedingung für die Convergenz der Reihe

$$W = w_0 + w_1 + \cdots + w_n + \cdots$$

darin liegen wird, dass man hat

$$\lim_{n=\infty} w_n = 0$$

so mag zunächst gezeigt werden, dass diese Beziehung erfüllt ist. Man hat

$$(4) \quad \begin{cases} w_{2m} = u_0 v_{2m} + u_1 v_{2m-1} + \cdots + u_{2m-1} v_1 + u_{2m} v_0 \\ \qquad = \sum_0^m{}^x u_x v_{2m-x} + \sum_0^m{}^x u_{2m-x} v_x - u_m v_m, \\ w_{2m+1} = u_0 v_{2m+1} + u_1 v_{2m} + \cdots + u_{2m} v_1 + u_{2m+1} v_0 \\ \qquad = \sum_0^m{}^x u_x v_{2m+1-x} + \sum_0^m u_{2m+1-x} v_x \end{cases}$$

und daher

$$|w_{2m}| < \sum_0^m{}^x |u_x v_{2m-x}| + \sum_0^m{}^x |u_{2m-x} v_x| + |u_m v_m|,$$

$$|w_{2m+1}| < \sum_0^m{}^x |u_x v_{2m+1-x}| + \sum_0^m{}^x |u_{2m+1-x} v_x|$$

oder, wenn man $2m = n$ bezw. $2m + 1 = n$ setzt, beide Fälle umfassend:

$$(4a) \qquad |w_n| < \sum_0^m{}^x |u_x v_{n-x}| + \sum_0^m{}^x |u_{n-x} v_x| + |u_m v_m|$$

wo $m = \frac{n}{2}$ bezw. $\frac{n-1}{2}$ $\left(\text{also } = E\left(\frac{n}{2}\right), \text{ wenn } E(x) \text{ die grösste in } x \text{ enthaltene ganze Zahl bezeichnet}\right)$. Da mit unendlich wachsendem n auch m ins Unendliche wächst, also u_m, v_m wegen der vorausgesetzten

Convergenz der Reihen $\sum u_\nu$, $\sum v_\nu$ der Null zustreben müssen, so gilt das Gleiche von $|u_m v_n|$ und es kommt daher lediglich darauf an, zu zeigen, dass

$$\sum_0^m{}^{\varkappa} |u_\varkappa v_{n-\varkappa}|, \qquad \sum_0^m{}^{\varkappa} |u_{n-\varkappa} v_\varkappa|$$

durch Wahl von n bezw. m beliebig klein gemacht werden können. Sei r eine sogleich näher zu charakterisirende, positive ganze Zahl $< m$, so hat man

$$\sum_0^m{}^{\varkappa} |u_\varkappa v_{n-\varkappa}| = \sum_0^r{}^{\varkappa} |u_\varkappa v_{n-\varkappa}| + \sum_{r+1}^m{}^{\varkappa} |u_\varkappa v_{n-\varkappa}| .$$

Da nun $\sum |u_\varkappa v_{\varkappa+\varkappa_1}|$ wo $\varkappa_1$ eine nicht negative, mit $\varkappa$ beliebig variirende ganze Zahl bezeichnet (doch so, dass alle $\varkappa + \varkappa_1$ verschieden), nach Voraussetzung convergirt, so lässt sich r als *feste endliche* ganze Zahl so bestimmen, dass

$$\sum_{r+1}^m{}^{\varkappa} |u_\varkappa v_{\varkappa+\varkappa_1}| < \frac{\varepsilon}{2}$$

(wo ε eine Grösse von vorgeschriebener Kleinheit) und folglich, indem man $\varkappa_1 = n - 2\varkappa$ setzt (in welchem Falle ja $\varkappa_1 = 2m - 2\varkappa$ bezw. $= 2m + 1 - 2\varkappa$ in der That nie negativ wird, wenn $\varkappa$ die Werthe $r + 1$ bis m durchläuft)

$$\sum_{r+1}^m{}^{\varkappa} |u_\varkappa v_{n-\varkappa}| < \frac{\varepsilon}{2}$$

wird, so dass zunächst

$$\sum_0^m{}^{\varkappa} |u_\varkappa v_{n-\varkappa}| < \sum_0^r{}^{\varkappa} |u_\varkappa v_{n-\varkappa}| + \frac{\varepsilon}{2}$$

für jedes noch so grosse n bezw. m. Für hinlänglich grosse n kann man jetzt aber jede der Grössen $|v_{n-\varkappa}|$ d. h. $|v_n|, |v_{n-1}|, \cdots, |v_{n-r}$ und folglich auch die aus einer *bestimmten endlichen* Gliederzahl bestehende Summe $\sum_0^r{}^{\varkappa} |u_\varkappa v_{n-\varkappa}|$ beliebig klein, also etwa $< \frac{\varepsilon}{2}$ machen, sodass in der That durch Wahl von n

$$\sum_0^m{}^{\varkappa} |u_\varkappa v_{n-\varkappa}| < \varepsilon$$

wird. Da das nämliche in ganz analoger Weise für den Ausdruck $\sum_0^m{}^{\varkappa} |u_{n-\varkappa} v_\varkappa|$ sich ergiebt, so folgt

$$\lim_{n=\infty} w_n = 0$$

sodass also jene nothwendige Bedingung für die Convergenz der Reihe W erfüllt ist.

Setzt man nun

$$W_n = (w_0 + w_1 + \cdots + w_n)$$

so wird jetzt zu zeigen sein, dass dieser Ausdruck für unendlich wachsende n dem Grenzwerthe $U \cdot V$ zustrebt. Hierbei ist es nun vortheilhaft, die Indices n nach dem Modul 4 — also in die Formen $4m$, $4m+1$, $4m+2$, $4m+3$ — zu sondern, und zwar genügt es dann offenbar, den obigen Nachweis für irgend einen dieser Indices, etwa für W_{4m} zu führen, da ja

$$W_{4m+1} - W_{4m} = w_{4m+1}, \quad W_{4m+2} - W_{4m} = w_{4m+1} + w_{4m+2},$$
$$W_{4m+3} - W_{4m} = w_{4m+1} + w_{4m+2} + w_{4m+3}$$

nach dem eben gesagten durch hinlänglich grosse Wahl von m beliebig klein gemacht werden können. Setzt man dann

$$U_n = (u_0 + u_1 + \cdots + u_n), \qquad V_n = (v_0 + v_1 + \cdots + v_n)$$

so werden U_n, V_n den nämlichen Grenzen U, V zustreben, gleichgültig ob man n als gerade oder ungerade Zahl über alle Grenzen wachsen lässt und es wird daher der Beweis für die Gültigkeit der Beziehung $W = U \cdot V$ erbracht sein, sobald gezeigt wird, dass die Differenz

$$D_{4m} = W_{4m} - U_{2m} V_{2m}$$

durch Wahl hinlänglich grosser Werthe von m beliebig klein gemacht werden kann. Man hat nun

$$\begin{aligned}
(5)\quad D_{4m} &= u_0 v_0 + (u_0 v_1 + u_1 v_0) + \cdots + (u_0 v_{2m} + u_1 v_{2m-1} + \cdots + u_{2m} v_0) \\
&\quad + (u_0 v_{2m+1} + \cdots + u_{2m+1} v_0) + \cdots + (u_0 v_{4m} + \cdots + u_{4m} v_0) \\
&\quad - (u_0 + u_1 + \cdots + u_{2m})(v_0 + v_1 + \cdots + v_{2m}) \\
&= u_0 (v_{2m+1} + v_{2m+2} + \cdots + v_{4m}) + u_1 (v_{2m+1} + \cdots + v_{4m-1}) \\
&\quad + u_2 (v_{2m+1} + \cdots + v_{4m-2}) + u_3 (v_{2m+1} + \cdots + v_{4m-3}) + \cdots \\
&\quad + u_{2m-2} (v_{2m+1} + v_{2m+2}) + u_{2m-1} v_{2m+1} \\
&\quad + u_{2m+1} (v_0 + \cdots + v_{2m-1}) + u_{2m+2} (v_0 + \cdots + v_{2m-2}) \\
&\quad + u_{2m+3} (v_0 + \cdots + v_{2m-3}) + \cdots\cdots\cdots \\
&\quad + u_{4m-2} (v_0 + v_1 + v_2) + u_{4m-1} (v_0 + v_1) + u_{4m} v_0 \\
&= (u_0 + u_1)(v_{2m+1} + \cdots + v_{4m-1}) + (u_2 + u_3)(v_{2m+1} + \cdots + v_{4m-3}) \\
&\qquad + \cdots + (u_{2m-2} + u_{2m-1}) v_{2m+1} \\
&\quad + (u_{2m} + u_{2m+1})(v_0 + \cdots + v_{2m-1}) + (u_{2m+2} + u_{2m+3})(v_0 + \cdots + v_{2m-3}) \\
&\qquad + \cdots + (u_{4m-2} + u_{4m-1})(v_0 + v_1) \\
&\quad + u_0 v_{4m} + u_2 v_{4m-2} + \cdots + u_{2m-2} v_{2m+2} + u_{2m} v_{2m} + u_{2m+2} v_{2m-2} \\
&\qquad + \cdots\cdots\cdots\cdots + u_{4m} v_0 \\
&\quad - u_{2m} (v_0 + \cdots + v_{2m})
\end{aligned}$$

mithin

$$|D_{4m}| < \sum_{0}^{m-1}{}^{x} |u_{2x} + u_{2x+1}|\ |v_{2m+1} + \cdots + v_{4m-(2x+1)}|$$
$$+ \sum_{0}^{m-1}{}^{x} |u_{2m+2x} + u_{2m+2x+1}|\ |v_0 + \cdots + v_{2m-(2x+1)}|$$
$$+ \sum_{0}^{2m}{}^{x} |u_{2x}\, v_{4m-2x}|$$
$$+ |u_{2m}|\ |v_0 + \cdots + v_{2m}|.$$

Da die Reihen $\sum |u_{2x} + u_{2x+1}|$, $\sum v_x$ convergent sind, so hat man für jedes noch so grosse m

$$\sum_{0}^{m-1}{}^{x} |u_{2x} + u_{2x+1}| < G, \quad |v_0 + v_1 + \cdots + v_{4m-x}| < G.$$

Man kann nun ferner eine Zahl M so bestimmen, dass für jedes $m \geqq M$

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{0}^{m-1}{}^{x} |u_{2m+2x} + u_{2m+2x+1}| \\ = |u_{2m} + u_{2m+1}| + \cdots + |u_{4m-2} + u_{4m-1}| &< \tfrac{\varepsilon}{4G} \\ |v_{2m+1} + v_{2m+2} + \cdots + v_{4m-(2x+1)}| &< \tfrac{\varepsilon}{4G} \\ |u_{2m}| &< \tfrac{\varepsilon}{4G} \\ \sum_{0}^{2m}{}^{x} |u_{2x}\, v_{4m-2x}| &< \tfrac{\varepsilon}{4} \end{aligned}\right\} \text{wo } \varepsilon \text{ eine Grösse von vorgeschriebener Kleinheit bedeutet.}$$

(NB. Die letzte Ungleichung ergiebt sich unmittelbar daraus, dass, wie oben gezeigt, $\sum_{0}^{4m}{}^{x} |u_x\, v_{4m-x}|$ durch Wahl von m beliebig klein gemacht werden kann, und die hier in Betracht kommende Summe einen Theil dieser Summe bildet). Alsdann wird aber:

$$|D_{4m}| < \tfrac{\varepsilon}{4G} \sum_{0}^{m-1}{}^{x} |u_{2x} + u_{2x+1}| + G \sum_{0}^{m-1}{}^{x} |u_{2m+2x} + u_{2m+2x+1}| + \tfrac{\varepsilon}{4}$$
$$+ \tfrac{\varepsilon}{4G} |v_0 + \cdots + v_{2m}|$$

d. h. schliesslich

$$|D_{4m}| < \varepsilon.$$

Damit ist der oben ausgesprochene Satz bewiesen — zunächst allerdings für den besonderen Fall, dass die Reihe U in der Gruppirung

$\sum_{0}^{\infty} u_{2\nu} + u_{2\nu-1}$ unbedingt convergirt: die an Gl. 5. sich knüpfenden Umformungen und Schlüsse sind aber offenbar mit geringen Modificationen auf jeden Fall übertragbar, in welchem die Reihe U in irgend welcher anderen Gruppirung unbedingt convergirt, sofern nur die Gliederzahl einer jeden Gruppe — die im übrigen auch beliebig wechseln darf — stets endlich bleibt. Der betreffende Satz gilt somit in der angegebenen Form ganz allgemein.*)

III.

Der vorige Satz gab eine *hinreichende* Bedingung für die Anwendbarkeit der Multiplicationsregel auf zwei unendliche Reihen, wie ja in Wahrheit auch der ursprüngliche Cauchy'sche Satz und dessen Mertens'sche Verallgemeinerung lediglich solche hinreichende Bedingungen liefern. Andererseits wird in jedem Falle als *nothwendige* Bedingung die Beziehung

$$\lim_{\nu=\infty} u_\nu = 0$$

zu gelten haben.

Dagegen erscheint es wenig wahrscheinlich, dass sich geradezu die *nothwendigen und hinreichenden* Bedingungen hierfür allgemein werden fixiren lassen, sofern man die beiden Reihen U, V von vornherein keiner weiteren Bedingung unterwirft, als derjenigen, überhaupt zu convergiren. Anders gestaltet sich das Verhältniss, sobald man von vornherein für die Beschaffenheit der Reihen U, V gewisse Einschränkungen festsetzt. Hier ist nun zunächst der Fall bemerkenswerth, dass die eine der beiden Reihen — etwa wiederum U — die Eigenschaft besitzt, in der Form

$$(6) \qquad U = \frac{1}{2}u_0 + \frac{1}{2}(u_0 + u_1) + \frac{1}{2}(u_1 + u_2) + \cdots$$
$$= \frac{1}{2}u_0 + \frac{1}{2}\sum_{0}^{\infty}(u_\nu + u_{\nu+1})$$

unbedingt zu convergiren (wie das z. B. der Fall ist, wenn die u_ν niemals zunehmende Grössen mit alternirenden Zeichen sind), während V convergent, im übrigen aber keinerlei Bedingung unterworfen sein soll.

---

*) Dass die Convergenz der Reihe W eine *unbedingte* wird, sobald Σu_ν, Σv_ν unbedingt zu convergiren, ergiebt sich unmittelbar daraus, dass in diesem Falle alle Betrachtungen richtig bleiben, wenn man von vornherein mit $\Sigma' u_\nu$, $\Sigma' v_\nu$ operirt, und dass die Glieder der so entstehenden Productreihe numerisch über denen der Reihe W liegen.

Alsdann lässt sich zeigen, dass die für die Convergenz der Reihe W nothwendige Bedingung $\lim w_\nu = 0$ zugleich auch die hinreichende ist. Setzt man nämlich

$$\tfrac{1}{2}(u_\nu + u_{\nu+1}) = u'_{\nu+1} \text{ und insbesondere } \tfrac{1}{2} u_0 = u_0',$$

sodass also

$$U = u_0' + u_1' + \cdots + u_n' + \cdots$$

so wird man diese — der Voraussetzung nach — unbedingt convergirende Reihe auf Grund des vorigen (bez. des Mertens'schen) Satzes mit der eventuell nur bedingt convergenten Reihe

$$V = v_0 + v_1 + \cdots + v_n + \cdots,$$

in der Weise multipliciren können, dass

$$UV = \sum_0^\infty w'_\nu \qquad \text{— wo} \qquad w'_\nu = \sum_0^\nu u'_\varkappa v_{\nu-\varkappa}$$

wird. Man hat nun, wenn wiederum

$$\sum_0^\nu u_\varkappa v_{\nu-\varkappa} = w_\nu$$

gesetzt wird:

$$w_0' = u_0' v_0 = \tfrac{1}{2} u_0 v_0 = \tfrac{1}{2} w_0$$

und für $n \geqq 1$

$$w_n' = \tfrac{1}{2} u_0 v_n + \tfrac{1}{2}(u_0 + u_1) v_{n-1} + \tfrac{1}{2}(u_1 + u_2) v_{n-2} + \cdots + \tfrac{1}{2}(u_{n-1} + u_n) v_0$$

$$= \tfrac{1}{2}(w_{n-1} + w_n),$$

sodass sich ergiebt

$$(7) \qquad UV = \tfrac{1}{2} w_0 + \tfrac{1}{2}(w_0 + w_1) + \tfrac{1}{2}(w_1 + w_2) + \cdots$$

$$= \tfrac{1}{2} w_0 + \tfrac{1}{2} \sum_0^\infty (w_\nu + w_{\nu+1}) = W',$$

eine Darstellung des Productes jener beiden Reihen, welche also in *jedem* Falle — ohne Hinzutreten irgend welcher weiteren Bedingung Gültigkeit hat. Setzt man jetzt

$$W_n' = \tfrac{1}{2} w_0 + \tfrac{1}{2}(w_0 + w_1) + \cdots + \tfrac{1}{2}(w_{n-1} + w_n)$$

$$= w_0 + w_1 + \cdots + w_{n-1} + \tfrac{1}{2} w_n,$$

dagegen

$$W_n = w_0 + w_1 + \cdots + w_n,$$

so hat man

$$W_n = W_n' + \tfrac{1}{2} w_n = W_{n+1}' - \tfrac{1}{2} w_{n+1} \tag{8}$$

und man wird daher W' — also $U \cdot V$ — dann und *nur* dann durch die ins Unendliche fortgesetzte Reihe

$$W = w_0 + w_1 + \cdots + w_n + \cdots$$

ersetzen dürfen, wenn

$$\lim_{n=\infty} w_n = \lim_{n=\infty} w_{n+1} = 0. \tag{9}$$

Strebt $|w_n|$ mit unendlich wachsendem n einem von Null verschiedenen Grenzwerthe a zu, so wird offenbar, da in Folge der Convergenz der Reihe (7) unter allen Umständen

$$\lim_{n=\infty} (w_n + w_{n+1}) = 0$$

sein muss (wie sich auch unmittelbar aus dem betreffenden Ausdrucke ersehen lässt), w_n beständig das Zeichen wechseln und $\lim |w_n| = a$ völlig *bestimmt* sein müssen, nämlich entweder endlich oder doch so unendlich, dass $\lim \{|w_n| - |w_{n+1}|\} = 0$ wird. Da nun

$$W_n = W_n' + \tfrac{1}{2} w_n, \qquad W_{n+1} = W_{n+1}' + \tfrac{1}{2} w_{n+1},$$

so wird in diesem Falle — da w_n und w_{n+1} für hinlänglich grosse n entgegengesetztes Zeichen haben müssen —

$$W = W' \pm \tfrac{a}{2} = UV \pm \tfrac{a}{2} \tag{10}$$

sein, es oscillirt also die Reihe in den Grenzen $\left(UV - \frac{a}{2}\right)$ und $\left(UV + \frac{a}{2}\right)$. Hiernach ergiebt sich also zunächst folgender Satz:

Sind die beiden Reihen $U = \sum_0^\infty u_\nu$, $V = \sum_0^\infty v_\nu$ convergent und die Glieder der einen — z. B. von U — so beschaffen, dass $\sum_0^\nu (u_\nu + u_{\nu+1})$ unbedingt convergirt, so besitzt $\lim_{n=\infty} |w_n| = \lim_{n=\infty} \left| \sum_0^n u_\varkappa v_{n-\varkappa} \right|$ einen *bestimmten* Werth a, der Null, endlich oder unendlich sein kann, und es ist dann in jedem Falle

$$W = \sum_0^\infty w_\nu = UV \pm \tfrac{a}{2}.$$

Es wird also insbesondere die Beziehung $\lim_{n=\infty} |w_n| = 0$ die

nothwendige und hinreichende Bedingung dafür bilden, dass die Reihe W convergirt und das Product UV darstellt*), und es sind für $\lim_{n=\infty} |w_n| = a$ (von Null verschieden) $UV - \frac{a}{2}$ und $UV + \frac{a}{2}$ die Unbestimmtheitsgrenzen der in diesem Falle oscillirenden Reihe W.

(Beiläufig sei noch bemerkt, dass wegen $\lim |w_{2n} + w_{2n+1}| = 0$ — welche Beziehung, wie bereits erwähnt, immer statt hat — die Relation $\lim |w_{2n}| = 0$ auch immer die andere $\lim |w_{2n+1}| = 0$ nach sich zieht — und umgekehrt: es genügt daher gegebenen Falls das Verschwinden von $\lim w_n$ für $n = \infty$ an einem geraden *oder* ungeraden Index nach beliebiger Wahl festzustellen).

Es kommt nun darauf an, aus dieser nothwendigen und hinreichenden Bedingung einfachere Formen von hinreichenden Bedingungen als Kriterien für die Gültigkeit der Beziehung $W = UV$ abzuleiten.

Eine solche hinreichende Bedingung liefert der zuerst bewiesene, allgemeinere Multiplicationssatz: die Convergenz der Reihe $\sum |u_\nu v_\nu|$ bezw. $\sum |u_{\nu+\nu_1} v_\nu|$, $\sum |u_\nu v_{\nu+\nu_1}|$ — deren Stattfinden fast in jedem denkbaren Falle mit Hülfe der gewöhnlichen, für unbedingte Convergenz geltenden Kriterien zu eruiren ist.

Nehmen die Grössen u_ν, v_ν mit wachsendem Index niemals oder doch nur in der Weise zu, dass $\frac{u_{n+r}}{u_n}$, $\frac{v_{n+r}}{v_n}$ niemals ins Unendliche wachsen, so genügt offenbar schon die Convergenz der Reihe $\sum |u_\nu v_\nu|$ — da in diesem Falle mit der Reihe $\sum |u_\nu v_\nu|$ stets auch jene anderen von der Form $\sum |u_{\nu+\nu_1} v_\nu|$, $\sum |u_\nu v_{\nu+\nu_1}|$ convergiren werden. Hat man ferner $u_\nu = a_\nu x_\nu$, $v_\nu = b_\nu y_\nu$, wo $\frac{a_{n+r}}{a_n}$, $\frac{b_{n+r}}{b_n}$ niemals, $\frac{x_{n+r}}{x_n}$, $\frac{y_{n+r}}{y_n}$ beliebig oft unendlich werden dürfen, doch so, dass die x_ν, y_ν selbst beständig unter einer endlichen Grenze liegen, so bildet offenbar die Convergenz der einen Reihe $\sum |a_\nu b_\nu|$ eine hinreichende Bedingung: denn mit dieser Reihe werden zunächst auch $\sum |a_{\nu+\nu_1} b_\nu|$, $\sum |a_\nu b_{\nu+\nu_1}|$ und folglich — da x_ν, y_ν nie ins Unendliche wachsen — auch $\sum |a_{\nu+\nu_1} x_{\nu+\nu_1} b_\nu y_\nu|$, $\sum |a_\nu x_\nu b_{\nu+\nu_1} y_{\nu+\nu_1}|$, d. h. schliesslich $\sum |u_{\nu+\nu_1} v_\nu|$, $\sum |u_\nu v_{\nu+\nu_1}|$ convergiren. (Diese Betrachtung findet z. B. Anwendung

*) Durch diesen Satz wird nachträglich allerdings die oben angefochtene Schlussweise des Herrn Worpitzky gerechtfertigt.

auf trigonometrische Reihen, wenn also etwa $v_\nu = b_\nu \sin \nu\varphi$ oder $= b_\nu \cos \nu\varphi$ etc.).

Von wesentlich anderem Charakter als das eben betrachtete Kriterium ist das folgende. Ich behaupte:

Wenn U, V convergente Reihen von der oben betrachteten Beschaffenheit sind, so hat man

$$UV = W = \sum_0^\infty w_\nu,$$

wo wiederum

$$w_\nu = \sum_0^\nu u_\varkappa v_{\nu-\varkappa},$$

wenn ausser der Reihe $V = \sum v_\nu$ auch noch $V' = \sum (-1)^\nu v_\nu$ convergirt. (Selbstverständlich ist in diesem Falle auch

$$UV' = \sum_0^\infty w'_\nu \quad \text{— wo} \quad w'_\nu = \sum_0^\nu (-1)^{\nu-\varkappa} u_\nu v_{\nu-\varkappa},$$

da ja zwischen V und V' Reciprocität stattfindet).

Man hat nämlich identisch

$$\begin{aligned} u_0 v_n + u_1 v_{n-1} + u_2 v_{n-2} + \cdots + u_n v_0 &= (u_0 + u_1) v_n + (u_1 + u_2)(v_{n-1} - v_n) \\ &\quad + (u_2 + u_3)(v_{n-2} - v_{n-1} + v_n) + \cdots \\ &\quad \cdots + (u_n + u_{n+1})(v_0 - v_1 + \cdots \pm v_n) - u_{n+1}(v_0 - v_1 + \cdots \pm v_n) \end{aligned}$$

oder

$$w_n = \sum_0^n (u_\varkappa + u_{\varkappa+1})(v_{n-\varkappa} - v_{n-\varkappa+1} + \cdots \pm v_n) - u_{n+1}(v_0 - v_1 + \cdots \pm v)$$

und daher:

$$|w_n| < \sum_0^n |u_\varkappa + u_{\varkappa+1}|\,|v_{n-\varkappa} - v_{n-\varkappa+1} + \cdots \pm v_n| + |u_{n+1}|\,|v_0 - v_1 + \cdots \pm v_n|$$

oder, wenn r eine positive ganze Zahl $< n$ bezeichnet,

$$\begin{aligned} |w_n| &< \sum_0^r |u_\varkappa + u_{\varkappa+1}|\,|v_{n-\varkappa} - v_{n-\varkappa+1} + \cdots \pm v_n| \\ &\quad + \sum_{r+1}^n |u_\varkappa + u_{\varkappa+1}|\,|v_{n-\varkappa} - v_{n-\varkappa+1} + \cdots \pm v_n| + |u_{n+1}|\,|v_0 - v_1 + \cdots \pm v_n|. \end{aligned}$$

Da die Reihe $\sum (-1)^\nu v_\nu$ convergirt, so hat man für jedes noch so grosse n und jedes beliebige $\varkappa \leqq n$

$|v_{n-\varkappa} - v_{n-\varkappa+1} + \cdots \pm v_n| < G$ (wo G eine endliche Grösse bedeutet).

Daher wird

$$\sum_{r+1}^{n}{}^{x} |u_x + u_{x+1}| \, |v_{n-x} - v_{n-x+1} + \cdots \pm v_n| < G \cdot \sum_{r+1}^{n}{}^{x} |u_x + u_{x+1}| .$$

In Folge der Convergenz von $\sum |u_x + u_{x+1}|$ lässt sich nun aber ein *bestimmter endlicher* Werth r fixiren, dergestalt, dass

$$\sum_{r+1}^{n}{}^{x} |u_x + u_{x+1}| < \tfrac{\varepsilon}{3G}$$

(wo ε eine Grösse von vorgeschriebener Kleinheit)

wird — wie gross auch n werden möge, dergestalt, dass zunächst

$$|w_n| < \sum_{0}^{r}{}^{x} |u_x + u_{x+1}| \, |v_{n-x} - v_{n-x+1} + \cdots \pm v_n| + |u_{n+1}| \, |v_0 - v_1 + \cdots \pm v_n| + \tfrac{\varepsilon}{3} .$$

Setzt man jetzt $\sum_{0}^{r}{}^{x} |u_x + u_{x+1}| = G'$ und bestimmt eine Zahl N so, dass für $n \geqq N$

$|v_{n-x} - v_{n-x+1} + \cdots \pm v_n| < \frac{\varepsilon}{3G'}$, (wo x die feste endliche Zahl r nicht überschreitet)

$|u_{n+1}| < \frac{\varepsilon}{3G'}$

so wird

$$|w_n| < \varepsilon \quad \text{oder} \quad \lim_{n=\infty} |w_n| = 0 ,$$

woraus dann nach dem vorigen Satze in der That die Convergenz der Reihe $\sum w_\nu = W$ und die Gültigkeit der Beziehung $W = UV$ sich ergiebt.

Der eben bewiesene Satz erscheint besonders darum von Interesse, weil er deutlich erkennen lässt, *wie weit* die zuvor betrachtete Bedingung — nämlich die Convergenz der Reihe $\sum |u_\nu v_\nu|$ — davon entfernt ist, eine *nothwendige* für die Convergenz der Reihe W zu sein. Seien nämlich a_ν, b_ν positive, mit wachsendem Index niemals zunehmende und für $\nu = \infty$ der Null zustrebende Grössen, dann sind die folgenden Reihen

$$a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots = \sum_{0}^{\infty}{}^{\nu} (-1)^\nu a_\nu ,$$

$$b_0 - b_2 + b_4 - b_6 + \cdots = \sum_{0}^{\infty}{}^{\nu} (-1)^\nu b_{2\nu} ,$$

$$b_1 - b_3 + b_5 - b_7 + \cdots = \sum_0^\infty (-1)^\nu b_{2\nu+1}$$

convergent und zwar genügt offenbar die erstere den für U festgesetzten Bedingungen, sodass man also setzen kann

$$U = \sum_0^\infty (-1)^\nu a_\nu \quad \text{d. h.} \quad u_\nu = (-1)^\nu a_\nu. \tag{11a}$$

Ferner werden die beiden letzteren sowohl addirt wie subtrahirt wieder eine convergente Reihe bilden; setzt man laher

$$V = \sum_0^\infty (-1)^\nu (b_{2\nu} + b_{2\nu+1}) = b_0 + b_1 - b_2 - b_3 + b_4 + b_5 - b_6 - b_7 \cdots \tag{11b}$$

d. h. $v_{2\nu} = (-1)^\nu b_{2\nu}$, $v_{2\nu+1} = (-1)^\nu b_{2\nu+1}$, so wird sowohl diese Reihe, als auch die folgende

$$V' = \sum_0^\infty (-1)^\nu (b_{2\nu} - b_{2\nu+1}) = \sum_0^\infty (v_{2\nu} - v_{2\nu+1}) = \sum_0^\infty (-1)^\nu v_\nu$$

convergiren, sodass also auch V den Bedingungen des eben bewiesenen Satzes genügt: es wird somit, wie im übrigen die a_ν, b_ν sonst auch beschaffen sein mögen, in diesem Fall W convergent und $= UV$ sein. Wählt man nun aber die a_ν, b_ν so, dass sie für $\nu = \infty$ sehr langsam der Null zustreben — etwa so wie $\frac{1}{\lg \nu}$ oder noch langsamer — so wird nicht nur $\sum a_\nu b_\nu$ divergent sein, sondern es wird sogar keine noch so hohe angebbare Potenz der Grössen $(a_\nu b_\nu)$ eine convergente Reihe liefern: es kann mit anderen Worten die denkbar stärkste Divergenz der Reihe $\sum |u_\nu v_\nu|$ die Convergenz der Reihe W nicht hindern. Der Grund dieses Verhaltens ist leicht ersichtlich. Das Verschwinden von $\lim |w_n| = 0$ für $n = \infty$ bildet allerdings die nothwendige und — in den hier betrachteten Fällen — auch hinreichende Bedingung für die Convergenz der Reihe W. Die Convergenz der Reihe $\sum |u_\nu v_\nu|$ (mit den betreffenden Nebenbedingungen) diente aber nicht bloss dazu, das Verschwinden von $\lim |w_n| = \lim \left| \sum_0^n u_\varkappa v_{n-\varkappa} \right|$, sondern vielmehr dasjenige von $\lim \sum_0^n |u_\varkappa v_{n-\varkappa}|$ zu constatiren (s. oben Gl. 4a), während es doch gerade der eigenthümliche Charakter der *bedingten* Convergenz von $\sum u_\nu$, $\sum v_\nu$ mit sich bringt, dass

$$\lim \left| \sum_0^n{}^{\varkappa} u_\varkappa v_{n-\varkappa} \right|$$

in unendlich vielen Fällen der Null zustrebt, wo $\lim \sum_0^n{}^{\varkappa} |u_\varkappa v_{n-\varkappa}|$ endlich oder unendlich gross wird. —

Eine weitere Form einer *hinreichenden* Bedingung für die Convergenz der Reihe W lässt sich aus der nothwendigen und hinreichenden Bedingung $\lim w_n = 0$ (für $n = \infty$) folgendermassen ableiten. Wir unterwerfen zunächst die Grössen u_ν, v_ν der Beschränkung, dass die Quotienten $\frac{u_{n+r}}{u_n}$, $\frac{v_{n+r}}{v_n}$ niemals ins Unendliche wachsen, dass also, wenn zur Abkürzung

$$|u_n| = a_n, \qquad |v_n| = b$$

gesetzt wird, für jedes noch so grosse n und r

$$\frac{a_{n+r}}{a_n} < G, \qquad \frac{b_{n+r}}{b_n} < G'$$

bleibt, wo G, G' bestimmte endliche positive Grössen bedeuten.

Man hat nun

$$w_{2n+1} = \sum_0^{2n+1}{}^{\varkappa} u_\varkappa v_{2n+1-\varkappa} = \sum_0^n{}^{\varkappa} u_\varkappa v_{2n+1-\varkappa} + \sum_0^n{}^{\varkappa} v_\varkappa u_{2n+1-\varkappa},$$

also

$$|w_{2n+1}| \leqq \sum_0^n{}^{\varkappa} a_\varkappa b_{2n+1-\varkappa} + \sum_0^n{}^{\varkappa} b_\varkappa a_{2n+1-\varkappa}$$

und daher sicherlich

$$|w_{2n+1}| < [b]_{n+1}^{2n+1} \sum_0^n{}^{\varkappa} a_\varkappa + [a]_{n+1}^{2n+1} \sum_0^n{}^{\varkappa} b_\varkappa,$$

wenn $[a]_{n+1}^{2n+1}$ $[b]_{n+1}^{2n+1}$ die Maximalwerthe aus den Grössenreihen

$$a_{n+1} \cdots a_{2n+1} \text{ bezw. } b_{n+1} \cdots b_{2n+1}$$

bezeichnen. Da aber in jedem Falle

$$[a]_n^{2n+1} = \frac{[a]_n^{2n+1}}{a_n} \cdot a_n < G \cdot a_n$$

und analog

$$[b]_n^{2n+1} < G' \cdot b_n$$

sein muss, so wird

$$|w_{2n+1}| < G' \cdot b_n \sum_0^n{}^{\varkappa} a_\varkappa + G \cdot a_n \sum_0^n{}^{\varkappa} a_\varkappa$$

und daraus ergiebt sich, dass offenbar eine *hinreichende* Bedingung für das Verschwinden von $\lim_{n=\infty} |w_{2n-1}|$, also auch für die Convergenz der Reihe W, darin liegen wird, dass

$$(12) \qquad \lim b_n \sum_0^n{}^{\varkappa} a_\varkappa = \lim a_n \sum_0^n{}^{\varkappa} b_\varkappa = 0 \quad (\text{für } n=\infty).$$

Treten auch hierbei an die Stelle der früheren einzigen Bedingung $\lim w_n = 0$ jetzt deren zwei, so sind dieselben doch von wesentlich einfacherer Gestalt, da die Summen $\sum_0^n{}^{\varkappa} a_\varkappa$, $\sum_0^n{}^{\varkappa} b_\varkappa$ in gewissen Fällen sich durch geschlossene Ausdrücke darstellen lassen, und alsdann die in Betracht kommenden Grenzwerthe (11) direct berechnet werden können (vgl. das etwas weiter unten angeführte Beispiel).

Die Bedingung (11) beruhte gerade so, wie die früher aufgestellte Forderung der Convergenz von $\sum |u_\nu v_\nu| = \sum a_\nu b_\nu$, auf dem Verschwinden — nicht bloss von $\lim |w_n| = \lim \left| \sum_0^n{}^{\varkappa} u_\varkappa v_{n-\varkappa} \right|$ — sondern von $\lim \sum_0^n{}^{\varkappa} |u_\varkappa v_{n-\varkappa}| = \sum_0^n{}^{\varkappa} a_\varkappa b_{n-\varkappa}$. Sie ist also, wie jene erste Bedingung, eine äusserst enge: immerhin lässt sich zeigen, dass sie trotz der gleichen Grundlage *minder* eng ist, also jene erste, dass mit anderen Worten die Convergenz von $\sum a_\nu b_\nu$ — wenn, wie geschehen $\frac{a_{n+r}}{a_n}$, $\frac{b_{n+r}}{b_n}$ als niemals unendlich vorausgesetzt werden — stets die Beziehungen (12) nach sich zieht, aber nicht umgekehrt.

Der erste Theil dieser Behauptung ist leicht ersichtlich. Denn setzt man

$$b_n \sum_0^n{}^{\varkappa} a_\varkappa = b_n \sum_0^r{}^{\varkappa} a_\varkappa + b_n \sum_{r+1}^n{}^{\varkappa} a_\varkappa, \qquad \text{wo } r < n,$$

so lässt sich zunächst wieder ein bestimmter endlicher Index r fixiren, sodass

$$b_n \sum_{r+1}^n{}^{\varkappa} a_\varkappa = \sum_{r+1}^n{}^{\varkappa} \frac{b_n}{b_\varkappa} \cdot a_\varkappa b_\varkappa < G \sum_{r+1}^n{}^{\varkappa} a_\varkappa b_\varkappa < \frac{\varepsilon}{2}$$

(wo ε eine Grösse von vorgeschriebener Kleinheit)

wird, da man in Folge der Convergenz von $\sum a_\varkappa b_\varkappa$ für ein bestimmtes r und jedes noch so grosse n: $\sum_{r+1}^n{}^{\varkappa} a_\varkappa b_\varkappa < \frac{\varepsilon}{2G}$ machen kann. Alsdann wird aber zunächst

$$b_n \sum_0^n{}_x a_x < b_n \sum_0^r{}_x a_x + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Setzt man jetzt die endliche Summe $\sum_0^r{}_x a_x = A$, so kann man n gross genug wählen, dass $b_n < \frac{\varepsilon}{2A}$, also schliesslich

$$b_n \sum_0^n{}_x a_x < \varepsilon$$

wird. Das analoge gilt dann offenbar für den Ausdruck $a_n \sum_0^n{}_x b_x$.

Dass dieser Satz jedoch nicht umkehrbar ist (was darin seinen Grund hat, dass $\frac{a_{n+r}}{a_n}$, $\frac{b_{n+r}}{b_n}$ für endliches n und unbegrenzt wachsendes r gegen Null convergiren müssen, also aus dem Verhalten von

$$a_n \sum_0^n{}_x b_x = \sum_0^n{}_x \frac{a_n}{a_x} \cdot a_x b_x$$

nicht auf dasjenige von $\sum_0^n{}_x a_x b_x$ geschlossen werden kann), mag das folgende Beispiel lehren.

Es werde der r-fach iterirte Logarithmus von n mit $\lg^{(r)} n$ bezeichnet, sodass

$$\lg^{(1)} n = \lg n, \quad \lg^{(2)} n = \lg \lg n \cdots \lg^{(r)} n = \lg \lg^{(r-1)} n$$

und ausserdem

$$n \lg^{(1)} n \lg^{(2)} n \cdots \lg^{(r)} n = \psi_r(n), \qquad (r > 1)$$

gesetzt, sodass also insbesondere

$$\psi_1(n) = n \lg^{(1)} n, \qquad \psi_r(n) = \psi_{r-1}(n) \lg^{(r)} n$$

wird. Alsdann soll

$$a_n = b_n = \frac{1}{\sqrt{\psi_r(a+n)}}$$

sein, wo a eine positive ganze Zahl bedeutet, gross genug, dass $\psi_r(a)$ — also um so mehr $\psi_r(a+n)$ — positiv reell wird, und wo alsdann unter der Quadratwurzel stets deren positiver reeller Werth verstanden werden soll. In diesem Falle ist die Reihe

$$\sum_0^\infty{}_\nu a_\nu b_\nu = \sum_0^\infty{}_\nu \frac{1}{\psi_r(a+\nu)} = \sum_a^\infty{}_\nu \frac{1}{\psi_r(\nu)}$$

bekanntlich divergent: nichtsdestoweniger lässt sich zeigen, dass hier der Ausdruck

$$p_n = b_n \sum_0^n{}^x a_x = a_n \sum_0^n{}^x b_x = \frac{1}{\sqrt{\psi_r(a+n)}} \sum_0^n{}^x \frac{1}{\sqrt{\psi_r(a+x)}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\psi_r(a+n)}} \sum_a^{a+n}{}^x \frac{1}{\psi_r(x)}$$

für unendlich wachsendes n den Grenzwerth Null besitzt. Man hat nämlich von einer *bestimmten endlichen* Zahl m ab:

$$\lg^{(r)} n > 1 \qquad \text{sofern} \qquad n \geqq m$$

und da ausserdem

$$\lg^{(1)} n > \lg^{(2)} n > \cdots > \lg^{(r)} n,$$

so wird

$$\psi_r(n) = n \lg^{(1)} n \lg^{(2)} n \cdots \lg^{(r)} n > n$$

also

$$\frac{1}{\psi_r(n)} < \frac{1}{n} \qquad \text{(immer für } n \geqq m\text{)}.$$

Theilt man daher p_n folgendermassen in zwei Theile

$$p_n = \frac{1}{\sqrt{\psi_r(a+n)}} \sum_a^{m-1}{}^x \frac{1}{\sqrt{\psi_r(x)}} + \frac{1}{\sqrt{\psi_r(a+n)}} \sum_m^{a+n}{}^x \frac{1}{\sqrt{\psi_r(x)}},$$

so ist zunächst

$$p_n < \frac{1}{\sqrt{\psi_r(a+n)}} \sum_a^{m-1}{}^x \frac{1}{\sqrt{\psi_r(x)}} + \frac{1}{(a+n)^{\frac{1}{2}} \left\{\lg^{(1)}(a+n) \cdots \lg^{(r)}(a+n)\right\}^{\frac{1}{2}}} \sum_m^{a+n}{}^x \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}.$$

Wächst jetzt n ins Unendliche, so strebt offenbar das erste Glied der rechten Seite der Null zu, da der erste Factor für $n = \infty$ den Grenzwerth Null, der zweite einen von n unabhängigen, unveränderlichen endlichen Werth besitzt. Was sodann das zweite Glied betrifft, so hat man nur zu beachten, dass

$$\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}} \sum_1^n{}^x \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \sum_1^n{}^x \frac{\frac{1}{n}}{\left(\frac{x}{n}\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\Delta x}{(\Delta x)^{\frac{1}{2}}} + \frac{\Delta x}{(2\Delta x)^{\frac{1}{2}}} + \cdots + \frac{\Delta x}{(1-\Delta x)^{\frac{1}{2}}} + \frac{\Delta x}{1^{\frac{1}{2}}},$$

wenn $\frac{1}{n} = \Delta x$ gesetzt wird, dass also für $n = \infty$ und $\lim \frac{1}{n} = dx$

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}} \sum_1^n{}^x \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \int_0^1 \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}} = 2 \tag{13}$$

und wenn man hierin $a + n$ statt n schreibt

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{(a+n)^{\frac{1}{2}}} \sum_1^{a+n}{}^x \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = 2.$$

Hieraus folgt dann aber in der That, dass auch das zweite Glied in dem Ausdrucke p_n für $n = \infty$ verschwindet, dass somit

$$\text{(14a)} \qquad \lim_{n=\infty} p_n = \lim_{n=\infty} \frac{1}{\sqrt{\psi_r(a+n)}} \sum_{a}^{a+n} \frac{1}{\psi_r(x)} = 0.$$

Der Einfachheit halber wurden hier a_n, b_n einander gleich und a als positive ganze Zahl von gewisser Grösse angenommen: der Gang des Beweises bleibt aber offenbar genau derselbe, wenn man etwa setzt

$$a_n = \{\psi_r(a+n)\}^{-\frac{1}{2}}, \qquad b_n = \{\psi_s(b+n)\}^{-\frac{1}{2}},$$

wo r, s verschiedene positive ganze Zahlen, a, b beliebige positive oder negative und nicht nothwendig ganzzahlige Grössen bedeuten, und es wird also auch hier

$$\text{(14b)} \qquad \lim_{n=\infty} \{\psi_s(b+n)\}^{-\frac{1}{2}} \sum_{0}^{n} \{\psi_s(a+x)\}^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \lim_{n=\infty} \{\psi_r(a+n)\}^{-\frac{1}{2}} \sum_{0}^{n} \{\psi_s(b+x)\}^{-\frac{1}{2}} = 0$$

sein, obschon die Reihe

$$\sum_{0}^{\infty} \{\psi_r(a+n) \cdot \psi_s(b+n)\}^{-\frac{1}{2}}$$

wiederum divergirt.

Hiernach wird also für

$$u_n = (-1)^n \{\psi_r(a+n)\}^{-\frac{1}{2}}, \qquad v_n = (-1)^n \{\psi_s(b+n)\}^{-\frac{1}{2}}$$

die Productreihe $W = U \cdot V$ auf Grund der erfüllten Bedingung (12) bezw. 14b) convergiren, obschon die Reihe $\sum u_r v_r$ divergent ist.

IV.

Wir unterwerfen jetzt die zu multiplicirenden Reihen $U = \sum u_r$, $\sum v_r$ weiteren Einschränkungen. Es soll — gerade so wie bisher U — jetzt auch V so beschaffen sein, dass die Grössen $(v_r + v_{r+1})$ eine unbedingt convergente Reihe bilden. Setzt man dann wie früher

$$\frac{1}{2}(u_r + u_{r+1}) = u'_{r+1} \quad \text{und insbesondere} \quad \frac{1}{2} u_0 = u_0',$$

desgleichen analog

$$\frac{1}{2}(v_r + v_{r+1}) = v'_{r+1} \quad \text{„} \quad \text{„} \quad \frac{1}{2} v_0 = v_0',$$

so liefern die beiden *unbedingt* convergenten Reihen

$$U = u_0' + u_1' + \cdots + u_n' + \cdots,$$
$$V = v_0' + v_1' + \cdots + v_n' + \cdots$$

als Product die nach der ursprünglichen Cauchy'schen Regel ebenfalls *unbedingt* convergente Reihe

$$UV = W' = w_0' + w_1' + \cdots + w_n' + \cdots,$$

wo

$$w_n' = \sum_0^n{}_x u_x' v_{n-x}' = \tfrac{1}{4} u_0 (v_{n-1} + v_n) + \tfrac{1}{4}(u_0 + u_1)(v_{n-2} + v_{n-1}) + \cdots$$
$$+ \tfrac{1}{4}(u_{n-2} + u_{n-1})(v_0 + v_1) + \tfrac{1}{4}(u_{n-1} + u_n) v_0$$

oder, wenn man wieder

$$w_n = \sum_0^n{}_x u_x v_{n-x} \quad \text{setzt,}$$

$w_n' = \frac{1}{4}(w_{n-2} + 2w_{n-1} + w_n)$ und insbesondere $w_0' = \frac{1}{4} w_0$,

$$w_1' = \tfrac{1}{4}(2w_0 + w_1).$$

Es ist somit zunächst

$$(15)\quad UV = W' = \tfrac{1}{4} w_0 + \tfrac{1}{4}(2w_0 + w_1) + \tfrac{1}{4}(w_0 + 2w_1 + w_2)$$
$$+ \tfrac{1}{4}(w_1 + 2w_2 + w_3) + \cdots$$
$$= \tfrac{3}{4} w_0 + \tfrac{1}{4} w_1 + \tfrac{1}{4} \sum_0^\infty{}_\nu (w_\nu + 2w_{\nu+1} + w_{\nu+2})$$

in *jedem* Falle unbedingt convergent. Ist jetzt wiederum die Bedingung $\lim_{n=\infty} w_n = 0$ erfüllt, so wird man diese Reihe auch durch die in's Unendliche fortgesetzte Reihe

$$(16)\quad W = w_0 + w_1 + \cdots + w_n + \cdots$$

ersetzen können. Es fragt sich nun: hat diese Reihe W die analoge Eigenschaft wie die erzeugenden Reihen U, V — nämlich in der Form

$$(17)\quad W = \tfrac{1}{2} w_0 + \tfrac{1}{2}(w_0 + w_1) + \tfrac{1}{2}(w_1 + w_2) + \cdots + \tfrac{1}{2}(w_{n-1} + w_n) + \cdots$$

unbedingt zu convergiren? Im allgemeinen — d. h. sofern die u_ν, v_ν keinen weiteren Specialbeschränkungen unterliegen — offenbar *nicht*. Denn aus (15) folgt zunächst nur, dass in jedem Falle die folgenden beiden Reihen

$$W' = \tfrac{1}{2} w_0 + \tfrac{1}{2}\{w_0 + 2w_1 + w_2\} + \tfrac{1}{2}\{w_2 + 2w_3 + w_4\} + \cdots$$
$$= \tfrac{1}{2}(2w_0 + w_1) + \tfrac{1}{2}\{w_1 + 2w_2 + w_3\} + \tfrac{1}{2}\{w_3 + 2w_4 + w_5\} + \cdots$$

oder anders geschrieben:

$$W' = \tfrac{1}{2}w_0 + \tfrac{1}{2}\{w_0 + w_1) + (w_1 + w_2)\} + \tfrac{1}{2}\{(w_2 + w_3) + (w_3 + w_4)\} + \cdots$$
$$= \tfrac{1}{2}\{w_0 + (w_0 + w_1)\} + \tfrac{1}{2}\{(w_1 + w_2) + (w_2 + w_3)\}$$
$$+ \tfrac{1}{2}\{(w_3 + w_4) + (w_4 + w_5)\} + \cdots$$

unbedingt convergiren, sodass also hier nicht die unmittelbar aus den Gliedern $w_0, w_1, w_2, \cdots$, sondern erst die aus den Summen $(w_0 + w_1)$, $(w_1 + w_2)$, $(w_2 + w_3) \cdots$ gebildeten Reihen die betreffende charakteristische Eigenschaft der Reihen $\sum u_\nu$, $\sum v_\nu$ besitzen. Das Hinzutreten der Bedingung $\lim_{n=\infty} w_n = 0$ reicht nun gerade hin, um die Reihe (16) zu einer bedingt convergenten, keineswegs aber dazu, um die Reihe (17) zu einer unbedingt convergenten zu machen. Es werden also, wenn dies der Fall sein soll, u_ν, v_ν noch irgend welchen besonderen Bedingungen genügen müssen: doch wird es auch hier wiederum kaum möglich sein, die *nothwendigen und hinreichenden* Bedingungen hierfür allgemein anzugeben, während sich andererseits, wenn man die u_ν, v_ν von vornherein noch geeigneten Einschränkungen unterwirft, leicht *hinreichende* Bedingungen angeben lassen. Es soll hier der besondere Fall betrachtet werden, dass die u_ν, v_ν niemals zunehmende Grössen mit alternirendem Zeichen sind. Dann, soll gezeigt werden, ist die unbedingte Convergenz von $\sum u_\nu v_\nu$ eine hinreichende Bedingung nicht bloss — wie sich aus dem früheren ergiebt — für die bedingte Convergenz der Reihe (16), sondern für die unbedingte von (17). Sei also

$$u_\nu = (-1)^\nu a_\nu, \quad v_\nu = (-1)^\nu b_\nu,$$

wo die a_ν, b_ν wesentlich positiv, $a_\nu \geqq a_{\nu+\varkappa}$, $b_\nu \geqq b_{\nu+\varkappa}$ und $\lim_{\nu=\infty} a_\nu = \lim_{\nu=\infty} b_\nu = 0$, ausserdem $\sum a_\nu$, $\sum b_\nu$ divergent, hingegen $\sum |u_\nu v_\nu| = \sum a_\nu b_\nu$ convergent. Setzt man dann

$$w_\nu = (-1)^\nu c_\nu, \quad \text{also} \quad c_\nu = \sum_0^\nu a_\varkappa b_{\nu-\varkappa},$$

so wird

$$(18) \qquad UV = W = c_0 - c_1 + c_2 - c_3 + \cdots = \sum_0^\infty (-1)^\nu c_\nu.$$

Da hiernach

$$|w_\nu| = c_\nu = \sum_0^\nu a_\varkappa b_{\nu-\varkappa} > a_0 b_\nu + a_\nu b_0$$

und somit

$$\sum_0^\infty |w_\nu| = \sum_0^\infty c_\nu > a_0 \sum_0^\infty b_\nu + b_0 \sum_0^\infty a_\nu$$

jedenfalls divergent ist: so ist der oben (siehe I. am Ende) als *im allgemeinen* für möglich hingestellte Fall, dass die aus der Multiplication zweier bedingt convergenter Reihen hervorgehende Reihe $\sum w_\nu$ *unbedingt* convergiren könne, *hier* ein für allemal ausgeschlossen. Dagegen soll gezeigt werden, dass W in der Form

$$W = \tfrac{1}{2} c_0 + \tfrac{1}{2}(c_0 - c_1) + \tfrac{1}{2}(c_1 - c_2) + \cdots = \tfrac{1}{2} c_0 + \tfrac{1}{2} \sum_0^\infty (c_\nu - c_{\nu+1}),$$

oder, was auf dasselbe hinauskommt, dass die beiden Reihen

$$\sum_0^\infty \delta_{2\nu}, \quad \sum_1^\infty \delta_{2\nu-1}, \quad \text{wo } \delta_\nu = c_\nu - c_{\nu+1}$$

unbedingt convergiren. Man hat nämlich

$$(19) \quad \begin{cases} c_{2\nu-1} = a_0 b_{2\nu-1} + a_1 b_{2\nu-2} + \cdots + a_{\nu-1} b_\nu \\ \qquad + b_0 a_{2\nu-1} + b_1 a_{2\nu-2} + \cdots + b_{\nu-1} a_\nu, \\ c_{2\nu} = a_0 b_{2\nu} + a_1 b_{2\nu-1} + \cdots + a_{\nu-1} b_{\nu+1} + a_\nu b_\nu \\ \qquad + b_0 a_{2\nu} + b_1 a_{2\nu-1} + \cdots + b_{\nu-1} a_{\nu+1}, \\ c_{2\nu+1} = a_0 b_{2\nu+1} + a_1 b_{2\nu} + \cdots + a_{\nu-1} b_{\nu+2} + a_\nu b_{\nu+1} \\ \qquad + b_0 a_{2\nu+1} + b_1 a_{2\nu} + \cdots + b_{\nu-1} a_{\nu+2} + b_\nu a_{\nu+1} \end{cases}$$

und daher

$$(20) \quad \begin{cases} \delta_{2\nu-1} = \left\{ \begin{matrix} a_0(b_{2\nu-1} - b_{2\nu}) + a_1(b_{2\nu-2} - b_{2\nu-1}) + \cdots + a_{\nu-1}(b_\nu - b_{\nu+1}) \\ + b_0(a_{2\nu-1} - a_{2\nu}) + b_1(a_{2\nu-2} - a_{2\nu-1}) + \cdots + b_{\nu-1}(a_\nu - a_{\nu+1}) \end{matrix} \right\} - a_\nu b \\ \delta_{2\nu} = \left\{ \begin{matrix} a_0(b_{2\nu} - b_{2\nu+1}) + a_1(b_{2\nu-1} - b_{2\nu}) + \cdots + a_{\nu-1}(b_{\nu+1} - b_{\nu+2}) \\ \qquad + a_\nu(b_\nu - b_{\nu+1}) \\ + b_0(a_{2\nu} - a_{2\nu+1}) + b_1(a_{2\nu-1} - a_{2\nu}) + \cdots + b_{\nu-1}(a_{\nu+1} - a_{\nu+2}) \\ \qquad + b_\nu(a_\nu - a_{\nu+1}) \end{matrix} \right\} - a_\nu b \end{cases}$$

Da $\sum a_\nu b_\nu$ convergiren sollte, so kann man, ohne die Convergenz der betreffenden Gesammtreihen zu alteriren, schreiben:

$$(21) \quad \begin{cases} \sum_1^\infty \delta_{2\nu-1} = \sum_1^\infty \left\{ \begin{matrix} a_0(b_{2\nu-1} - b_{2\nu}) + \cdots + a_{\nu-1}(b_\nu - b_{\nu+1}) \\ + b_0(a_{2\nu-1} - a_{2\nu}) + \cdots + b_{\nu-1}(a_\nu - a_{\nu+1}) \end{matrix} \right\} - \sum_1^\infty a_\nu b_\nu, \\ \sum_0^\infty \delta_{2\nu} = \sum_0^\infty \left\{ \begin{matrix} a_0(b_{2\nu} - b_{2\nu+1}) + \cdots + a_\nu(b_\nu - b_{\nu+1}) \\ + b_0(a_{2\nu} - a_{2\nu+1}) + \cdots + b_\nu(a_\nu - a_{\nu+1}) \end{matrix} \right\} - \sum_0^\infty a_\nu b_\nu. \end{cases}$$

Nun ist $W = \sum_0^\infty \delta_{2\nu} = w_0 - \sum_1^\infty \delta_{2\nu-1}$, und es sind somit die linken Seiten dieser Gleichungen nach dem früheren convergent (wenn auch zunächst nur bedingt). Mithin gilt das Gleiche von den rechten Seiten, insbesondere also auch von den im ersten Gliede stehenden Reihen: da dieselben aber offenbar aus lauter positiven Gliedern bestehen, so müssen sie, weil überhaupt convergent, auch unbedingt convergent sein. Dasselbe gilt dann andererseits von den Reihen $\sum \delta_{2\nu-1}$, $\sum \delta_{2\nu}$, da deren Glieder sich nach Gleichung (20) als Differenzen je zweier solcher Ausdrücke schreiben lassen, die, wie eben gezeigt, unbedingt convergente Reihen bilden.

(NB. Der soeben geführte Beweis für die unbedingte Convergenz der Reihen $\sum \delta_{2\nu-1}$, $\sum \delta_{2\nu}$ beruhte also auf der vermittelst der bisherigen Betrachtungen bereits erlangten Kenntniss ihrer zum mindesten bedingten Convergenz. Man kann indessen die unbedingte Convergenz jener beiden Reihen auch ganz direct, ohne sich auf das frühere zu stützen, einsehen und somit für den vorliegenden speciellen Fall — alternirende Reihen mit nie zunehmenden Gliedern bei unbedingter Convergenz der Reihe $\sum a_\nu b_\nu$ — die Gültigkeit der Multiplicationsregel unmittelbar auf den oben erwähnten Abel'schen Satz basiren, dass die Convergenz der Reihe W auch stets die Beziehung $W = UV$ nach sich zieht. Man hat nämlich nach Gleichung (21)

$$\sum_0^\infty \delta_{2\nu} = S_1 + S_2 - \sum_0^\infty a_\nu b_\nu,$$

wenn

$$S_1 = \sum_0^\infty \{a_0(b_{2\nu} - b_{2\nu+1}) + a_1(b_{2\nu-1} - b_{2\nu}) + \cdots + a_\nu(b_\nu - b_{\nu+1})\},$$

$$S_2 = \sum_0^\infty \{b_0(a_{2\nu} - a_{2\nu+1}) + b_1(a_{2\nu-1} - a_{2\nu}) + \cdots + b_\nu(a_\nu - a_{\nu+1})\}$$

gesetzt wird. Es ist daher

$$\begin{aligned}
S_1 = {} & a_0(b_0 - b_1) \\
& + a_0(b_2 - b_3) \quad + a_1(b_1 - b_2) \\
& + a_0(b_4 - b_5) \quad + a_1(b_3 - b_4) \quad + a_2(b_2 - b_3) \\
& + \cdots \\
& + a_0(b_{2n} - b_{2n+1}) + a_1(b_{2n-1} - b_{2n}) + a_2(b_{2n-2} - b_{2n-1}) + \cdots + a_n(b_n - b_{n+1}) \\
& + \cdots
\end{aligned}$$

und wenn man jetzt nach Verticalreihen summirt, was ohne weiteres gestattet ist, da alle Glieder wesentlich positive Grössen sind:

$$S_1 = a_0(b_0 - b_1 + b_2 - b_3 + \cdots) + a_1(b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + \cdots) + \cdots$$
$$+ a_n(b_n - b_{n+1} + \cdots) + \cdots$$
$$< a_0 b_0 + a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n + \cdots,$$

und ebenso

$$S_2 = b_0(a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots) + b_1(a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots) + \cdots$$
$$+ b_n(a_n - a_{n+1} + \cdots) + \cdots$$
$$< a_0 b_0 + a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n + \cdots$$

also unbedingt convergent. Dasselbe gilt somit von der Reihe $\sum \delta_{2n}$ und ganz analog auch von der Reihe $\sum \delta_{2n-1}$). —

Hierbei sei noch — im Anschluss an eine oben (s. I. am Ende) gemachte Bemerkung — erwähnt, dass die Glieder der Reihe

$$W = c_0 - c_1 + c_2 - c_3 + \cdots$$

selbst in solchen Fällen, wo diese — wie in dem eben betrachteten — in den Formen $\sum_0^\infty \delta_{2\nu}$, $w_0 - \sum_1^\infty \delta_{2\nu-1}$ unbedingt convergirt, desshalb keineswegs auch immer *die* Eigenschaft der Grössen a_ν, b_ν zu besitzen brauchen, mit wachsendem Index niemals zuzunehmen, dergestalt dass also $\delta_{2\nu}$, $\delta_{2\nu-1}$ niemals negativ werden. Denn die Grössen c_ν lassen sich zwar, wie später noch gezeigt werden soll (s. weiter unten, Gleichung (28)) in zwei mit unendlichem wachsenden ν der der Null zustrebende Grenzen einschliessen, sie können aber innerhalb dieser Grenzen bei wachsendem ν beliebig oscilliren. Sollen also die c_ν mit wachsendem ν niemals zunehmen, so wird es hierfür nicht genügen, dass die a_ν, b_ν diese Eigenschaft besitzen und auch stark genug abnehmen um $\lim c_\nu$ für $\nu = \infty$ zu Null zu machen, sondern es wird das Gesetz für die Abnahme dieser Grössen noch irgend welchen speciellen Bedingungen unterliegen müssen. Als derartige Bedingungen — nothwendige wie hinreichende — kann man auf Grund der zu erfüllenden Beziehung $\delta_\nu \geqq 0$, je nach der Form, welche man dem Ausdrucke δ_ν giebt, und nach der Wahl der Glieder, welche man behufs Vereinfachung dieses Ausdruckes durch zu grosse bezw. zu kleine ersetzt, verschiedene Scalen von Ungleichungen herleiten, deren gemeinsames Endglied eben die Beziehung $\delta_\nu \geqq 0$ selbst bildet: auf diese Betrachtungen soll indessen ihrer allzu speciellen Natur halber hier um so weniger eingegangen werden, als die beständige Abnahme der Grössen c_ν als Kriterium für die Convergenz der Reihe $\sum (-1)^\nu c_\nu$ im allgemeinen gar nicht in Betracht kommt und man andererseits im Stande ist, gerade in Betreff der Multiplication zweier alternirenden Reihen mit nie zunehmenden Gliedern die *nothwendigen und hin-*

reichenden Bedingungen für die Convergenz der Reihe $W = \sum (-1)^\nu c_\nu$ in ganz allgemeiner Weise festzustellen, wie im folgenden noch geschehen soll. Zuvor möge jedoch noch an dieser Stelle zum Belege der früher gemachten Bemerkung, dass die nach der Multiplicationsregel gebildete Productreihe aus einer unbedingt und einer bedingt convergenten bezw. einer divergenten Reihe selbst ohne weiteres (d. h. ohne dass man etwa erst mehrere Glieder zu einem einzigen vereinigt) *unbedingt* convergiren könne, ein einfaches Beispiel Platz finden, da dasselbe unmittelbar auf der oben erlangten Kenntniss von der unbedingten Convergenz der Reihen $\sum \delta_{2\nu}$, $\sum \delta_{2\nu-1}$ beruht. Es seien wiederum a_ν, b_ν positive, mit wachsendem ν niemals zunehmende Grössen, $\lim a_\nu = \lim b_\nu = 0$ und $\sum a_\nu b_\nu$ convergent, dagegen mindestens $\sum b_\nu$ divergent. Dann möge gesetzt werden

$$u_0 = a_0, \quad u_1 = (a_0 - a_1), \quad u_2 = -(a_1 - a_2) \cdots u_\nu = (-1)^{\nu-1}(a_{\nu-1} - a_\nu),$$

so wird die Reihe

$$U = \sum_0^\infty u_\nu = a_0 + \sum_0^\infty (-1)^{\nu-1}(a_\nu - a_{\nu+1}) \tag{22}$$

unbedingt convergiren. Setzt man dann $v_\nu = (-1)^\nu b_\nu$, also

$$V = \sum_0^\infty v_\nu = \sum_0^\infty (-1)^\nu b_\nu, \tag{23}$$

so ist diese Reihe der Voraussetzung gemäss bedingt convergent. Bildet man jetzt

$$UV = W = \sum_0^\infty w_\nu, \quad \text{wo also wiederum} \quad w_\nu = \sum_0^\nu u_\varkappa v_{\nu-\varkappa}.$$

so lässt sich zeigen, dass diese Reihe unbedingt convergirt.

Wird nämlich wieder

$$\sum_0^\nu a_\varkappa b_{\nu-\varkappa} = c_\nu \quad \text{und} \quad c_\nu - c_{\nu+1} = \delta_\nu$$

gesetzt, so hat man

$$w_0 = a_0 b_0 = c_0,$$
$$w_1 = -a_0 b_1 + (a_0 - a_1) b_0 = c_0 - c_1 = \delta_0$$

und allgemein

$$w_\nu = (-1)^\nu a_0 b_\nu + (-1)^{\nu-1}(a_0 - a_1) b_{\nu-1} + (-1)^{\nu-1}(a_1 - a_2) b_{\nu-2} + \cdots + (-1)^{\nu-1}(a_{\nu-1} - a_\nu) b_0$$
$$= (-1)^{\nu-1}\{-a_0 b_\nu + (a_0 - a_1) b_{\nu-1} + (a_1 - a_2) b_{\nu-2} + \cdots + (a_{\nu-1} - a_\nu) b_0\}$$
$$= (-1)^{\nu-1}(c_{\nu-1} - c_\nu) = (-1)^{\nu-1}\delta_{\nu-1}.$$

Folglich wird

$$(24) \qquad UV = W = \sum_0^\infty w_\nu = c_0 + \sum_0^\infty (-1)^{\nu-1}\delta_\nu$$

und diese Reihe ist in der That *unbedingt* convergent, da ja $\sum_0^\infty \delta_{2\nu} + \sum_1^\infty \delta_{2\nu-1} = \sum_0^\infty \delta_\nu$ nach dem oben Gesagten unbedingt convergirt.

(Nimmt man z. B. $a_\nu = b_\nu = \frac{1}{\nu+1}$, also:

$$U = \tfrac{1}{1} + \left(\tfrac{1}{1} - \tfrac{1}{2}\right) - \left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3}\right) + \left(\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4}\right) - \cdots$$
$$= 1 + \tfrac{1}{1\cdot 2} - \tfrac{1}{2\cdot 3} + \tfrac{1}{3\cdot 4} - \cdots = 2\lg 2,$$
$$V = \tfrac{1}{1} - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \cdots = \lg 2,$$

so wird

$$\delta_0 = c_0 - c_1 = 1 - \left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\right) = 0,$$

$$\delta_1 = c_1 - c_2 = \left(\tfrac{1}{1\cdot 2} + \tfrac{1}{1\cdot 2}\right) - \left(\tfrac{1}{1\cdot 3} + \tfrac{1}{2\cdot 2} + \tfrac{1}{3\cdot 1}\right) = \tfrac{1}{3\cdot 4} = \tfrac{2}{3\cdot 4}\cdot\tfrac{1}{2}$$

und allgemein

$$\delta_\nu = c_\nu - c_{\nu+1} = \sum_1^{\nu+1} \frac{1}{\varkappa(\nu+2-\varkappa)} - \sum_1^{\nu+2} \frac{1}{\varkappa(\nu+3-\varkappa)}$$
$$= \sum_1^{\nu+1} \frac{1}{\nu+2}\left(\frac{1}{\varkappa} + \frac{1}{\nu+2-\varkappa}\right) - \sum_1^{\nu+2} \frac{1}{\nu+3}\left(\frac{1}{\varkappa} + \frac{1}{\nu+3-\varkappa}\right)$$
$$= \frac{2}{\nu+2}\sum_1^{\nu+1}\frac{1}{\varkappa} - \frac{2}{\nu+3}\sum_1^{\nu+2}\frac{1}{\varkappa}$$
$$= \frac{2}{(\nu+2)(\nu+3)}\sum_1^{\nu+1}\frac{1}{\varkappa} - \frac{2}{(\nu+2)(\nu+3)}$$
$$= \frac{2}{(\nu+2)(\nu+3)}\sum_1^{\nu}\frac{1}{\varkappa+1}.$$

Mithin ergiebt sich

$$W = 2(\lg 2)^2 = 1 + 2\sum_1^\infty \left\{(-1)^\nu \cdot \frac{1}{(\nu+2)(\nu+3)}\sum_1^\nu \frac{1}{\varkappa+1}\right\}$$

eine Reihe, deren unbedingte Convergenz man auch ohne weiteres

übersieht, wenn man beachtet, dass $\sum \frac{1}{(\nu+2)(\nu+3)}$ convergirt und $\sum_1^{\nu} \frac{1}{\varkappa+1}$ mit unendlich wachsendem ν nur wie $\lg \nu$ unendlich wird).

Um endlich auch die oben ausgesprochene Behauptung in Betreff der aus einer unbedingt convergenten und einer divergenten nach der Multiplicationsregel gebildeten Reihe W durch ein allgemeines Beispiel zu belegen, setzen wir

$$u_0 = -a_0, \quad u_1 = a_0 - a_1, \quad u_2 = a_1 - a_2, \quad u_\nu = a_\nu - a_{\nu+1}$$

und $v_\nu = b_\nu$, sodass also

$$(25) \quad U = \sum_0^\infty u_\nu = -a_0 + \sum_0^\infty (a_\nu - a_{\nu+1}) \quad \text{unbedingt convergent,}$$

$$(26) \quad V = \sum_0^\infty v_\nu = \sum_0^\infty b_\nu \qquad \text{divergent}$$

ist. Bildet man jetzt

$$W = \sum_0^\infty w_\nu \quad \text{wo} \quad w_\nu = \sum_0^\nu a_\varkappa b_{\nu-\varkappa},$$

so wird

$$w_0 = -a_0 b_0 = -c_0,$$

$$w_\nu = -a_0 b_\nu + (a_0 - a_1) b_{\nu-1} + (a_1 - a_2) b_{\nu-2} + \cdots + (a_{\nu-1} - a_\nu) b_0$$
$$= c_{\nu-1} - c_\nu = \delta_{\nu-1}$$

und daher

$$(27) \quad W = -c_0 + \sum_0^\infty \delta_\nu - \quad \text{also unbedingt convergent.}$$

Diese auf den ersten Blick auffallende Erscheinung erklärt sich sehr einfach, wenn man beachtet, dass der eine Factor U den Werth Null hat, und dass daher UV, d. h. $U_n V_n$ für unendlich wachsende n, sehr wohl einen bestimmten Grenzwerth — hier gleichfalls Null — haben kann. Man hat in der That

$$U_n V_n = \{-a_0 + (a_0 - a_1) + \cdots + (a_{n-1} - a_n)\}(b_0 + b_1 + \cdots + b_n)$$
$$= -a_n(b_0 + \cdots + b_n),$$

$$W_n = -c_0 + (c_0 - c_1) + \cdots + (c_{n-1} - c_n) = -c_n$$

und da in Folge der vorausgesetzten Convergenz der Reihe $\sum a_\nu b_\nu$, wie früher gezeigt:

$$\lim a_n(b_0 + \cdots + b_n) = 0, \quad \lim c_n = 0, \quad (n = \infty),$$

so kann man schreiben:

$$\lim_{n=\infty} (U_n V_n) = \lim_{n=\infty} W_n = 0.$$

V.

Es soll jetzt schliesslich noch der Fall zweier alternirender Reihen mit niemals zunehmenden Gliedern seine vollständige Erledigung finden. Sei also

$$U = \sum_0^\infty u_\nu, \quad V = \sum_0^\infty v_\nu \quad \text{wo} \quad u_n = (-1)^n a_n, \qquad v_n = (-1)^n v_n,$$

$$a_n > a_{n+\varkappa} \geqq 0, \qquad b_n > b_{n+\varkappa} \geqq 0\ ^*),$$

$$\lim_{n=\infty} a_n = \lim_{n=\infty} b_n = 0, \qquad \sum_0^\infty a_\nu, \ \sum_0^\infty b_\nu \quad \text{divergent.}$$

Ferner soll wiederum gesetzt werden

$$W = \sum_0^\infty w_\nu, \quad w_n = (-1)^n c_n, \quad \text{sodass also} \quad c_n = \sum_0^n a_\varkappa b_{n-\varkappa}$$

Dann ist nach dem früheren das Verschwinden von $\lim c_n$ — oder vielmehr schon dasjenige von $\lim c_{2n}$ *oder* $\lim c_{2n+1}$ — die nothwendige und hinreichende Bedingung für die Gültigkeit der Multiplicationsregel. Man hat nun

$$|w_{2n+1}| = c_{2n+1} = \sum_0^{2n+1} a_\varkappa b_{2n+1-\varkappa} = \sum_0^n a_\varkappa b_{2n+1-\varkappa} = \sum_0^n b_\varkappa a_{2n+1-\varkappa}$$

und wird jetzt wiederum, wie oben (Gleichung (12) die Bedingung $\lim_{n=\infty} c_{2n+1} = 0$ in die beiden folgenden

$$\lim a_n \sum_0^n b_\varkappa = 0, \quad \lim b_n \sum_0^n a_\varkappa = 0$$

zerfällen können, jedoch mit dem Unterschiede, dass in dem vorliegenden Falle diese beiden letzteren Beziehungen nicht — wie früher — bloss hinreichende, sondern geradezu auch nothwendige Bedingungen für die Convergenz der Reihe W bilden. Man hat nämlich, da die a_n, b_n mit wachsendem n niemals zunehmen,

$$c_{2n+1} \leqq b_n \sum_0^n a_\varkappa + a_n \sum_0^n b_\varkappa,$$

$$c_{2n+1} \geqq b_{2n+1} \sum_0^n a_\varkappa + a_{2n+1} \sum_0^n b_\varkappa,$$

*) Die folgenden Betrachtungen bleiben übrigens, wie leicht zu übersehen, im wesentlichen dieselben, wenn man für u_n, v_n solche complexe Grössen nimmt, deren reelle und imaginäre Bestandtheile die betreffenden Eigenschaften besitzen.

oder etwas anders geschrieben und in eine einzige Beziehung vereinigt

$$(28)\quad \frac{b_{2n+1}}{b_n}\cdot b_n\sum_0^n a_x+\frac{a_{2n+1}}{a_n}\cdot a_n\sum_0^n b_x\leqq c_{2n+1}\leqq b_n\sum_0^n a_x+a_n\sum_0^n b_x.$$

Lässt man jetzt n in's Unendliche wachsen, so wird es vor allem darauf ankommen, welchen Grenzwerthen sich die Quotienten $\frac{a_{2n+1}}{a_n}$, $\frac{b_{2n+1}}{b_n}$ nähern. Da die a_n, b_n mit wachsendem n niemals zunehmen, so folgt zunächst ohne weiteres, dass $\lim_{n=\infty}\frac{a_{2n+1}}{a_n}$, $\lim_{n=\infty}\frac{b_{2n+1}}{b_n}$ höchstens $=1$ sein können; andererseits lässt sich aber zeigen, dass diese Ausdrücke endliche, *von Null verschiedene* Grenzwerthe besitzen müssen. Man hat identisch

$$\frac{a_{2n+1}}{a_n}=\frac{a_{n+1}}{a_n}\cdot\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}\cdots\frac{a_{2n}}{a_{2n-1}}\cdot\frac{a_{2n+1}}{a_{2n}}.$$

Da nun nach Voraussetzung

$$\frac{a_{\nu+1}}{a_\nu}\leqq 1\quad\text{und insbesondere}\quad\lim_{\nu=\infty}\frac{a_{\nu+1}}{a_\nu}=1$$

(weil andernfalls die Reihe $\sum a_\nu$ convergiren müsste), so kann man setzen

$$\frac{a_{\nu+1}}{a_\nu}=1-\frac{\varepsilon_\nu}{\nu},$$

wo ε_ν eine wesentlich positive Grösse (Null nicht ausgeschlossen) von der Beschaffenheit bedeutet, dass

$$\frac{\varepsilon_\nu}{\nu}<1\quad\text{und}\quad\lim_{\nu=\infty}\frac{\varepsilon_\nu}{\nu}=0.$$

Obschon diese letztere Beziehung für's erste keineswegs ausschliessen würde, dass ε_ν mit ν in's Unendliche wächst, so lässt sich auf Grund der vorausgesetzten Divergenz der Reihe $\sum a_\nu$ zeigen, dass dies nicht möglich ist, dass vielmehr $\lim_{\nu=\infty}\varepsilon_\nu\leqq 1$ sein muss. Denn es ist

$$\varepsilon_\nu=\nu\left(1-\frac{a_{\nu+1}}{a_\nu}\right).$$

Nach einem bekannten Convergenz-Kriterium*) würde aber die Beziehung

*) Siehe die Abhandlung des Herrn Weierstrass: „Ueber die analytischen Facultäten", Crelle's Journal, Bd. 51, S. 28, No. VII. 2; sonst auch z. B. Hattendorf, Algebr. Analysis § 18.

$$\lim_{\nu=\infty} \nu\left(1-\frac{a_{\nu+1}}{a_\nu}\right) > 1$$

die unbedingte Convergenz der Reihe $\sum a_\nu$ nach sich ziehen, folglich muss in der That

$$\lim_{\nu=\infty} \varepsilon_\nu \leqq 1$$

sein. Man hat nun

$$\frac{a_{2n+1}}{a_{2n}} = \left(1-\frac{\varepsilon_n}{n}\right)\left(1-\frac{\varepsilon_{n+1}}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{\varepsilon_{2n}}{2n}\right)$$

und da nach dem eben gesagten für noch so grosse n die Grössen $\varepsilon_n, \varepsilon_{n+1}, \cdots, \varepsilon_{2n}$ eine gewisse endliche Grenze ε nicht übersteigen (wo übrigens für hinlänglich grosse n $\varepsilon \leqq 1$), so wird

$$\frac{a_{2n+1}}{a_{2n}} \geqq \left(1-\frac{\varepsilon}{n}\right)\left(1-\frac{\varepsilon}{n+1}\right),\cdots,\left(1-\frac{\varepsilon}{2n}\right)$$
$$> \left(1-\frac{\varepsilon}{n}\right)^{n+1}$$

und daher

$$\lim_{n=\infty} \frac{a_{2n+1}}{a_{2n}} \geqq e^{-\varepsilon} \quad \text{also endlich und von Null verschieden.}$$

Setzt man daher

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{n=\infty} \frac{a_{2n+1}}{a_{2n}} = \alpha \\ \text{und analog} \quad &\lim_{n=\infty} \frac{b_{2n+1}}{b_{2n}} = \beta \end{aligned}\right\} \text{ wo } \alpha, \beta \text{ positiv } \leqq 1 \text{ und von Null verschieden,}$$

so geht die Ungleichung (28), wenn man darin n in's Unendliche wachsen lässt, über in:

$$\text{(29)} \qquad \lim\left\{\alpha\cdot b_n \sum_0^n{}^{\varkappa} a_\varkappa + \beta\cdot a_n \sum_0^n{}^{\varkappa} b_\varkappa\right\} \leqq \lim c_{2n+1}$$
$$\leqq \lim\left\{b_n \sum_0^n{}^{\varkappa} a_\varkappa + a_n \sum_0^n{}^{\varkappa} b_\varkappa\right\} \quad (n=\infty).$$

Daraus folgt aber, dass $\lim c_{2n+1} = \lim |w_{2n+1}|$ für $n=\infty$ dann und *nur* dann verschwinden kann, wenn

$$\lim_{n=\infty} b_n \sum_0^n{}^{\varkappa} a_\varkappa \quad \text{und} \quad \lim_{n=\infty} a_n \sum_0^n{}^{\varkappa} b_\varkappa$$

gleichzeitig verschwinden. Man hat daher den Satz:

Sind a_n, b_n positive, mit wachsendem n niemals zunehmende und für $n = \infty$ verschwindende Grössen, so bildet die Beziehung

$$(30) \quad \lim b_n \sum_1^n{}^{x} a_x = \lim a_n \sum_0^n{}^{x} b_x = 0, \quad (n = \infty)$$

die nothwendige und hinreichende Bedingung für die Anwendbarkeit der Multiplicationsregel auf die bedingt convergenten Reihen $\sum_0^\infty{}^{\nu} (-1)^\nu a_\nu$, $\sum_0^\infty{}^{\nu} (-1)^\nu b_\nu$.

(NB. Ist eine der beiden Reihen oder beide unbedingt convergent, so ist die Bedingung (30) eo ipso erfüllt, sodass der Satz also auch diese Fälle mit umfasst.)

Da nach dem früher gesagten die Convergenz der Reihe $\sum a_\nu b_\nu$ stets die Gültigkeit der Beziehung (30) zur Folge hat, so ist dieselbe hier wiederum eine hinreichende Bedingung für die Convergenz der Productreihe. Sie ist auch hier keine nothwendige Bedingung, wie das früher gegebene Beispiel (s. III. am Ende) beweist, bei dem es sich ja in der That um die Multiplication zweier alternirender Reihen handelte (Gl. (14a), (14b)). Nichtsdestoweniger nimmt diese Bedingung hier eine wesentlich andere Stellung ein, als bei der Multiplication bedingt convergenter Reihen von beliebig allgemeinerem Charakter — sie ist sozusagen nicht sehr weit davon entfernt, eine nothwendige Bedingung zu repräsentiren. Während nämlich bei anderen bedingt convergenten Reihen $\sum u_\nu$, $\sum v_\nu$ (s. Gl. (11a), (11b)) sich zeigen liess, dass nicht nur die Divergenz der Reihe $\sum |u_\nu v_\nu|$, sondern selbst die von $\sum |u_\nu v_\nu|^m$ (für jedes noch so grosse positive m) die Gültigkeit der Multiplicationsregel nicht hindert, findet etwas derartiges hier nicht statt*): vielmehr bildet hier schon die Convergenz der Reihe $\sum |u_\nu v_\nu|^{1+\varrho} = \sum (a_\nu b_\nu)^{1+\varrho}$ — wo ϱ eine noch so kleine, wenn nur

*) Der Grund dieses verschiedenen Verhaltens liegt offenbar darin, dass hier nicht mehr wie früher

$$|w_n| = \left| \sum_0^n{}^{x} u_x v_{n-x} \right|$$

und

$$\sum_0^n{}^{x} |u_x v_{n-x}|$$

wesentlich verschiedene Grössen darstellen, sondern völlig identisch sind.

um ein angebbares von Null verschiedene Zahl bedeutet, eine *nothwendige* Bedingung, wie sich folgendermassen zeigen lässt. Es ist

$$b_n \sum_0^n a_\nu > n \cdot a_n b_n, \qquad a_n \sum_0^n > n \cdot a_n b_n.$$

Folglich ist nach (30) die Beziehung

$$\lim_{n=\infty} n a_n b_n = 0 \tag{31}$$

jedenfalls eine *nothwendige* Bedingung für die Convergenz der Reihe W. Erhebt man nun diese Relation zur Potenz $1+\varrho$, wo ϱ positiv und beliebig wenig von Null verschieden, so wird

$$\lim n^{1+\varrho} \cdot (a_n b_n)^{1+\varrho} = 0,$$

sodass nach einem bekannten Kriterium in jedem Falle die Reihe $\sum_0^\infty (a_\nu b_\nu)^{1+\varrho}$ convergirt. Man findet also:

> Sind $\sum (-1)^\nu a_\nu$, $\sum (-1)^\nu b_\nu$ convergente Reihen von der oben angegebenen Beschaffenheit, so bildet die Convergenz der Reihe $\sum a_\nu b_\nu$ eine hinreichende, die der Reihe $\sum (a_\nu b_\nu)^{1+\varrho}$ eine nothwendige Bedingung für die Gültigkeit der Multiplicationsregel.

Hieraus folgt z. B. dass die Reihen

$$\sum_1^\infty \frac{(-1)^\nu}{\nu^p}, \quad \sum_1^\infty \frac{(-1)^\nu}{\nu^q}$$

ein convergentes Product liefern, wenn die Reihe $\sum_\nu \frac{1}{\nu^{p+q}}$ convergirt — also für $p+q>1$; dass hingegen die Multiplicationsregel nicht anwendbar ist, wenn $p+q+\varrho \leqq 1$ d. h. $p+q<1$. Der Fall $p+q=1$ findet durch diese Kriterien keine Erledigung. Dagegen liefert hier die Bedingung (31) die Entscheidung. Man hat nämlich für $p+q=1$: $\lim n \cdot a_n b_n = 1$ — sodass also die Productreihe W divergiren würde.

Ueberhaupt versagt der zuletzt angeführte Satz stets in dem einen Falle, wo $\sum a_\nu b_\nu$ divergent, $\sum (a_\nu b_\nu)^{1+\varrho}$ convergent ist. Man muss dann, wie in dem eben betrachteten Beispiele, entweder die Bedingung (31) zu Hülfe nehmen, oder falls diese erfüllt ist und somit die Divergenz der Reihe W nicht feststeht, auf die ursprünglichen, in jedem Falle ausreichenden Bedingungen (30) recurriren.

An die zuletzt gefundenen Kriterien knüpfen sich aber ferner noch folgende Betrachtungen. Da die Convergenz der Reihe $\sum a_\nu b_\nu$

eine hinreichende Bedingung für diejenige der Reihe W bildete, und andererseits nach bekannten Convergenzsätzen die erstere stattfindet, wenn für ein beliebig kleines, angebbares positives ϱ einer der Ausdrücke

$$(32)\quad \begin{cases} n a_n b_n \cdot n^{\varrho} \\ n \lg^{(1)} n\, a_n b_n \cdot (\lg^{(1)} n)^{\varrho} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ n \lg^{(1)} n \cdots \lg^{(r)} n\, a_n b_n (\lg^{r} n)^{\varrho} \end{cases} \quad - \text{ (wo } r \text{ eine beliebig grosse, aber endliche positive ganze Zahl)}$$

oder nach unserer früheren Bezeichnungsweise

$$\psi_r(n) \cdot (\lg^{(r)} n)^{\varrho} a_n b_n$$

(wobei noch der Analogie halber $n = \lg^{(0)} n = \psi_0(n)$ zu setzen ist) für unendlich wachsende n eine endliche Grenze g nicht übersteigt, so wird die Erfüllung einer derartigen Bedingung auch *hinreichend* für die Convergenz der Reihe W sein.

Andererseits erscheinen als *nothwendige* Bedingungen für die Convergenz der Reihe $\sum (a_\nu b_\nu)^{1+\varrho}$ die Beziehungen

$$(33)\quad \left.\begin{cases} \lim n \cdot (a_n b_n)^{1+\varrho} = 0 \\ \lim n \cdot \lg^{(1)} n\, (a_n b_n)^{1+\varrho} = 0 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \lim n \lg^{(1)} n \cdots \lg^{(r)} n\, (a_n b_n)^{1+\varrho} = 0 \end{cases}\right\} \text{ für } n = \infty \text{ und jedes beliebig grosse, endliche } r$$

und da die Convergenz der Reihe $\sum (a_\nu b_\nu)^{1+\varrho}$ eine nothwendige Bedingung für diejenige der Reihe W bildete, so gilt das gleiche von den Beziehungen (33). Diese Bedingungen sind aber offenbar sämmtlich weniger wirksam, als die eine bereits früher gefundene nothwendige Bedingung (31)

$$\lim_{n=\infty} n \cdot a_n b_n = 0$$

und es liegt nun die Vermuthung nahe, dass sich an diese eine nothwendige Bedingung, analog mit der obigen Scala (32) von hinreichenden Bedingungen, eine Scala von Beziehungen der Form

$$(34)\quad \left.\begin{cases} \lim n \lg^{(1)} n \cdot a_n b_n = \lim \psi_1(n) a_n b_n = 0 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \lim n \lg^{(1)} n \cdots \lg^{(r)} n\, a_n b_n = \lim \psi_r(n) a_n b_n = 0 \end{cases}\right\} \text{ für } n = \infty \text{ und jedes beliebig grosse, endliche } r$$

(beiläufig bemerkt sämmtlich *nothwendige* Bedingungen für die Convergenz der Reihe $\sum a_\nu b_\nu$ und *hinreichende* für diejenige der Reihe $\sum (a_\nu b_\nu)^{1+\varrho}$) als *nothwendige* Bedingungen für die Convergenz der Reihe W anschliessen müsse.

Diese Annahme wäre indessen durchaus irrig: denn nach dem früher gesagten (Gl. (14a) und (30)) liefert z. B. die Reihe

$$\sum_{a}^{\infty} (-1)^{\nu} \cdot \{\psi_r(\nu)\}^{-\frac{1}{2}}$$

mit sich selbst multiplicirt ein convergentes Resultat, obschon hier, wo also

$$a_n = b_n = \{\psi_r(\nu)\}^{-\frac{1}{2}},$$

folglich

$$\lim_{n=\infty} \psi_r(n) a_n b_n = 1$$

und daher

$$\lim_{n=\infty} \psi_{r+s}(n) a_n b_n = \lim_{n=\infty} \{\lg^{(r+1)} n \cdots \lg^{(r+s)} n\} = \infty$$

wird, die Bedingungen (34) von einem bestimmten r ab nicht mehr befriedigt werden.

(Für $r = 1$ folgt insbesondere, dass $\left\{\sum_{2}^{\infty} (-1)^{\nu} (\nu \lg \nu)^{-\frac{1}{2}}\right\}^2$ ein convergentes Resultat liefert, wiewohl in diesem Falle schon die erste der Bedingungen (34) nicht erfüllt ist, da hier $\lim(n \lg n \cdot a_n b_n) = 1$ wird. Vergleicht man übrigens hiermit, dass die Productreihe für $\left\{\sum_{1}^{\infty} (-1)^{\nu} \cdot \nu^{-\frac{1}{2}}\right\}^2$, wie oben gezeigt wurde, divergirt, so zeigt sich hier in dem Verhalten der harmonischen Reihe und der mit dieser im übrigen sehr nahe verwandten Reihen, bei denen an Stelle der natürlichen Zahlen ν Grössen von der Form $\psi_r(\nu)$ getreten sind, ein wesentlicher Unterschied, auf dessen Ursache später noch eingegangen werden soll).

Nachdem jetzt ersichtlich, dass die Bedingungen (34) für die Convergenz der Reihe W keineswegs nothwendig sind, dürfte es — da sie sich andererseits für hinlänglich grosse Werthe von r den für die Convergenz der Reihe W hinreichenden Bedingungen (32) mehr und mehr nähern*) — nicht überflüssig erscheinen, nachzuweisen, dass ebensowenig jene Bedingungen (34) bis zu einem beliebig grossen, endlichen Index r hin als *hinreichende* angesehen werden dürfen. Denn angenommen, es gälte dies von der Beziehung

$$\lim_{n=\infty} \psi_r(n)\, a_n b_n = 0,$$

wo r beliebig gross, aber endlich und bestimmt (in welchem Falle offenbar die entsprechenden Beziehungen für jeden Index $< r$ von

*) Vgl. eine Abhandlung des Herrn Du Bois-Reymond, Crelle's Journal, Bd. 76, S. 88.

selbst erfüllt sind, also keiner besonderen Berücksichtigung bedürfen), so lassen sich a_n, b_n stets so bestimmen, dass jene Bedingung zwar befriedigt wird, während das Product $\sum (-1)^\nu a_\nu \times \sum (-1)^\nu b_\nu$ nichtsdestoweniger ein divergentes Resultat liefert. Setzt man nämlich

$$a_\nu = \frac{1}{\lg^{(r+1)}\nu}, \qquad b_\nu = \frac{1}{\psi_r(\nu)}$$

für $\nu \geqq m$, wo m eine pos. ganze Zahl bezeichnet, die so gross zu wählen ist, dass $\lg^{(r+1)}\nu$, also auch $\psi_r(\nu)$ positiv reell ist, während für $\nu < m$

$$a_\nu = b_\nu = 0$$

sein mag, so wird

$$\lim_{n=\infty} \psi_r(n)\, a_n b_n = \lim_{n=\infty} \left\{\lg^{(r+1)} n\right\}^{-1} = 0,$$

sodass also in der That jene Bedingung erfüllt ist. Dass trotzdem die beiden Reihen

$$\sum_0^\infty (-1)^\nu a_\nu = \sum_m^\infty \frac{(-1)^\nu}{\lg^{(r+1)}\nu} \quad \text{und} \quad \sum_0^\infty (-1)^\nu b_\nu = \sum_m^\infty \frac{(-1)^\nu}{\psi_r}$$

ein divergentes Product liefern, wird sich daraus ergeben, dass

$$\lim_{n=\infty} a_n \sum_0^{n-1} b_x = \lim_{n=\infty} \frac{1}{\lg^{(r+1)} n} \left\{\frac{1}{\psi_r(m)} + \frac{1}{\psi_r(m+1)} + \cdots + \frac{1}{\psi_r(n-1)}\right\}$$

nicht verschwindet, sondern den endlichen Grenzwerth 1 besitzt. Um dies nachzuweisen, gehen wir von der folgenden — für $n \geqq 1$ geltenden Beziehung aus:

$$\lg(n+1) = \lg n + \lg\left(1+\frac{1}{n}\right) = \lg n + \frac{1}{n} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{n}\right)^3 - \cdots$$

also:

$$\lg n + \frac{1}{n} > \lg(n+1) > \lg n + \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2}$$

eine Ungleichung, welche man — wenn wieder der Analogie halber $n = \psi_0(n)$ gesetzt wird — folgendermassen schreiben kann:

$$(35) \quad \lg^{(1)} n + \frac{1}{\psi_0(n)} > \lg^{(1)}(n+1) > \lg^{(1)} n + \frac{1}{\psi_0(n)} - \frac{f_1(n)}{n\psi_0(n)},$$

wo $f_1(n)$ eine gewisse positive, für $n = \infty$ endlich bleibende Grösse (nämlich die Constante $\frac{1}{2}$) bezeichnet. Hieraus soll nun zunächst durch vollständige Induction eine ähnliche Ungleichung für ψ-Functionen mit beliebigem Index hergeleitet werden. Angenommen man hätte für irgend ein bestimmtes r:

$$\lg^{(r)} n + \frac{1}{\psi_{r-1}(n)} > \lg^{(r)}(n+1) > \lg^{(r)} n + \frac{1}{\psi_{r-1}(n)} - \frac{f_r(n)}{n\psi_{r-1}(n)},$$

wo $f_r(n)$ eine positive, mit n nicht ins Unendliche wachsende Grösse bedeutet, so lässt sich diese Ungleichung — weil

$$\lg^{(r)} n \cdot \psi_{r-1}(n) = \psi_r(n)$$

ist — zunächst in die folgende Form setzen:

$$\lg^{(r)} n \left\{1 + \frac{1}{\psi_r(n)}\right\} > \lg^{(r)}(n+1) > \lg^{(r)} n \left\{1 + \frac{1}{\psi_r(n)} - \frac{f_r(n)}{n\psi_r(n)}\right\},$$

woraus dann durch nochmaliges Logarithmiren sich ergiebt:

$$\lg^{(r+1)} n + \lg\left\{1 + \frac{1}{\psi_r(n)}\right\} > \lg^{(r+1)}(n+1) > \lg^{(r+1)} n + \lg\left\{1 + \frac{1 - \frac{1}{n} f_r(n)}{\psi_r(n)}\right\},$$

oder mit Benützung der bekannten Ungleichung

$$x > \lg(1+x) > x - \frac{x^2}{2}$$

schliesslich:

$$(36)\quad \begin{cases} \lg^{(r+1)} n + \dfrac{1}{\psi_r(n)} > \lg^{(r+1)}(n+1) > \lg^{(r+1)} n + \dfrac{1 - \frac{1}{n} f_r(n)}{\psi_r(n)} \\ \qquad\qquad - \dfrac{1}{2}\left\{\dfrac{1 - \frac{1}{n} f_r(n)}{\psi_r(n)}\right\}^2 \\ \qquad\qquad > \lg^{(r+1)} n + \dfrac{1}{\psi_r(n)} - \dfrac{f_{r+1}(n)}{n\psi_r(n)}, \end{cases}$$

wo

$$f_{r+1}(n) = f_r(n) - \frac{1}{2} \frac{\left\{1 - \frac{1}{n} f_r(n)\right\}^2}{\lg^{(1)}(n) \lg^{(2)} n \cdots \lg^{(r)} n},$$

also für $n = \infty$ sich derselben *endlichen* Grenze nähert, welcher etwa die nach der Voraussetzung jedenfalls endlich bleibende Grösse $f_r(n)$ zustrebt.

Da nun die Richtigkeit der betreffenden Ungleichung für $r = 0$ feststeht (35) und für diesen Fall

$$f_{r+1}(n) = f_1(n) = \frac{1}{2}$$

war, so ist damit ihre Allgemeingültigkeit für jeden endlichen Index r bewiesen und zugleich gezeigt, dass für $n = \infty$

$$\lim f_{r+1}(n) = \lim f_r(n) = \frac{1}{2}.$$

Giebt man nun in dieser Formel (36) der Zahl n der Reihe nach die Werthe $m, (m+1), \cdots, (n-1)$, so wird

$$\lg^{(r+1)}(m)+\frac{1}{\psi_r(m)} > \lg^{(r+1)}(m+1) > \lg^{(r+1)}(m)+\frac{1}{\psi_r(m)} - \frac{f_{r+1}(m)}{m\psi_r(m)},$$

$$\lg^{(r+1)}(m+1)+\frac{1}{\psi_r(m+1)} > \lg^{(r+1)}(m+2) > \lg^{(r+1)}(m+1)+\frac{1}{\psi_r(m+1)} - \frac{f_{r+1}(m+1)}{(m+1)\psi_r(m+1)},$$

. . . . . .

$$\lg^{(r+1)}(n-1)+\frac{1}{\psi_r(n-1)} > \lg^{(r+1)}(n) > \lg^{(r+1)}(n-1)+\frac{1}{\psi_r(n-1)} - \frac{f_{r+1}(n-1)}{(n-1)\psi_r(n-1)}$$

und folglich durch Addition dieser Ungleichungen:

$$\lg^{(r+1)}(m)+\sum_m^{n-1}\frac{1}{\psi_r(x)} > \lg^{(r+1)}(n) > \lg^{(r+1)}(m)+\sum_m^{n-1}\frac{1}{\psi_r(x)} - \sum_m^{n-1}\frac{f_{r+1}(x)}{x\psi_r(x)}$$

woraus:

$$\frac{1}{\lg^{(r+1)}n}\sum_m^{n-1}\frac{1}{\psi_r(x)} > 1-\frac{\lg^{(r+1)}m}{\lg^{(r+1)}n} < 1-\frac{\lg^{(r+1)}m}{\lg^{(r+1)}n}+\frac{1}{\lg^{(r+1)}n}\sum_m^{n-1}\frac{f_{r+1}(x)}{x\psi_r(x)}.$$

Wird jetzt $n = \infty$, so hat man offenbar

$$\lim \frac{1}{\lg^{(r+1)}n}\sum_m^{n-1}\frac{1}{\psi_r(x)} = 1 \tag{37}$$

(da $\sum_m^{\infty}\frac{1}{x\psi_r(x)} + \sum_m^{\infty}\frac{1}{x^2\lg^{(1)}x\cdots\lg^{(r)}x}$ und somit, wegen der Endlichkeit von $f_{r+1}(x)$, auch $\sum_m^{\infty}\frac{f_{r+1}(x)}{x\psi_r(x)}$ convergent, also endlich ist). Daraus folgt dann schliesslich, dass in der That die Multiplication der beiden Reihen $\sum_m^{\infty}\frac{(-1)^\nu}{\lg^{(r+1)}\nu}$, $\sum_m^{\infty}\frac{(-1)^\nu}{\psi_r(\nu)}$ ein divergentes Resultat liefern würde.

Es kommen also nach dem gesagten die Bedingungen von der Form

$$\lim_{n=\infty}\psi_r(n)\cdot a_n b_n = 0, \qquad (r \geqq 1)$$

für die Beurtheilung der Convergenz der aus $\sum(-1)^\nu a_\nu$, $\sum(-1)^\nu b_\nu$ zu bildenden Productreihe *überhaupt nicht* in Betracht, während die eine Beziehung

$$\lim_{n=\infty} \psi_0(n) \cdot a_n b_n = \lim_{n=\infty} n a_n b_n = 0$$

eine nothwendige Bedingung für jene Convergenz bildete: es findet somit hier wieder jenes schon oben hervorgehobene, wesentlich verschiedene Verhalten der ganzen positiven Zahlen n und jener Grössen $\psi_r(n)$ $(r \geqq 1)$ statt, während doch andererseits für die Beurtheilung der *unbedingten* Convergenz der Reihe $\sum a_\nu b_\nu$ die Ausdrücke $n \cdot a_n b_n$ und $\psi_r(n) a_n b_n$ als völlig gleichberechtigt auftreten. Der Grund dieser Erscheinung liegt nun aber einfach darin, dass die Reihen von der Form

$$\sum_m^\infty{}_\nu \frac{1}{\psi_r(\nu)} = \sum_m^\infty{}_\nu \frac{1}{\nu \lg^{(1)} \nu \cdots \lg^{(r)} \nu}, \qquad (r \geqq 1)$$

zwar gerade so divergiren, wie die harmonische Reihe $\sum \frac{1}{\nu}$ — woraus dann die ähnliche Stellung dieser Grössen ν und $\psi_r(\nu)$ in der Theorie der unbedingten Convergenz sich erklärt — dass aber nichtsdestoweniger jene ersteren Reihen wesentlich schwächer divergiren: und zwar geschieht bei ihnen die Divergenz um so viel langsamer, dass bei gewissen Combinationen der betreffenden Glieder mit wechselnden Zeichen *bedingt* convergirende Reihen zum Vorschein kommen, wo die analog aus den Gliedern von der Form $\frac{1}{\nu}$ gebildeten Combinationen divergente oder oscillirende Reihen liefern.

Während nämlich für die Reihe $\sum \frac{1}{\nu}$, wenn man mit $s_\varkappa$ die Summe der Reihenglieder bis $\frac{1}{\varkappa}$ (einschliesslich) bezeichnet, der Ausdruck

$$\lim (s_{2n} - s_n) \quad \text{für} \quad n = \infty$$

oder allgemeiner — wenn p eine beliebige endliche positive Zahl bedeutet

$$\lim (s_{pn} - s_n) \quad \text{für} \quad n = \infty$$

(wo n zunächst endlich so zu wählen ist, dass pn eine ganze Zahl) stets einen endlichen, von Null verschiedenen Werth hat — man findet nämlich

$$\begin{aligned} s_{pn} - s_n &= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{pn-1} + \frac{1}{pn} \\ &= \frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}} + \frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}} + \cdots + \frac{\frac{1}{n}}{p-\frac{1}{n}} + \frac{\frac{1}{n}}{p} \end{aligned}$$

also:

$$\lim_{n=\infty}(s_{pn}-s_n)=\int_1^p\frac{dx}{x}=\lg p\ -$$

so besitzt der analoge Ausdruck für die Reihen der Form $\sum\frac{1}{\psi_r(\nu)}$ den Grenzwerth Null. Hier ergiebt sich nämlich:

$$s_{pn}-s_n=\frac{1}{\psi_r(n+1)}+\frac{1}{\psi_r(n+2)}+\cdots+\frac{1}{\psi_r(pn)}$$

$$<\frac{pn}{\psi_r(n+1)}\quad\text{d. h.}\quad<\frac{pn}{(n+1)\lg^{(1)}(n+1)\cdots\lg^{(r)}(n+1)}$$

also:

$$\lim_{n=\infty}(s_{pn}-s_n)=0.$$

Gerade dieser Umstand ist es aber, welcher in dem oben betrachteten Falle und überhaupt in zahlreichen Beispielen ähnlicher Art — wo es sich also um bedingte, d. h. lediglich durch Zeichenwechsel hervorgebrachte Convergenz handelt — als ausschlaggebend ins Gewicht fällt. So wird z. B. die folgende einfache und das oben gesagte besonders deutlich illustrirende Reihe

$$\begin{array}{l}f(2)-f(2)\\+f(3)+f(4)-f(3)-f(4)\\+\cdots\cdots\cdots\\+f(2^x+1)+f(2^x+2)+\cdots+f(2^{x+1})-f(2^x+1)-f(2^x+2)-\cdots-f(2^{x+1})\\+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\end{array}$$

offenbar gegen den Werth Null convergiren, wenn $f(\nu)=\frac{1}{\psi_r(\nu)}$ gesetzt wird: denn bricht man die Reihe bei einem beliebigen Gliede ab, so können diejenigen Glieder, welche sich nicht mit den vorangehenden direct aufheben, höchstens einen absoluten Werth

$$=\{f(n)+f(n+1)+\cdots+f(2n-1)\}$$

besitzen (wo zur Abkürzung $2^x+1=n$ gesetzt ist) — ein Ausdruck welcher nach dem eben gesagten für $n=\infty$ der Null zustrebt: die Reihe convergirt somit selbst gegen die Summe Null.

Setzt man hingegen $f(\nu)=\frac{1}{\nu}$, so folgt ganz ebenso, dass die Reihe dem Grenzwerthe lg 2 zustrebt, falls man sie mit dem Endgliede einer positiven, wogegen sie die Summe Null besitzt, falls man sie mit dem Endgliede einer negativen Gruppe abbricht: die Reihe oscillirt also in diesem Falle in den Grenzen 0 und lg 2.

VI.

Ich knüpfe an das vorstehende noch die folgende Bemerkung, die sich zwar nicht mehr auf die Multiplication zweier bedingt convergenter Reihen bezieht, jedoch mit den unter Nr. III angestellten Betrachtungen in directem Zusammenhange steht. Es wurde dort darauf hingewiesen, dass die Convergenz der Reihe $\sum a_\nu b_\nu$ das Verschwinden von

$$\lim_{n=\infty} b_n \sum_0^n{}^{\varkappa} a_\varkappa \quad \text{und} \quad \lim_{n=\infty} a_n \sum_0^n{}^{\varkappa} b_\varkappa$$

nach sich zieht, wenn die a_ν, b_ν positive, für $\nu = \infty$ verschwindende Grössen bedeuten und $\frac{a_{n+r}}{a_n}$, $\frac{b_{n+r}}{b_n}$ niemals unendlich werden. Sind jetzt u_ν, v_ν beliebige complexe Grössen von der Beschaffenheit, dass

$$|u_\nu| = a_\nu, \qquad |v_\nu| = b_\nu$$

wo a_ν, b_ν die eben erwähnten Bedingungen befriedigen, so wird um so mehr

$$\lim_{n=\infty} v_n \sum_0^n{}^{\varkappa} u_\varkappa = \lim_{n=\infty} u_n \sum_0^n{}^{\varkappa} v_\varkappa = 0$$

sein. Man hat nun identisch

$$\begin{aligned} u_0v_0 + u_1v_1 + \cdots + u_nv_n &= (u_0 - u_1)v_0 + (u_1 - u_2)(v_0 + v_1) + \cdots \\ &\quad + (u_{n-1} - u_n)(v_0 + v_1 + \cdots + v_{n-1}) + u_n(v_0 + v_1 + \cdots + v_n) \\ &= \sum_0^{n-1}{}^{\nu} (u_\nu - u_{\nu+1})(v_0 + \cdots + v_\nu) + u_n \sum_0^n{}^{\nu} v_\nu \end{aligned}$$

oder auch durch Vertauschung von u und v

$$u_0v_0 + u_1v_1 + \cdots + u_nv_n = \sum_0^{n-1}{}^{\nu} (v_\nu - v_{\nu+1})(u_0 + \cdots + u_\nu) + v_n \sum_0^n{}^{\nu} u_\nu .$$

Lässt man jetzt n ins Unendliche wachsen, so wird in Folge der obigen Beziehung

$$(38) \qquad \begin{cases} \sum_0^\infty{}^{\nu} u_\nu v_\nu = \sum_0^\infty{}^{\nu} (u_\nu - u_{\nu+1})(v_0 + \cdots + v_\nu) \\ \qquad\qquad = \sum_0^\infty{}^{\nu} (v_\nu - v_{\nu+1})(u_0 + \cdots + u_\nu). \end{cases}$$

Es werden somit unter den angegebenen Bedingungen gleichzeitig mit der *unbedingt* convergirenden Reihe $\sum_0^\infty{}^{\nu} u_\nu v_\nu$ auch die beiden Reihen

$$\sum_0^\infty{}^{\nu}(u_\nu - u_{\nu+1})(v_0 + \cdots + v_\nu),$$

$$\sum_0^\infty{}^{\nu}(v_\nu - v_{\nu+1})(u_0 + \cdots + u_\nu)$$

und zwar gegen die nämliche Summe convergiren. Offenbar braucht diese Convergenz ihrer Herleitung gemäss im allgemeinen nur eine *bedingte* zu sein, sofern nicht etwa die u_ν, v_ν noch irgend welchen besonderen Bedingungen genügen — wie z. B. dass die u_ν, v_ν reelle mit wachsendem ν niemals zunehmende Grössen einerlei Zeichens sind, in welchem Falle dann offenbar jene Reihen ebenfalls nur Glieder einerlei Zeichens enthalten und folglich unbedingt convergiren.

Ist von den beiden Grössenreihen u_ν, v_ν nur die eine — etwa die der u_ν — so beschaffen, dass

$$\lim_{n=\infty} u_n = 0, \qquad \left|\frac{u_{n+r}}{u_n}\right| \text{ nie unendlich}$$

wird, wogegen

$$\lim_{n=\infty} v_n = v$$

von Null verschieden, also endlich, unendlich oder unbestimmt sein soll und $\left|\frac{v_{n+r}}{v_n}\right|$ gar keiner Bedingung unterliegt, so folgt zunächst aus der Voraussetzung der unbedingten Convergenz von $\sum u_\nu v_\nu$ auch diejenige von $U = \sum u_\nu$ (da ja $U = \sum \frac{1}{v_\nu} \cdot u_\nu v_\nu$ und $\frac{1}{v_\nu}$ nicht unendlich wird). Dann wird offenbar

$$\lim_{n=\infty} v_n \sum_0^n{}^{x} u_x = v \cdot U$$

von Null verschieden (sofern nicht etwa gerade $U = 0$ ist), dagegen ganz wie früher

$$\lim_{n=\infty} u_n \sum_0^n{}^{x} v_x = 0$$

sein. In diesem Falle wird also noch die eine Transformation

$$\sum_0^\infty{}^{\nu} u_\nu v_\nu = \sum_0^\infty{}^{\nu}(u_\nu - u_{\nu+1})(v_0 + \cdots + v_\nu) \tag{39}$$

bestehen bleiben, also die Reihe

$$\sum_0^\infty{}_\nu (u_\nu - u_{\nu+1})(v_0 + \cdots + v_\nu)$$

convergent sein (und zwar im allgemeinen wiederum nur bedingt).

(Besitzt hierbei v_n für $n = \infty$ den *bestimmten* endlichen Grenzwerth v, so hat man auch

$$\sum_0^\infty{}_\nu u_\nu v_\nu = \sum_0^\infty{}_\nu (v_\nu - v_{\nu+1})(u_0 + \cdots + u_\nu) + v \cdot U,$$

sodass also in diesem Falle die Reihe

$$\sum_0^\infty{}_\nu (v_\nu - v_{\nu+1})(u_0 + \cdots + u_\nu)$$

ebenfalls noch convergirt, jedoch gegen eine andere Summe als jene erste, nämlich gegen den Werth $\sum u_\nu v_\nu - v\,U$).

Der in Gleichung (39) enthaltene Satz bildet offenbar das genaue Gegenstück zu dem früher erwähnten (s. I am Ende) Dirichlet'schen Convergenzkriterium, bei dem im wesentlichen aus der *unbedingten* Convergenz der Reihe

$$\sum_0^\infty{}_\nu (u_\nu - u_{\nu+1})(v_0 + \cdots + v_\nu)$$

auf die im allgemeinen nur *bedingte* Convergenz der Reihe $\sum_0^\infty{}_\nu u_\nu v_\nu$ geschlossen wird. Jener Dirichlet'sche Satz setzt nämlich in Bezug auf die eine Grössenreihe — etwa die der u_ν — voraus, dass dieselben aus niemals zunehmenden, für $\nu = \infty$ verschwindenden Grössen einerlei Zeichens bestehen soll (wobei man für die erste dieser Bedingungen, welche offenbar die unbedingte Convergenz der Reihe

$$(u_0 - u_1) + (u_1 - u_2) + (u_2 - u_3) + \cdots$$

nach sich zieht, in etwas allgemeinerer Weise diese Convergenz selbst substituiren kann); sodann sollen die v_ν so beschaffen sein, dass $v_0 + v_1 + \cdots + v_n = V_n$ für kein noch so grosses n unendlich wird (so dass also die Reihe V convergiren oder innerhalb *endlicher* Unbestimmtheitsgrenzen oscilliren muss). Diese Bedingungen zusammen laufen aber offenbar darauf hinaus, dass die Reihe

$$\sum_0^\infty{}_\nu (u_\nu - u_{\nu+1})(v_0 + \cdots + v_\nu)$$

als unbedingt convergent und

$$\lim_{n=\infty} u_n(v_0 + \cdots + v_n) = 0$$

vorausgesetzt wird. Daraus folgt dann in der That genau wie oben die Gültigkeit der Transformation

$$\sum_0^\infty{}_\nu (u_\nu - u_{\nu+1})\,(v_0 + \cdots + v_\nu) = \sum_0^\infty{}_\nu u_\nu v_\nu$$

und somit — in umgekehrter Schlussfolge wie dort — die (im allgemeinen wiederum nur bedingte) Convergenz der Reihe $\sum u_\nu v_\nu$. — Man wird hiernach den Inhalt der obigen Betrachtung (Gleichung 39) und jenes Dirichlet'schen Satzes etwa folgendermassen zusammenfassen können:

Ist $\lim_{n=\infty} u_n = 0$ und von den beiden Reihen

$$\text{(I)}\quad \sum_0^\infty{}_\nu u_\nu v_\nu\,, \qquad \text{(II)}\quad \sum_0^\infty{}_\nu (u_\nu - u_{\nu+1})\,(v_0 + \cdots + v_\nu)$$

entweder: (I) unbedingt convergent und $\frac{u_{n+r}}{u_n}$ niemals unendlich;

oder: (II) unbedingt convergent und $(v_0 + v_1 + \cdots + v_n$ niemals unendlich;

so convergirt jedesmal auch die betreffende andere Reihe — und zwar im allgemeinen nur bedingt — gegen die nämliche Summe.

Da übrigens $u_\nu v_\nu = (-1)^\nu u_\nu \cdot (-1)^\nu v_\nu$, so kann man die Reihe (II) auch durch die folgende:

$$\sum_0^\infty{}_\nu (-1)^\nu (u_\nu + u_{\nu+1})\,(v_0 - v_1 + v_2 - \cdots \pm v_\nu)$$

ersetzen. Da ferner mit der Reihe

$$\text{(I)}\qquad \sum_0^\infty{}_\nu u_\nu v_\nu$$

auch die folgende:

$$\text{(Ia)}\qquad \sum_0^\infty{}_\nu (-1)^\nu u_\nu v_\nu$$

unbedingt convergirt und diese letztere aus (I) hervorgeht, wenn man entweder u_ν mit $(-1)^\nu u_\nu$ oder v_ν mit $(-1)^\nu v_\nu$ vertauscht, so kann man die Reihe (I) durch (Ia) und gleichzeitig die Reihe (II) durch jede der beiden Reihen

$$\text{(IIa)} \qquad \begin{cases} \sum_0^\infty{}_\nu (-1)^\nu (u_\nu + u_{\nu+1})(v_0 + v_1 + \cdots + v_\nu) \\ \sum_0^\infty{}_\nu (u_\nu - u_{\nu+1})(v_0 - v_1 + v_2 - \cdots \pm v_\nu) \end{cases}$$

ersetzen. — Schliesslich sei noch hemerkt, dass man die Bedingung

$$\frac{u_{n+r}}{u_n} \text{ niemals unendlich}$$

in der nämlichen Weise modificiren bezw. erweitern kann, wie dies oben (unter Nr. III) geschehen. —

Carlsbad, September 1882.

Nachtrag.

Die von mir in diesem Aufsatze ausgesprochene Ansicht, es müsse vielen Mathematikern trotz der allgemeinen Bekanntschaft, deren sich die Abel'sche Abhandlung über die binomische Reihe zweifellos zu erfreuen hat, völlig entgangen sein, dass dort bereits die Anwendbarkeit der Cauchy'schen Multiplicationsregel auch für zwei *bedingt* convergente Reihen dargethan wird, findet eine merkwürdige Bestätigung durch einen in Schlömilch's Zeitschrift für Mathematik*) veröffentlichten, mir erst neuerdings zufällig zu Gesicht gekommenen Aufsatz von Herrn Prof. Stolz in Innsbruck. In diesem Aufsatze, — betitelt: Beweis einiger Sätze über Potenzreihen — welcher ausdrücklich von jener Abel'schen Abhandlung ausgeht und dieselbe auch im weiteren Verlaufe mehrfach citirt, heisst es zunächst unter § 1, Abel habe die Stetigkeit der durch eine Potenzreihe definirten Function nur für das *Innere* des Convergenzkreises nachgewiesen und erst Dirichlet den entsprechenden Nachweis für einen *Punkt des Convergenzkreises* (sofern die Reihe dort noch convergirt) hinzugefügt. Schon diese Behauptung dürfte als entschieden irrthümlich bezeichnet werden**): Abel unterscheidet bei dem betreffenden Satze (Satz IV der gen. Abh.***)) *überhaupt nicht* zwischen dem Inneren und der Peripherie des Convergenzkreises (bezw. — da es sich an der betreffenden Stelle zunächst nur um reelle Variable handelt — zwischen dem Innern und den Grenzen des Convergenzintervalls), und sein Stetigkeitsbeweis gilt in der That in ganz gleicher Weise für das Innere wie für die *Grenzen* des Con-

*) Jahrgang 1875. S. 369 ff.

**) Dieser Irrthum ist auch ohne Correctur in das betreffende Referat des Jahrbuches über die Fortschritte der Mathematik übergegangen — 3. Jahrgang 1875. S. 123.

***) Crelle's Journal, Bd. I, S. 314. Abel, Oeuvres compl. 2e éd. T. I, p. 223

vergenzbereiches. Dies hat auch Dirichlet — bezw. Liouville*) der den Dirichlet'schen Beweis mittheilt — an der betreffenden Stelle unzweideutig anerkannt: er prätendirt dort keineswegs, eine wesentlich neue Erweiterung oder Ergänzung zu dem Abel'schen Satze zu liefern, sondern sucht denselben nur, soweit er sich auf die Convergenzgrenze bezieht, deutlicher zu formuliren und sodann — da der Abel'sche Beweis von verschiedenen Seiten nicht recht verstanden worden zu sein schien — *von neuem* zu beweisen.**) Dass aber auch Abel selbst die Gültigkeit seines Stetigkeitssatzes für die *Convergenzgrenze* in Anspruch nimmt, zeigt zur Evidenz die in Rede stehende Anwendung, die er davon für die Verallgemeinerung der Multiplicationsregel macht (Satz VI a. a. O.***)). Allerdings werden dort die zu multiplicirenden Reihen:

$$(t_0 + t_1 + t_2 + \cdots), \qquad (t_0' + t_1' + t_2' + \cdots)$$

nur *schlechthin als convergent* bezeichnet: dass es sich hierbei aber um die Zulässigkeit eventuell nur *bedingter* Convergenz handelt, kann gar keinem Zweifel unterliegen, nicht nur weil die Potenzreihen

$$(t_0 + t_1\alpha + t_2\alpha^2 + \cdots), \qquad (t_0' + t_1'\alpha + t_2'\alpha^2 + \cdots)$$

ausdrücklich lediglich für solche Werthe von α, welche *kleiner* als 1 sind, als *unbedingt* convergent bezeichnet werden, sondern weil überhaupt dieser genannte Zusatz nicht den geringsten Sinn hätte, wenn für die Reihen $\sum t_n$, $\sum t_n'$ *unbedingte* Convergenz gefordert wird: denn die Multiplication zweier *unbedingt* convergenten Reihen wird ja unmittelbar vorher vollständig erledigt.

Da nun aber Herr Stolz einmal den Irrthum begeht, den Abel'schen Stetigkeitsbeweis lediglich auf das Innere des Convergenzbereiches zu beziehen, ohne dass der eben erwähnte Zusatz zur Multiplicationsregel ihn eines besseren belehrte, so musste ihm folgerichtig der Sinn dieses Zusatzes völlig verborgen bleiben. Und so heisst es dann auch unter § 2 seines Aufsatzes (a. a. O. 371) folgendermassen:

> „Aus diesem Satze†) ergiebt sich unmittelbar das folgende Corollar, *welches bisher noch nicht veröffentlicht zu sein scheint:*

---

*) S. dessen Journal, 2e Série, T. VII, p. 253.

**) Uebrigens dürfte der Abel'sche Beweis nichtsdestoweniger kaum anzufechten sein und auch heutzutage, wo man den Begriff der gleichmässigen Convergenz klar erfasst hat, dem Verständnisse keinerlei Schwierigkeiten mehr bereiten.

***) Crelle, Bd. I, S. 317. Abel, Oeuvres T. II, p. 226.

†) Nämlich einer gewissen Verallgemeinerung des Abel-Dirichlet'schen Stetigkeitsgesetzes.

Sind die Reihen mit reellen oder complexen Gliedern

$$\sum_0^\infty a_n, \qquad \sum_0^\infty b_n$$

convergent, ebenso auch die Reihe $\sum_0^\infty c_n$, wo

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0$$

so ist $\sum c_n = ab$, wenn a, b bezüglich die Summen der beiden obigen Reihen bezeichnen —"

während doch thatsächlich dieses angeblich neue Corollar mit dem erwähnten Abel'schen Zusatze vollkommen identisch ist. Der letztere muss daher nicht nur Herrn Stolz, sondern wohl auch den meisten seiner Leser entweder völlig entgangen oder doch unverständlich geblieben sein: wenigstens ist mir nicht bekannt, dass irgend jemand die von Herrn Stolz bezüglich jenes gar nicht unwichtigen Satzes mit nur geringem Vorbehalte in Anspruch genommene Priorität angefochten, bezw. für Abel reclamirt hätte.

Bei dieser Gelegenheit sei noch der Vollständigkeit halber erwähnt, dass auch in Stern's bekanntem Lehrbuche der algebraischen Analysis*) aus der Stetigkeit der Potenzreihe — deren Beweis übrigens dort (§ 54) auf eine dritte, sowohl von Abel's, wie von Dirichlet's Methode abweichende Art versucht wird**) — in derselben Weise wie bei Abel die Anwendbarkeit der Multiplicationsregel auf bedingt convergente Reihen (sofern nur die Productreihe convergirt) gefolgert wird.

München, 11. November 1882.

*) Leipzig und Heidelberg 1860.

**) Der Beweis ist indessen unzureichend.

Ein Analogon zu Gauss' Satz von der Krümmung der Flächen.

Von

Rudolf Sturm in Münster i./W.

Der Satz von Gauss lautet bekanntlich:

„Umgiebt man den betrachteten Punkt P der Fläche F mit einem geschlossenen Curvenzug p, construirt dann auf einer Kugel vom Radius 1 — Kugel (1) künftighin genannt — die Curve p', für deren Punkte die nach dem Mittelpunkte hin gezogenen Radien parallel sind mit den im positiven Sinne gezogenen Flächennormalen der Punkte von p; so ist der Grenzwerth des Verhältnisses der von p' und p eingeschlossenen Flächenstücke f' und f, wenn p dem Punkte P immer näher rückt, gleich dem reciproken Producte der beiden Hauptkrümmungsradien R_1, R_2 von P."

Wir wollen p' und f' das Gaussische Bild von p und f nennen; ferner, der Einfachheit halber, die Tangentialebene von P uns horizontal vorstellen und die positiven Halbstrahlen der Normalen (wenigstens in der Nachbarschaft von P, die uns ja allein interessirt) nach unten gezogen denken, so dass dann auch nach unten gehende Krümmungsradien positiv sind und das sphärische Bild f' auf dem obersten Theile der Kugel (1) sich befindet.

Der analoge Satz nun, den ich darthun will und der noch nicht bekannt zu sein scheint, ist:

Wird die Curve p durch eine Kugel um P in die Fläche eingeschnitten, so ist die sogenannte mittlere Krümmung der Fläche in P

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right),$$

also — abgesehen vom Factor $\frac{1}{2}$ — das von Sophie Germain*) vorgeschlagene Krümmungsmaass, *der Grenzwerth des Verhältnisses der beiden Perimeter der Curven p' und p.*

*) Crelle's Journal Bd. 7, S. 1.

1. Wir denken uns die Parallelfläche $\overline{F}$ zur Fläche F für die Entfernung h construirt, nehmen aber h gerade positiv, wenn es auf dem negativen Normalenhalbstrahle sich befindet; so ist das Verhältniss entsprechender Flächenelemente auf $\overline{F}$ und F

$$\left(1+\frac{h}{R_1}\right)\left(1+\frac{h}{R_2}\right);$$

denn der dem Punkt P entsprechende Punkt $\overline{P}$ hat ersichtlich die Hauptkrümmungsradien R_1+h, R_2+h (die bei positivem h grösser sind, daher die obige Vorzeichenbestimmung) und die entsprechenden von Krümmungslinien eingeschlossenen Elementarparallelogramme haben jenes Verhältniss.

2. Betrachten wir nun, wie es Steiner thut in seinem im Mai 1840 in der Berliner Akademie gehaltenen Vortrag über parallele Flächen*), der insbesondere mich zu den folgenden Betrachtungen angeregt hat, statt der gekrümmten Fläche eine polyedrische Π und construiren das parallele Polyeder $\overline{\Pi}$. Dessen Gesammtfläche besteht erstens aus einem der Oberfläche von Π gleichem Theile A; sodann liefert jede Kante von Π einen cylindrischen Theil zur Oberfläche von $\overline{\Pi}$ von der Grösse $h\gamma\tau$, wenn γ die Länge der Kante und τ der Nebenwinkel des Innenflächenwinkels von Π an der Kante ist. Diese Innenwinkel befinden sich auf der andern Seite als die positiven h, und liefern negative und auf der Innenseite befindliche τ, wenn sie grösser als π sind. Endlich liefert jede Ecke von Π für die Oberfläche von $\overline{\Pi}$ ein sphärisches Polygon auf einer Kugel vom Radius h, welches durch die Supplementarecke eingeschnitten wird. Ist $\Sigma\varphi$ die Summe der Kantenwinkel der Ecke von Π, so ist sein Inhalt $h^2(2\pi-\Sigma\varphi)$. Die Gesammtoberfläche von $\overline{\Pi}$ ist demnach:

$$A+h\Sigma\gamma\tau+h^2\Sigma(2\pi-\Sigma\varphi)$$

wo die Summen über alle Kanten, bez. Ecken von Π auszudehnen sind.

Ist Π nicht vollständig geschlossen, sondern durch einen Rand begrenzt, so ist die erste Summe nur über die nicht zu demselben gehörigen Kanten (Innenkanten) auszudehnen; für die zweite Summe ist, behufs der Construction der Supplementarecke, jede Randecke von Π, durch Fortsetzung der beiden an den Rand stossenden Seitenflächen bis zum Schnitte, zu vervollständigen; so dass, im Falle in einer Randecke nur zwei Flächen des begrenzten Polyeders zusammenstossen, sich gar keine Supplementarecke ergiebt und eine solche Randecke in der Summe ausfällt: die vervollständigte Ecke wird ja auch von zwei flachen Winkeln gebildet, so dass $2\pi-\Sigma\varphi=0$ ist.

*) J. Steiner's gesammelte Werke Bd. II, S. 171.

Die beiden Summen $\Sigma\gamma\tau$ und $\Sigma(2\pi - \Sigma\varphi)$ nennt Steiner *die Summe der Kantenkrümmung* und *die Summe der Eckenkrümmung* von Π und bezeichnet sie mit k, e; wodurch die Oberfläche von $\overline{\Pi}$ wird:

$$A + hk + h^2 e.$$

Gehen wir nun zu einer gekrümmten Fläche F und zu dem den Punkt P umgebenden unendlich kleinen Flächenstück f, so ist das entsprechende Flächenstück $\bar{f}$ auf der Parallelfläche:

$$\bar{f} = f + hk + h^2 e;$$

andererseits fanden wir oben:

$$f = f\left(1 + \frac{h}{R_1}\right)\left(1 + \frac{h}{R_2}\right);$$

also ist:

$$k = f \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right), \qquad e = f \cdot \frac{1}{R_1 R_2};$$

folglich wird e gleich dem Gaussischen Bilde f' sein.

3. Projiciren wir aus dem Punkte P die Curve p durch einen Kegel, so können wir mit Herrn Minding*) auf der Grenze das Flächentheilchen f ersetzen durch den Theil des Mantels dieses Kegels zwischen Scheitel P und Curve p. Fassen wir diesen Manteltheil als Oberfläche eines berandeten Polyeders auf, so sind die Kegelkanten die Innenkanten und von den Ecken ist nur die Ecke P selbst zu berücksichtigen, da in jeder Randecke bloss zwei Flächen zusammenstossen. Sei γ die Länge der Kegelkante, τ der Contingenzwinkel der in ihr sich schneidenden Berührungsebenen des Kegels, so haben wir:

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{\Sigma\gamma\tau}{f}.$$

Sei weiter φ der Winkel zweier consecutiver Kanten des Kegels und nehmen wir nun an, dass *die Curve p durch eine Kugel um P vom Radius γ eingeschnitten sei*, so ist:

$$f = \frac{1}{2}\gamma^2 \Sigma\varphi,$$

wo $\Sigma\varphi$ sich offenbar nur unendlich wenig von 2π unterscheidet. Also ist:

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{2\Sigma\tau}{\gamma\Sigma\varphi};$$

aber $\gamma\Sigma\varphi$ ist der Perimeter p von p; mithin:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) = \frac{\Sigma\tau}{p}.$$

Zieht man nun in den Punkten von p die Normalen an die Kegelfläche, welche, so lange die Grenze noch nicht erreicht ist, sich von

*) Crelle's Journal Bd. 19, S. 370.

den Normalen von F unterscheiden, sodann die ihnen parallelen Radien bei der Kugel (1); so erhält man eine Curve, die auf der Grenze in das Gaussische Bild p' übergeht, und andererseits die Polarcurve derjenigen Curve p_1 auf der Kugel (1) ist, die durch den nach dem Centrum O von (1) parallel verlegten Kegel (Pp) eingeschnitten wird. Bedeutet p_1 noch deren Umfang, so ist:

$$p_1 = \Sigma\varphi,$$

also der Inhalt des von p' eingeschlossenen Flächentheilchens

$$f' = 2\pi - p_1 = 2\pi - \Sigma\varphi,$$

und da wir es nur mit einer Ecke P zu thun haben, so ist dies e; also:

$$\frac{1}{R_1 R_2} = \frac{f'}{f},$$

wie bei Gauss.*)

Ferner ist jeder Flächenwinkel τ gleich dem entsprechenden Kantenwinkel des p' projicirenden Supplementarkegels; daher ist $\Sigma\tau$ gleich dem Perimeter p', und demnach:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) = \frac{p'}{p},$$

wie oben behauptet.

Natürlich beziehen sich alle Formeln auf den Grenzfall.

So zeigt sich, dass Sophie Germain's Krümmungsmaass $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$ doch nicht so ganz gegenüber dem Gaussischen zurückzusetzen ist und seine Definition nicht so willkürlich ist, wie sie z. B. Cournot in seiner Théorie des fonctions (letzte Seite des ersten Bandes) nennt. Freilich bleibt ja natürlich das Gaussische unbedingt das werthvollere und insbesondere sind die Betrachtungen, durch welche Frl. Germain ihren Vorschlag begründet, wenig annehmbar.

Uebrigens hat ja auch die mittlere Krümmung in der Theorie der Minimalflächen die ihr gebührende Bedeutung erlangt.

4. Es dürfte noch eine Discussion über das *Vorzeichen von f' und p'* nothwendig sein, und wir können uns dabei mit dem Falle *hyperbolischer Krümmung* in P begnügen. Die Curve p wird dann die Tangentialebene des Punktes P viermal überschreiten, und ebenso wird die Curve p_1 den grössten Kreis auf (1) viermal überschreiten, dessen Ebene zur Tangentialebene parallel ist; also ist ihr Perimeter grösser, als der dieses Kreises, und demnach $2\pi - p_1$ und f' negativ. In der That werden ja auch in diesem Falle die beiden Flächen f, f', wenn

*) Herr Minding zeigt a. a. O., dass bei der Verbiegung f, die einzelnen φ, also auch f' und $\frac{1}{R_1 R_2}$ sich nicht ändern; was ein sehr anschaulicher Beweis des bekannten Satzes von Gauss ist, der nicht hinreichend bekannt zu sein scheint.

sie von gleichartigen Seiten der Fläche F und der Kugel, z. B. von den Seiten der negativen Normalen, also von oben her, betrachtet werden, bei entsprechender Durchlaufung von p, p', im entgegengesetzten Sinne umlaufen, wie dies Gauss auseinandergesetzt hat.

Die zwei Theile des Kegelmantels (Pp), welche sich unterhalb der Berührungsebene befinden, wenden ihre Convexität nach unten; ist z. B. Q ein Punkt eines untern Theils von p, so befindet er sich auf einem Normalschnitt von P, der seine concave Seite nach unten wendet; QP wird auf der Grenze dessen Tangente und zur Tangente in Q an p conjügirt, also von ihr durch die Haupttangenten getrennt, so dass p und der Kegel (Pp) seine convexe Seite nach unten wendet. Folglich sind diese Manteltheile von (Pp) als einspringend anzusehen, und die Winkel τ, auf der andern Seite als die positiven h gelegen, als negativ.

Stellen wir uns auf der Kugel (1) den untern von p_1 eingeschlossenen, nahezu der Halbkugel gleichen Oberflächentheil Δ vor; er greift mit zwei kleinen Theilen δ_1, δ_3 auf die obere Hälfte und enthält andererseits zwei kleine Theile δ_2, δ_4 der untern Hälfte nicht; so dass:

$$\Delta = 2\pi + \delta_1 + \delta_3 - (\delta_2 + \delta_4).$$

Fassen wir Δ als sphärisches Polygon auf, so werden die positiven τ Nebenwinkel von ausspringenden, die negativen solche von einspringenden Polygonwinkeln; also:

$$\Delta = 2\pi - \Sigma\tau;$$

und demnach:

$$\Sigma\tau = \delta_2 + \delta_4 - (\delta_1 + \delta_3) = p',$$

und das Vorzeichen von $\delta_2 + \delta_4 - (\delta_1 + \delta_3)$ bestimmt das von p'.

Dieser Perimeter p' ist mithin so lange negativ zu zählen, als er negativen Winkeln τ entspricht. Die Uebergangspunkte entsprechen also denjenigen Punkten von p_1, in denen die sphärische Tangente von der einen Seite auf die andere übergeht, also (sphärischen) Wendepunkten; demnach sind die Uebergangspunkte Rückkehrpunkte auf p', so dass diese Curve aus vier durch Spitzen getrennten Bogen besteht, deren Längen abwechselnd positiv und negativ sind.

Die entsprechenden Punkte der Curve p sind nicht an und für sich ausgezeichnet, sondern nur durch die Beziehung zu P; sie sind Berührungspunkte von 4 aus P kommenden Schmiegungsebenen.

Die nach ihnen gehenden Kegelkanten sind Berührungskanten von Wendeberührungsebenen des Kegels, und demnach erhalten wir in jenen Punkten von p zwei consecutive parallele Normalen des Kegels; aber wir erinnern uns, dass diese erst auf der Grenze sich mit den Flächennormalen identificiren. Ein Schluss auf Parallelismus benach-

barten Flächennormalen ist nicht berechtigt, solche kommen ja auch nur auf der parabolischen Curve vor.

Wahrscheinlich sind die Punkte (auf der Grenze) die Begegnungspunkte von p mit den Haupttangenten.

Beachten wir, dass $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)$ auch der Grenzwerth von

$$\frac{\delta_2+\delta_4-(\delta_1+\delta_3)}{p}$$

ist.

Während im Allgemeinen p' und p oder $\delta_2+\delta_4-(\delta_1+\delta_3)$ und p beide derartig der Null sich nähern, dass ihr Verhältniss endlich ist; werden in Punkten, wo die mittlere Krümmung Null ist, p' und $\delta_2+\delta_4-(\delta_1+\delta_3)$ in höherer Ordnung unendlich klein als p; bei den Minimalflächen geschieht dies also durchweg.

Münster i./W., den 8. October 1882.

Ueber die complexe Multiplication hyperelliptischer Functionen zweier Argumente.

Von

E. Wiltheiss in Halle a. d. S.

I.

In den Monatsberichten der Berliner Academie vom Jahre 1866 (S. 597) hat Herr Kronecker ein Verfahren entwickelt, die Parameter τ_{ix} derjenigen Thetafunctionen zu berechnen, welche durch eine bestimmte Transformation nicht geändert werden. Herr Kronecker nimmt dabei einen rein algebraischen Standpunkt ein und kommt zu dem gewünschten Resultate dadurch, dass er in sehr scharfsinniger Weise die Gleichungen auflöst, die zwischen den ursprünglichen Parametern τ_{pq} und den transformirten τ'_{pq} bestehen. — Nun entspricht aber der Transformation der Thetafunctionen eine Transformation der zu diesen Thetafunctionen gehörenden Integrale. Zieht man diesen Umstand mit in Betracht, so kann man auch auf einem andern Wege zur Bestimmung dieser besondern — „singulären“ — Werthe der τ_{pq} gelangen, und es zeigt sich zugleich eine Erscheinung, welche der complexen Multiplication bei den elliptischen Functionen analog ist. Im folgenden will ich dies für Thetafunctionen zweier Variablen ausführen.

Bekanntlich gehört zu jeder Wurzelgrösse

$$\sqrt{(x-a_0)(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)} = \sqrt{R(x)}$$

ein gewisses Werthsystem der Parameter τ_{pq}, das sich in bestimmter Weise mittelst der Integrale $\int \frac{ax+b}{\sqrt{R(x)}}\,dx$ berechnen lässt. In gleicher Weise möge zu den transformirten Parametern τ'_{pq} die Wurzelgrösse $\sqrt{(\xi-\alpha_0)(\xi-\alpha_1)(\xi-\alpha_2)(\xi-\alpha_3)(\xi-\alpha_4)} = \sqrt{P(\xi)}$ gehören.

In Folge der Transformation, durch welche die Thetafunctionen mit den Parametern τ_{pq} in die Thetafunctionen mit den Parametern τ'_{pq} übergeführt werden, bestehen die Gleichungen

$$(1)\qquad \begin{aligned} \sum_\alpha \frac{a'x_\alpha + b'}{\sqrt{R(x_\alpha)}}\, dx_\alpha &= \sum_\alpha \frac{\alpha'\xi_\alpha + \beta'}{\sqrt{P(\xi_\alpha)}}\, d\xi_\alpha, \\ \sum_\alpha \frac{a''x_\alpha + b''}{\sqrt{R(x_\alpha)}}\, dx_\alpha &= \sum_\alpha \frac{\alpha''\xi_\alpha + \beta''}{\sqrt{P(\xi_\alpha)}}\, d\xi_\alpha, \end{aligned}$$

(wobei der Index α wie weiter unten die Indices β und γ die Werthe 1 und 2 annehmen sollen), insofern man die Quotienten der Thetafunctionen mit den Parametern τ_{pq} als Functionen von x_1 und x_2, diejenigen der Thetafunctionen mit den Parametern τ'_{pq} als Functionen von ξ_1 und ξ_2 darstellt. Wenn nun

$$\tau'_{pq} = \tau_{pq}$$

wird, so wird auch $\sqrt{P(\xi)} = \sqrt{R(x)}$ (oder es lässt sich dies durch eine gebrochene lineare Substitution erreichen) und die Gleichungen (1) gehen dann über in:

$$(2)\qquad \begin{aligned} \sum_\alpha \frac{a'x_\alpha + b'}{\sqrt{R(x_\alpha)}}\, dx_\alpha &= \sum_\alpha \frac{\alpha'\xi_\alpha + \beta'}{\sqrt{R(\xi_\alpha)}}\, d\xi_\alpha, \\ \sum_\alpha \frac{a''x_\alpha + b''}{\sqrt{R(x_\alpha)}}\, dx_\alpha &= \sum_\alpha \frac{\alpha''\xi_\alpha + \beta''}{\sqrt{R(\xi_\alpha)}}\, d\xi_\alpha. \end{aligned}$$

Ich bezeichne nun die beiden Wurzeln von

$$(3)\qquad \begin{vmatrix} M\alpha' - a', & M\alpha'' - a'' \\ M\beta' - b', & M\beta'' - b'' \end{vmatrix} = 0$$

mit M_1 und M_2 und setze

$$(4)\qquad \frac{(\alpha'a'' - \alpha''a')\,x + (\beta'a'' - \beta''a') - (\beta'\alpha'' - \beta''\alpha')\,M_\alpha}{\sqrt{R(x)}} = \varphi_\alpha(x);$$

sodann multiplicire ich die erste der beiden Gleichungen (2) mit $a'' - M_\alpha\alpha''$, die zweite mit $-a' + M_\alpha\alpha'$ und addire sie; ich bekomme mit Hilfe der Gleichung (3)

$$(5)\qquad \begin{aligned} M_1 \sum_\alpha \varphi_1(x_\alpha)\, dx_\alpha &= \sum_\alpha \varphi_1(\xi_\alpha)\, d\xi_\alpha, \\ M_2 \sum_\alpha \varphi_2(x_\alpha)\, dx_\alpha &= \sum_\alpha \varphi_2(\xi_\alpha)\, d\xi_\alpha \end{aligned}$$

d. h. *Wenn die Parameter τ_{pq} bei einer bestimmten Transformation ihre Werthe nicht ändern, so giebt es zwei bestimmte, zu diesen τ_{pq} gehörende Integrale erster Gattung:* $\int \varphi_1(x)\, dx$ und $\int \varphi_2(x)\, dx$, *welche die charakteristische Eigenschaft haben, dass durch diese Transformation* $\sum_\alpha \int \varphi_1(x_\alpha)\, dx_\alpha$ bez. $\sum_\alpha \int \varphi_2(x_\alpha)\, dx_\alpha$ *in sich selbst, multiplicirt*

mit $1 : M_1$, bez. $1 : M_2$ *übergehen.* — Da die Grössen M_1 und M_2, wie ich im folgenden zeigen werde, im allgemeinen complex sind, so kann man dem Gebrauche bei den elliptischen Functionen analog sagen, es finde durch diese Transformation eine *complexe Multiplication* statt.

Wird durch irgend eine Transformation $\sum_\alpha \int \frac{\mathfrak{a}_\beta x_\alpha + \mathfrak{b}_\beta}{\sqrt{R(x_\alpha)}}\, dx_\alpha$ in $\sum_\alpha \int \frac{\mathfrak{A}_\beta \xi_\alpha + \mathfrak{B}_\beta}{\sqrt{P(\xi_\alpha)}}\, d\xi_\alpha$ transformirt, und bezeichnet man ein System von Fundamentalperioden des Integrals $\int \frac{\mathfrak{a}_\beta x + \mathfrak{b}_\beta}{\sqrt{R(x)}}\, dx$ mit $\omega_{\beta_1}, \omega_{\beta_2}, \omega'_{\beta_1}, \omega'_{\beta_2}$ und ein System des Integrals $\frac{\mathfrak{A}_\beta \xi + \mathfrak{B}_\beta}{\sqrt{P(\xi)}}\, d\xi$ mit $\Omega_{\beta_1}, \Omega_{\beta_2}, \Omega'_{\beta_1}, \Omega'_{\beta_2}$, so bestehen bekanntlich zwischen denselben die folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned} \omega_{\alpha\beta} &= \sum_\gamma (n_{\beta,\gamma}\ \Omega_{\alpha\gamma} + n_{\beta,\gamma+2}\ \Omega'_{\alpha\gamma}), \\ \omega'_{\alpha\beta} &= \sum_\gamma (n_{\beta+2,\gamma}\Omega_{\alpha\gamma} + n_{\beta+2,\gamma+2}\Omega'_{\alpha\gamma}), \end{aligned} \tag{6}$$

in denen die ganzen Zahlen $n_{\lambda\mu}$, welche die Transformation bestimmen, durch die Gleichungen:

$$\begin{aligned} \sum_\beta (n_{\beta,\lambda} n_{\beta+2,\lambda+1} - n_{\beta,\lambda+1} n_{\beta+2,\lambda}) &= 0, \quad \lambda = 1, 2, 3, 4, \\ \sum_\beta (n_{\beta\alpha} n_{\beta+2,\alpha+2} - n_{\beta,\alpha+2} n_{\beta+2,\alpha}) &= \varkappa, \quad \alpha = 1, 2, \end{aligned} \tag{7}$$

oder auch:

$$\begin{aligned} \sum_\beta (n_{\lambda,\beta}\, n_{\lambda+1,\beta+2} - n_{\lambda+1,\beta}\, n_{\lambda,\beta+2}) &= 0, \\ \sum_\beta (n_{\alpha,\beta} n_{\alpha+2,\beta+2} - n_{\alpha+2,\beta} n_{\alpha,\beta+2}) &= \varkappa, \end{aligned} \tag{7}$$

(die Indices sind darin mod. 4 auf die Werthe 1, 2, 3, 4 zu reduciren), verbunden sind. (Vergl. Hermite, Comptes rendus, t. XL). Nimmt man nun für $\int \frac{\mathfrak{a}_\beta x + \mathfrak{b}_\beta}{\sqrt{R(x)}}\, dx$ das specielle Integral $M_\beta \int \varphi_\beta(x)\, dx$, und also für $\int \frac{\mathfrak{A}_\beta \xi + \mathfrak{B}_\beta}{\sqrt{P(\xi)}}\, d\xi$ das Integral $\int \varphi_\beta(x)\, dx$, wie es zu Folge der Gleichungen (5) sein muss, und bezeichnet man das System der Fundamentalperioden des speciellen Integrals $\int \varphi_\beta(x)\, dx$ mit $\varpi_{\beta_1}, \varpi_{\beta_2}, \varpi'_{\beta_1}, \varpi'_{\beta_2}$, so gehen die Gleichungen (6) über in

$$(8)\qquad \begin{aligned} M_\alpha \varpi_{\alpha\beta} &= \sum_\gamma (n_{\beta,\gamma}\ \varpi_{\alpha\gamma} + n_{\beta,\gamma+2}\ \varpi'_{\alpha\gamma}),\\ M_\alpha \varpi'_{\alpha\beta} &= \sum_\gamma (n_{\beta+2,\gamma}\,\varpi_{\alpha\gamma} + n_{\beta+2,\gamma+2}\,\varpi'_{\alpha\gamma}). \end{aligned}$$

Und diese Gleichungen drücken aus, dass *die Fundamentalperioden des speciellen Integrals* $\int \varphi_\alpha(x)dx$ *rationale Functionen des Multiplicators* M_α *sind.*

Die Grössen τ_{pq} sind durch

$$(9)\qquad \begin{aligned} \tau_{11} &= \frac{\varpi'_{11}\varpi_{22} - \varpi_{12}\varpi'_{21}}{\varpi_{11}\varpi_{22} - \varpi_{12}\varpi_{21}}, \qquad \tau_{21} = \frac{\varpi_{11}\varpi'_{21} - \varpi'_{11}\varpi_{21}}{\varpi_{11}\varpi_{22} - \varpi_{12}\varpi_{21}},\\ \tau_{12} &= \frac{\varpi'_{12}\varpi_{22} - \varpi_{12}\varpi'_{22}}{\varpi_{11}\varpi_{22} - \varpi_{12}\varpi_{21}}, \qquad \tau_{22} = \frac{\varpi_{11}\varpi'_{22} - \varpi'_{12}\varpi_{21}}{\varpi_{11}\varpi_{22} - \varpi_{12}\varpi_{21}} \end{aligned}$$

von den Perioden $\varpi_{\alpha\beta}$, $\varpi'_{\alpha\beta}$ abhängig gemacht; sie sind also ebenso wie diese Grössen $\varpi_{\alpha\beta}$, $\varpi'_{\alpha\beta}$ rationale Functionen der Multiplicatoren M_1 und M_2. Um dies näher zu untersuchen, setze ich in den Gleichungen (8) 1 bez. 2 an Stelle von α, multiplicire die zwei erhaltenen Systeme, jede Gleichung des einen mit jeder Gleichung des andern und zwar Seite für Seite, und subtrahire in geeigneter Weise je zwei der erhaltenen Gleichungen von einander. Dadurch erhalte ich, wenn ich noch

$$\frac{\varpi'_{12}\varpi'_{21} - \varpi'_{11}\varpi'_{22}}{\varpi_{11}\varpi_{22} - \varpi_{12}\varpi_{21}} = \tau_{12}\tau_{21} - \tau_{11}\tau_{22} = t,$$

und

$$n_{\varkappa\mu}\, n_{\lambda\nu} - n_{\varkappa\nu}\, n_{\lambda\mu} = (\varkappa\lambda|\mu\nu)$$

setze:

$$(10)\qquad \begin{aligned} M_1M_2 &= (12|12)+(12|13)\tau_{21}+(12|14)\tau_{22}-(12|23)\tau_{11}\\ &\quad -(12|24)\tau_{12}-(12|34)t,\\ M_1M_2\tau_{21} &= (13|12)+(13|13)\tau_{21}+(13|14)\tau_{22}-(13|23)\tau_{11}\\ &\quad -(13|24)\tau_{12}-(13|34)t,\\ M_1M_2\tau_{22} &= (14|12)+(14|13)\tau_{21}+(14|14)\tau_{22}-(14|23)\tau_{11}\\ &\quad -(14|24)\tau_{12}-(14|34)t,\\ -M_1M_2\tau_{11} &= (23|12)+(23|13)\tau_{21}+(23|14)\tau_{22}-(23|23)\tau_{11}\\ &\quad -(23|24)\tau_{12}-(23|34)t,\\ -M_1M_2\tau_{12} &= (24|12)+(24|13)\tau_{21}+(24|14)\tau_{22}-(24|23)\tau_{12}\\ &\quad -(24|24)\tau_{12}-(24|34)t,\\ -M_1M_2t &= (34|12)+(34|13)\tau_{21}+(34|14)\tau_{22}-(34|23)\tau_{11}\\ &\quad -(24|24)\tau_{12}-(34|34)t. \end{aligned}$$

Aus diesen Gleichungen ersieht man, dass *die Parameter* τ_{pq} *Functionen des Productes der beiden Multiplicatoren* M_1 *und* M_2 *sind.*

Diese Gleichungen (10) kann man noch auf andere bemerkenswerthe Formen bringen: So erhält man mit Hilfe der Gleichungen (7), wenn man die zweite und fünfte Gleichung addirt:

$$(11) \quad \cdot \qquad (\tau_{12} - \tau_{21})\,(M_1 M_2 - \varkappa) = 0;$$

wenn man die erste mit $-n_{3,\lambda}$, die zweite mit $n_{2,\lambda}$, die vierte mit $-n_{1,\lambda}$ (wobei $\lambda = 1, 2, 3, 4$ sein kann) multiplicirt, und diese Gleichungen alsdann addirt:

$$(12) \quad \begin{aligned}
M_1 M_2(n_{11}\tau_{11}+n_{21}\tau_{21}-n_{31}) &= \varkappa(-n_{21}\tau_{12}+n_{22}\tau_{11} \quad * \quad -n_{24}t\ ),\\
M_1 M_2(n_{12}\tau_{11}+n_{22}\tau_{21}-n_{32}) &= \varkappa(-n_{21}\tau_{22}+n_{22}\tau_{21}+n_{23}t \quad *\ ),\\
M_1 M_2(n_{13}\tau_{11}+n_{23}\tau_{21}-n_{33}) &= \varkappa(\ * \quad -n_{22} \quad -n_{23}\tau_{12}-n_{24}\tau_{22}),\\
M_1 M_2(n_{14}\tau_{11}+n_{24}\tau_{22}-n_{34}) &= \varkappa(+n_{21} \quad * \quad +n_{23}\tau_{11}+n_{24}\tau_{21}).
\end{aligned}$$

Und ähnliche Gleichungssysteme wie dies letztere existiren noch drei weitere, die man in analoger Weise bilden kann:

$$(12) \quad \begin{aligned}
M_1 M_2(n_{11}\tau_{12}+n_{21}\tau_{22}-n_{41}\ ) &= \varkappa(+n_{11}\tau_{12}-n_{12}\tau_{11} \quad * \quad +n_{14}t),\\
M_1 M_2(n_{12}\tau_{12}+n_{22}\tau_{22}-n_{42}\ ) &= \varkappa(+n_{11}\tau_{22}-n_{12}\tau_{21}-n_{13}t \quad *\ ),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
M_1 M_2(n_{11}t \ +n_{31}\tau_{22}-n_{41}\tau_{21}) &= \varkappa(+n_{41}\tau_{12}-n_{42}\tau_{11} \quad * \quad +n_{44}t),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
M_1 M_2(n_{21}t \ -n_{31}\tau_{12}+n_{41}\tau_{11}) &= \varkappa(-n_{31}\tau_{12}+n_{32}\tau_{11} \quad * \quad -n_{34}t),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

Ferner kann man ein bemerkenswerthes Gleichungssystem zwischen den τ_{pq} dadurch herstellen, dass man in die identischen Gleichungen

$$(13) \quad \begin{aligned}
\varpi_{\alpha 1}\tau_{11} + \varpi_{\alpha 2}\tau_{21} &= \varpi'_{\alpha 1},\\
\varpi_{\alpha 1}\tau_{12} + \varpi_{\alpha 2}\tau_{22} &= \varpi'_{\alpha 2}
\end{aligned}$$

die Werthe von $\varpi_{\alpha 1} : \varpi_{\alpha 2} : \varpi'_{\alpha 1} : \varpi'_{\alpha 2}$ aus den Gleichungen (8) substituirt. —

Was nun endlich die Multiplicatoren M_1 und M_2 anbelangt, so sind dieselben als Functionen von a', b', a'', b'', α', β', α'', β'' (vergl. (2)) eingeführt worden; sie hängen aber auch in höchst einfacher Weise von den Zahlen $n_{\lambda\mu}$ ab: eliminirt man nämlich die $\varpi_{\alpha\beta}$, $\varpi'_{\alpha\beta}$ aus den Gleichungen (8), so ergiebt sich, dass die M_1 und M_2 zwei Wurzeln der Gleichung

$$(14) \quad \Delta(M) = \begin{vmatrix}
n_{11} - M, & n_{12}, & n_{13}, & n_{14}\\
n_{21}, & n_{22} - M, & n_{23}, & n_{24}\\
n_{31}, & n_{32}, & n_{33} - M, & n_{34}\\
n_{41}, & n_{42}, & n_{43}, & n_{44} - M
\end{vmatrix}$$

sind, welche man mit Hilfe der Bedingungsgleichungen (7) auf die Form

$$\Delta(M) = M^4 - AM^3 + BM^2 - A\varkappa M + \varkappa^2 = 0 \tag{14a}$$

bringen kann. *Die Multiplicatoren M_1 und M_2 sind also Wurzeln einer Gleichung 4. Grades, deren Coefficienten ganze Functionen der Zahlen $n_{\lambda\mu}$ sind; der Coefficient von M^4 ist gleich Eins; die Gleichung bleibt ungeändert, wenn man $\varkappa : M$ an Stelle von M setzt.*

Die Irrationalität $u_\lambda : v_\lambda$, von der die Parameter τ_{pq} in der erwähnten Arbeit von Herrn Kronecker abhängig erscheinen, ist gleich $M_\lambda^2 : \varkappa$. Denn zu Folge der Bedingungsgleichungen (7) kann man die Gleichungen (8) auch schreiben:

$$\begin{aligned} \varkappa \varpi_{\alpha\beta} &= M_\alpha \sum_\gamma (n_{\gamma+2,\beta+2}\varpi_{\alpha\gamma} - n_{\gamma,\beta+2}\varpi'_{\alpha\gamma}), \\ \varkappa \varpi'_{\alpha\beta} &= M_\alpha \sum_\gamma (-n_{\gamma+2,\beta}\varpi_{\alpha\gamma} + n_{\gamma,\beta}\varpi'_{\alpha\gamma}). \end{aligned} \tag{8a}$$

Aus diesen Gleichungen und den Gleichungen (8) folgt nun:

$$\begin{aligned} \varkappa \sum_\gamma (n_{\beta,\gamma}\varpi_{\alpha\gamma} + n_{\beta,\gamma+2}\varpi'_{\alpha\gamma}) &= M_\alpha^2 \sum_\gamma (n_{\gamma+2,\beta+2}\varpi_{\alpha\gamma} - n_{\gamma,\beta+2}\varpi'_{\alpha\gamma}), \\ \varkappa \sum_\gamma (n_{\beta+2,\gamma}\varpi_{\alpha\gamma} + n_{\beta+2,\gamma+2}\varpi'_{\alpha\gamma}) &= M_\alpha^2 \sum_\gamma (-n_{\gamma+2,\beta}\varpi_{\alpha\gamma} + n_{\gamma,\beta}\varpi'_{\alpha\gamma}), \end{aligned} \tag{8b}$$

und eliminirt man aus diesen Gleichungen die $\varpi_{\alpha\beta}$, $\varpi'_{\alpha\beta}$, so erhält man genau die Determinante, deren Wurzeln $M_\alpha^2 : \varkappa$ identisch mit $u_\alpha : v_\alpha$ sind. Substituirt man ferner die aus (8b) berechneten Werthe von $\varpi_{\alpha\beta}$, $\varpi'_{\alpha\beta}$ in das Gleichungssystem (13), so geht dasselbe in das System über, zu dem Herr Kronecker zuletzt (p. 606) gekommen ist.

II.

Ist nun die Transformation dadurch, dass die Zahlen $n_{\lambda\mu}$ bekannt sind, bestimmt, so kann man auf Grund der vorhergehenden Betrachtungen in folgender Weise die Werthe der τ_{pq} berechnen: Man bestimmt die Wurzeln der Gleichungen (14), setzt die Werthe zweier derselben an Stelle von M_1 und M_2 in das Gleichungssystem (10) (bez. in das Gleichungssystem (12)) und berechnet aus diesem die τ_{pq} direct; oder man setzt sie in das Gleichungssystem (8), sucht zuerst die Werthe von $\varpi_{\alpha\beta}$, $\varpi'_{\alpha\beta}$ und erhält dann aus diesen Grössen die Werthe

von τ_{pq} mittelst (9) oder mittelst (10). Die so erhaltenen Werthe von τ_{pq} sind dann brauchbar, wenn die Bedingungen

(15) $$\tau_{12} = \tau_{21}$$

oder

(15a) $$\varpi_{11}\varpi'_{21} - \varpi_{21}\varpi'_{11} + \varpi_{12}\varpi'_{22} - \varpi_{22}\varpi'_{12} = 0,$$

und bei der Bezeichnung

$$\tau_{pq} = t'_{pq} + it_{pq}$$

die Ungleichungen

(16) $$t_{11} > 0, \quad t_{22} > 0$$

und

(16a) $$t_{11}t_{22} - t_{12}^2 > 1$$

bestehen.

Um dies und überhaupt die Beschaffenheit der Multiplicatoren näher zu untersuchen, muss ich einzelne Fälle unterscheiden:

I) *Es seien* $\varpi_{\alpha 1} : \varpi_{\alpha 2} : \varpi'_{\alpha 1} : \varpi'_{\alpha 2}$ *vollkommen durch die Gleichungen* (8) *bestimmt: dann sind die Multiplicatoren* M_1 *und* M_2 *von einander verschieden, sie sind complexe, nicht conjugirte Zahlen; und die Wurzeln der Gleichung* $\Delta(M) = 0$ *sind sämmtlich verschieden.*

Dies ergiebt sich in folgender Weise: Da sich die $\varpi_{\alpha 1} : \varpi_{\alpha 2} : \cdots$ vollkommen bestimmt aus den Gleichungen (8) berechnen lassen sollen, so sind $\varpi_{1\beta}$ und $\varpi'_{1\beta}$ dieselben Functionen von M_1 wie $\varpi_{2\beta}$ und $\varpi'_{2\beta}$ von M_2. Wäre nun $M_1 = M_2$, so wäre auch insbesondere $\varpi_{11} : \varpi_{12} = \varpi_{21} : \varpi_{22}$, also $\varpi_{11}\varpi_{22} - \varpi_{12}\varpi_{21} = 0$, was bekanntlich unmöglich ist. Wenn M_1 real wäre, so wäre auch $\omega_{11} : \omega_{12} : \cdots$ real, was bekanntlich ebenfalls unmöglich ist. Wäre M_1 und M_2 conjugirt complex, so wäre $\varpi_{11}\varpi_{22} - \varpi_{12}\varpi_{21}$, $\varpi'_{11}\varpi_{22} - \varpi_{12}\varpi'_{21}$, $\cdots$ rein imaginär, also $\tau_{11}, \cdots$ real, was im Widerspruch mit der Bedingung (16), also auch nicht möglich ist. — Hätte endlich $\Delta(M) = 0$ zwei gleiche Wurzeln, so müsste zu Folge der besonderen Beschaffenheit der Gleichung $\Delta(M) = 0$ (vergl. (14a)) entweder:

$$\Delta(M) = \left(M^2 - \tfrac{1}{2} AM + \varkappa\right)^2$$

oder

$$\Delta(M) = (M^2 - \varkappa)^2$$

sein, und unter den 4 Wurzeln von $\Delta(M) = 0$ fände sich kein Paar, welches verschieden und nicht conjugirt complex wäre; folglich kann $\Delta(M) = 0$ keine zwei gleiche Wurzeln haben.

II. *Es ist* $\varpi_{\alpha 1} : \varpi_{\alpha 2} : \varpi'_{\alpha 1} : \varpi'_{\alpha 2}$ *einfach unbestimmt: Dann sind die Multiplicatoren* M_1 *und* M_2 *verschieden, sie sind entweder*

1) *conjugirt complex, und ihr Product ist gleich* $\varkappa$ *und*

$$\Delta(M) = \left(M^2 - \tfrac{1}{2} AM + \varkappa\right)^2,$$

oder

2) *sie sind real:* $M_1 = -M_2 = \sqrt{\varkappa}$ *und*

$$\Delta(M) = (M^2 - \varkappa)^2.$$

Im ersten Fall sind die τ_{pq} *einfach unbestimmt, im zweiten sind dieselben zweifach unbestimmt.*

Dass M_1 und M_2 verschieden sein müssen, kann man in folgender Weise beweisen. Man setze in (8) $\alpha = 1$, bez. $= 2$, multiplicire die Gleichungen mit $\varpi_{2\gamma}$, bez. $\varpi_{1\gamma}$ und subtrahire die beiden erhaltenen Systeme, je die entsprechenden Gleichungen von einander. Dadurch findet man, wenn man jetzt $M_1 = M_2$ setzt:

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}(1 - (-1)^\gamma) M_1 &= n_{1\gamma} + n_{13}\tau_{\gamma 2} + n_{14}\tau_{\gamma 1},\\
\tfrac{1}{2}(1 + (-1)^\gamma) M_1 &= n_{2\gamma} + n_{23}\tau_{\gamma 2} + n_{24}\tau_{\gamma 1},\\
\tau_{\gamma 2} M_1 &= n_{3\gamma} + n_{33}\tau_{\gamma 2} + n_{34}\tau_{\gamma 1},\\
\tau_{\gamma 1} M_1 &= n_{4\gamma} + n_{43}\tau_{\gamma 2} + n_{44}\tau_{\gamma 1},
\end{aligned} \tag{17}$$

wobei $\gamma = 1$ und 2. Aus diesen Gleichungen erkennt man, dass entweder $n_{\lambda,\mu} = 0$ für $\lambda \gtrless \mu$, und $= M_1$ für $\lambda = \mu$ ist, oder dass eine Gleichung von der Form $c_1\tau_{\gamma_1} + c_2\tau_{\gamma_2} + c_3 = 0$, (in der c_1 und c_2 nicht zugleich Null sind), besteht. Der erste Fall ist ausgeschlossen, weil sonst eine einfache Multiplication stattfände, die hier nicht in Betracht kommt; im zweiten Fall wären die imaginären Theile der τ_{pq} durch die Gleichung $c_1 t_{\gamma_1} + c_2 t_{\gamma_2} = 0$ verbunden, aus welcher $t_{11}t_{22} - t_{12}^2 = 0$ folgen würde, was im Widerspruch mit der Bedingung (16a), also auch nicht möglich ist. — Da ferner $\varpi_{\alpha 1} : \varpi_{\alpha 2} : \cdots$ einfach unbestimmt sein soll, so müssen die Adjuncten der Elemente der Determinante $\Delta(M)$, insbesondere

$$\frac{\partial}{\partial n_{11}}\Delta(M),\quad \frac{\partial}{\partial n_{22}}\Delta(M),\quad \frac{\partial}{\partial n_{33}}\Delta(M) \text{ und } \frac{\partial}{\partial n_{44}}(\Delta M),$$

für $M = M_\alpha$ verschwinden, und da

$$\frac{d}{dM}\Delta(M) = -\frac{\partial}{\partial n_{11}}\Delta(M) - \frac{\partial}{\partial n_{22}}\Delta(M) - \frac{\partial}{\partial n_{33}}\Delta(M) - \frac{\partial}{\partial n_{44}}\Delta(M),$$

so schliesst man hieraus, dass $\Delta(M) = 0$ eine zweifache Wurzel haben muss, und also in Folge der besondern Form der Gleichung (vergl. (14a)), entweder

$$\Delta(M) = \left(M^2 - \tfrac{1}{2} A M + \varkappa\right)^2 \tag{14\alpha}$$

oder

$$\Delta(M) = (M^2 - \varkappa)^2 \tag{14\beta}$$

ist. Hieraus und aus dem Umstande, dass M_1 und M_2 verschieden sein müssen, folgt, dass entweder

$$M_1 M_2 = \varkappa \quad \text{oder} \quad M_1 M_2 = -\varkappa$$

ist. Diese beiden Fälle müssen getrennt behandelt werden.

A) Es sei erstens $M_1 M_2 = \varkappa$.

Um zu beweisen dass M_1 und M_2 complexe Grössen sind, werde ich die Ausdrücke für die τ_{pq} selbst herstellen, wenigstens unter einer gewissen Beschränkung. Ich setze zu diesem Zwecke in die Gleichungen (12) $\varkappa$ an Stelle von $M_1 M_2$ und τ_{12} an Stelle von τ_{21}. Indem ich in der 3., 8. und 10. dieser Gleichungen den imaginären Theil vom realen trenne (vergl. (16)), finde ich, dass

$$(18) \qquad \begin{aligned} n_{12} &= -n_{43}, \quad n_{14} = n_{23}, \\ n_{21} &= -n_{34}, \quad n_{41} = n_{32} \end{aligned}$$

ist; ferner finde ich durch Subtraction der 15. dieser Gleichungen von der ersten, dass $n_{11} - n_{22} + n_{33} - n_{44} = 0$ ist, was zusammen mit der Gleichung $n_{11} + n_{22} + n_{33} + n_{44} = 2(M_1 + M_2)$, die aus der Vergleichung des Coefficienten von M^3 in (14) und (14α) hervorgeht, ergiebt, dass*)

$$(18\text{a}) \qquad n_{11} + n_{33} = n_{22} + n_{44} = M_1 + M_2.$$

An Stelle der Determinante (14) erhält man die einfachere:

$$(14\,1) \qquad \Delta(M) = \begin{vmatrix} n_{11} - M & n_{12} & n_{13} & n_{14} \\ n_{21} & n_{22} - M & n_{14} & n_{24} \\ n_{31} & n_{41} & n_{33} - M & -n_{21} \\ n_{41} & n_{42} & -n_{12} & n_{44} - M \end{vmatrix}$$

und diese Determinante wird, wenn man sie mit Hilfe der Bedingungsgleichungen (7) ausrechnet, in der That genau gleich

$$\Delta(M) = (M^2 - (n_{11} + n_{33})\, M + \varkappa)^2.$$

Ferner reduciren sich die Gleichungen (12) für dies specielle System der Zahlen n_{pq} auf

---

*) Diese Gleichungen (18) und (18a) kann man auch aus dem Umstande herleiten, dass $\frac{\partial}{\partial n_{pq}} \Delta(M)$ für $M = M_1$ und $M = M_2$ verschwinden muss. Ausserdem lässt sich hieraus noch ableiten, dass entweder

$$n_{12} = 0, \quad n_{21} = 0 \quad \text{oder} \quad n_{11} = n_{44},$$

und dass entweder

$$n_{14} = 0, \quad n_{41} = 0 \quad \text{oder} \quad n_{11} = n_{22}$$

sein muss.

$$
\begin{aligned}
&\text{I)} \quad n_{22} - n_{33} + n_{13}\tau_{11} + n_{21}\tau_{22} + 2n_{14}\tau_{12} &&= 0,\\
&\text{II)} \quad - n_{41} + n_{12}\tau_{11} + n_{21}\tau_{22} - n_{11}t &&= 0,\\
(19)\quad &\text{III)} \quad - n_{31} + (n_{11} - n_{22})\tau_{11} + 2n_{21}\tau_{12} + n_{21}t &&= 0,\\
&\text{IV)} \quad - n_{42} - (n_{11} - n_{22})\tau_{22} + 2n_{12}\tau_{12} + n_{13}t &&= 0,\\
&\text{V)} \quad n_{42}\tau_{11} + n_{31}\tau_{22} - 2n_{41}\tau_{12} + (n_{11} - n_{44})t &&= 0.
\end{aligned}
$$

Da durch die gleichzeitige lineare Transformation der ursprünglichen und der transformirten Thetafunctionen, und damit auch der ursprünglichen und der transformirten Integrale, die Gleichungen (5) sich nur insofern ändern, als an Stelle der Functionen $\varphi_\alpha(x)$ andere Functionen treten, dagegen die Multiplicatoren M_1 und M_2 in diesen Gleichungen ungeändert bleiben, so braucht man, um alle Multiplicatoren zu erhalten, nur solche Systeme $\varpi_{\alpha\beta}$, $\varpi'_{\alpha\beta}$ zu betrachten, die nicht durch lineare Transformation in einander übergeführt werden können. Da aber durch abwechselnde Anwendung der beiden Transformationen, bei welcher

$$\varpi_{\alpha 1},\ \text{bez.}\ \varpi_{\alpha 2},\quad \varpi'_{\alpha 1} \pm \varpi_{\alpha 1},\quad \varpi'_{\alpha 2}$$

an Stelle von

$$\varpi_{\alpha 1},\quad \text{bez.}\ \varpi_{\alpha 2},\quad \varpi'_{\alpha 1},\quad \varpi'_{\alpha 2}$$

und bei welcher

$$\omega_{\alpha 1} \pm \varpi'_{\alpha 1},\quad \text{bez.}\ \omega_{\alpha 2},\quad \varpi'_{\alpha 1},\quad \varpi'_{\alpha 2}$$

an Stelle von

$$\varpi_{\alpha 1},\quad \text{bez.}\ \varpi_{\alpha 2},\quad \varpi'_{\alpha 1},\quad \varpi'_{\alpha 2}$$

tritt, erreicht werden kann, dass n_{11} (oder auch n_{12}, n_{21}, n_{11}) gleich Null wird, so kann man sich also bei der folgenden Betrachtung auf solche Systeme $n_{\lambda\mu}$ beschränken, bei denen

$$n_{14} = 0.$$

Unter diesen Voraussetzungen will ich jetzt aus den Gleichungen (19) die Werthe der τ_{pq} berechnen. Dabei muss ich mit in Betracht ziehen, dass $t = \tau_{12}^2 - \tau_{11}\tau_{22}$ ist, was, nebenbei bemerkt, nicht nöthig ist, wenn die Wurzeln von $\Delta(M) = 0$ sämmtlich verschieden sind.

a) Es sei n_{13} nicht Null. Dann ist auch, wie aus (19) I) folgt, (weil τ_{11} und τ_{22} complex sein müssen), auch n_{24} nicht Null. Aus den Gleichungen (19) I) und III) finde ich, wenn ich die Discriminante von $(M - M_1)(M - M_2) = M^2 - (n_{11} + n_{33})M + \varkappa$, d. i. $\frac{1}{4}(n_{11} + n_{33})^2 - \varkappa$ mit δ bezeichne, mit Hilfe der Gleichungen (7), dass

$$n_{13}\tau_{11} = \frac{1}{2}(n_{33} - n_{11}) + \sqrt{\delta - n_{13}n_{24}\left(\tau_{12} + \frac{n_{21}}{n_{24}}\right)^2},$$

$$n_{24}\tau_{22} = \frac{1}{2}(n_{11} - n_{22}) - \sqrt{\delta - n_{13}n_{24}\left(\tau_{12} + \frac{n_{21}}{n_{24}}\right)^2}.$$

Diese Werthe von τ_{11} und τ_{22} genügen, wie man mittelst der Gleichungen (7) nachweisen kann, auch den übrigen Gleichungen (19) II), IV) und V). — Macht man jetzt die Annahme, dass M_1 und M_2 real, also $\delta > 0$, und berücksichtigt dabei, dass $n_{13} \cdot n_{24} < 0$ ist, was aus der Bedingung (16), der Gleichung (19) I) und dem Umstande, dass $n_{14} = 0$ ist, folgt, so findet man bei der Bezeichnung

$$\delta - n_{13} n_{24} \left[\left(t'_{12} + \frac{n_{21}}{n_{24}} \right)^2 + t_{12}^2 \right] = D,$$

nach bekannten Formeln, dass

$$t_{11} t_{22} - t_{12}^2 = \frac{1}{2 n_{13} n_{24}} \left\{ D - \sqrt{D^2 + n_{13} n_{24} \delta t_{12}^2} \right\}$$

ist, wobei $\sqrt{D + 4 n_{13} n_{24} \delta t_{12}^2}$ der positive Werth zu geben ist. Die rechte Seite hat nun, da $n_{13} n_{24} < 0$ ist, einen negativen Werth, was im Widerspruch mit der Bedingung (16a) ist. Folglich ist die Annahme $\delta > 0$, d. h. dass die Multiplicatoren M_1 und M_2 *real* sind, *unzulässig*.

b) Es sei $n_{13} = 0$; dann folgt aus (19) I) und (16), dass auch

$$n_{24} = 0, \quad n_{22} = n_{33}, \quad \text{also auch} \quad n_{11} = n_{44}$$

ist, und aus den Gleichungen (19) findet man dann, wenn

$$n_{11} - n_{22} \gtrless 0$$

ist:

$$\tau_{11} = \frac{n_{31} - 2 n_{21} \tau_{12}}{n_{11} - n_{22}}, \quad \tau_{22} = - \frac{n_{42} - 2 n_{12} \tau_{12}}{n_{11} - n_{22}},$$

so dass

$$t_{11} t_{22} - t_{12}^2 = \frac{- 4 \delta t_{12}^2}{(n_{11} - n_{22})^2}$$

ist. Aus dieser letzteren Gleichung folgt mit Hinsicht auf die Bedingung (16a), dass $\delta < 0$, also die Multiplicatoren complex sein müssen. — Ist $n_{11} = n_{22}$, also überhaupt

$$n_{11} = n_{22} = n_{33} = n_{44},$$

so ist, wie aus (14) I) folgt, jetzt

$$\Delta(M) = (M^2 - 2 n_{11} M + n_{11}^2 - n_{12} n_{21})^2,$$

mithin

$$\delta = n_{12} n_{21},$$

und dieser Werth δ ist negativ, weil zu Folge (16), (19) II) und $n_{14} = 0$ die Zahlen n_{12} und n_{21} verschiedenes Vorzeichen haben. Also sind auch hier die Multiplicatoren complexe Zahlen. — Ist endlich auch n_{12} oder n_{21} gleich Null, so folgt aus den Gleichungen (19) und den Bedingungen (16), dass sämmtliche Zahlen $n_{\lambda\mu}$, ausgenommen $n_{11} = n_{22} = n_{33} = n_{44}$ gleich Null sind, und dass demgemäss eine gewöhnliche Multiplication stattfindet. —

Es sind also, wie behauptet, M_1 und M_2 complexe Grössen und die τ_{pq} sind einfach unbestimmt.

B) Es sei zweitens

$$M_1 = -M_2 = \sqrt{\varkappa}, \quad \text{also} \quad M_1 M_2 = -\varkappa.$$

Da $\varpi_{\alpha 1} : \varpi_{\alpha 2} : \cdots$ unbestimmt sein soll, müssen die Adjuncten der Elemente von $\Delta(M)$ für $M = M_1$ und für $M = M_2$ verschwinden; insbesondere muss $\frac{\partial}{\partial n_{31}} \Delta(M)$, d. i., wie sich mit Hülfe der Gleichungen (7) ergiebt:

$$\frac{\partial \Delta(M)}{\partial n_{31}} = n_{13} M^2 - (n_{22} n_{13} \pm \cdots) M + n_{13} \varkappa,$$

für $M = M_1 = +\sqrt{\varkappa}$ und für $M = M_2 = -\sqrt{\varkappa}$ Null sein. Dies ist aber nicht anders möglich, als wenn

$$n_{13} = 0$$

ist. Ich setze jetzt in den Gleichungen (12) $n_{13} = 0$, und $-\varkappa$, bez. τ_{12} an Stelle von $M_1 M_2$, bez. von τ_{21}; dadurch finde ich, da τ_{11} und τ_{22} complex sind, dass $n_{24} = 0$, $n_{31} = 0$, $n_{42} = 0$ und $n_{12} = n_{43}$, $n_{21} = n_{34}$, $n_{14} = -n_{23}$, $n_{32} = -n_{41}$, $n_{11} = -n_{22} = n_{33} = -n_{44} = n$ ist. Demgemäss nimmt die Determinante $\Delta(M)$ die specielle Form an:

$$(14\,\text{II}) \qquad \Delta(M) = \begin{vmatrix} n - M & n_{12} & 0 & n_{14} \\ n_{21} & -n - M & -n_{14} & 0 \\ 0 & -n_{41} & n - M & n_{21} \\ n_{41} & 0 & n_{12} & -n - M \end{vmatrix},$$

und die Bedingungsgleichungen (7) zwischen den $n_{\lambda\mu}$, und das Gleichungssystem (12) zur Bestimmung der τ_{pq} reduciren sich auf

$$n^2 + n_{12} n_{21} + n_{14} n_{41} = \varkappa,$$

und

$$(20) \qquad n_{41} + n_{12} \tau_{11} - 2n\tau_{12} - n_{21} \tau_{22} - n_{14} t = 0.$$

Aus dieser letzteren Gleichung erkennt man, dass die τ_{pq} in der That zweifach unbestimmt sind. —

Will man die τ_{pq} anstatt durch die Gleichungen (12), wie dies eben geschehen, mittelst der Gleichungen (8) und (9), bez. (13) berechnen, so muss noch folgender Umstand mit in Betracht gezogen werden. Wenn $M_1 M_2 = \varkappa$ ist, so ist nicht nothwendiger Weise (vergl. (11)) für alle diejenigen Systeme τ_{pq}, die man erhält, die Bedingung $\tau_{12} = \tau_{21}$ erfüllt. Es wird dies vielmehr erst in folgender Weise erreicht. Da die $\varpi_{\alpha 1} : \varpi_{\alpha 2} : \cdots$ einfach unbestimmt sind, so ist

$$\varpi_{\alpha\beta} = u_\alpha (a_{\alpha\beta} + v_\alpha b_{\alpha\beta}), \qquad \varpi'_{\alpha\beta} = u_\alpha (a_{\alpha,\beta+2} + v_\alpha b_{\alpha,\beta+2}),$$

wobei u_1, u_2, v_1, v_2 unbestimmte Grössen sind. Substituirt man diese Ausdrücke in (15a), so erhält man hierdurch eine Gleichung, durch welche die Unbestimmte v_2 von v_1 abhängig gemacht ist, und v_2 durch v_1 ausgedrückt werden kann. Ist dies geschehen, dann erst wird für die erhaltenen Werthe τ_{pq} die Bedingung $\tau_{12} = \tau_{21}$ erfüllt sein; es ist dann sowohl $\varpi_{11} : \varpi_{12} : \cdots$ als auch $\varpi_{21} : \varpi_{22} : \cdots$, als auch $\tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22}$ nur von v_1 abhängig, und demgemäss sind auch die τ_{pq} nur einfach unbestimmt. — Bemerken will ich noch, dass in dem andern Fall, in dem die $\varpi_{\alpha 1} : \varpi_{\alpha 2} : \cdots$ einfach unbestimmt sind, d. h. wenn $M_1 M_2 = -\varkappa$ ist, die Gleichung zwischen v_1 und v_2 identisch verschwinden muss, weil, wie aus (11) folgt, für alle erhaltenen τ_{pq} die Bedingung $\tau_{12} = \tau_{21}$ erfüllt ist; demnach ist $\varpi_{11} : \varpi_{12}; \cdots$ von der Unbestimmten v_1, $\varpi_{21} : \varpi_{22} : \cdots$ von der Unbestimmten v_2 und $\tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22}$ von v_1 und v_2 abhängig; dementsprechend sind hier die τ_{pq} zweifach unbestimmt.

III. *Zweifach unbestimmt kann das Verhältniss* $\varpi_{\alpha 1} : \varpi_{\alpha 2} : \cdots$ *nicht werden.*

Denn in diesem Falle müssten die Unterdeterminanten zweiten Grades von $\Delta(M)$ für $M = M_\alpha$ verschwinden und daraus würde folgen, dass

$$21) \quad \Delta(M) = \begin{vmatrix} \lambda_1\lambda_1' + M_\alpha - M & \lambda_2\lambda_1' & \lambda_3\lambda_1' & \lambda_4\lambda_1' \\ \lambda_1\lambda_2' & \lambda_2\lambda_2' + M_\alpha - M & \lambda_3\lambda_2' & \lambda_4\lambda_2' \\ \lambda_1\lambda_3' & \lambda_2\lambda_3' & \lambda_3\lambda_3' + M_\alpha - M & \lambda_4\lambda_3' \\ \lambda_1\lambda_4' & \lambda_2\lambda_4' & \lambda_3\lambda_4' & \lambda_4\lambda_4' + M_\alpha - M \end{vmatrix}$$

ist, also dass $n_{11} = \lambda\lambda_1' + M_\alpha$, $n_{12} = \lambda_2\lambda_1'$, u. s. w. Setzt man diese Werthe von $n_{\lambda\mu}$ in die Bedingungsgleichungen (7) ein, so findet man, mögen dabei auch einige der λ_i, λ_i' Null sein, dass

$$\lambda_4' = \lambda_1, \quad \lambda_3' = \lambda_2, \quad \lambda_2' = -\lambda_3, \quad \lambda_1' = -\lambda_4$$

ist. In Folge davon geht (21) in

$$\Delta(M) = (M - M_1)^4$$

über, und es ist also

$$M_1 = M_2.$$

Ferner nehmen die Gleichungen (17), die ich für $M_1 = M_2$ abgeleitet habe, für diese besondern Werthe den $n_{\mu\nu}$ die Form an:

$$\lambda_m(\lambda_\gamma + \lambda_3\tau_{\gamma 2} + \lambda_4\tau_{\gamma 1}) = 0, \qquad \begin{matrix} m = 1, 2, 3, 4, \\ \gamma = 1, 2. \end{matrix}$$

Aus diesen Gleichungen schliesst man, wie oben aus den Gleichungen (17), dass die $\varpi_{\alpha\beta}$, $\varpi'_{\alpha\beta}$ vollkommen unbestimmt sind, und dass also nur die einfache Multiplication stattfindet.

Für die Transformationen ersten Grades habe ich die Gleichungen $\Delta(M) = 0$ aufgestellt, und je ein System der τ_{pq} berechnet. Es sind dieselben, wenn

I) die τ_{pq} vollkommen bestimmt sind:

1) $M^4 \pm M^3 + M^2 \pm M + 1 = 0$; $\tau_{11} = e^{\frac{2\pi i}{5}} - 1$,
$\tau_{12} = -\left(e^{\frac{2\pi i}{5}} + e^{3\frac{2\pi i}{5}}\right)$, $\tau_{22} = -e^{4\frac{2\pi i}{5}}$;

2) $M^4 + M^2 + 1 = 0$, $\tau_{12} = \frac{1}{3} i\sqrt{3}$, $\tau_{11} = \tau_{22} = 2\tau_{12}$;

3) $M^4 + 1 = 0$, $\tau_{11} = \tau_{22} = \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{2})$, $\tau_{12} = \frac{1}{2}$;

II) wenn die τ_{pq} einfach unbestimmt sind:

4) $M^2 \pm M + 1 = 0$, $\tau_{11} = \tau_{22} = 2\tau_{12}$;

5) $M^2 + 1 = 0$, $\tau_{11} = \tau_{22}$, $\tau_{12} = \frac{1}{2}$;

III) wenn die τ_{pq} zweifach unbestimmt sind:

6) $M^2 - 1 = 0$, $\tau_{12} = -\frac{1}{2}$, τ_{11} und τ_{22} beliebig.

Ueber eine Fläche 6^{ter} Ordnung vom Flächengeschlecht — 1.

Von

M. Noether in Erlangen.

In dem letzten Paragraphen meiner Arbeit „Zur Grundlegung der Theorie der algebraischen Raumcurven“*) habe ich eine Anwendung auf die Untersuchung der *Geometrie specieller Flächen* gegeben und insbesondere als Beispiel auf die Fläche 6^{ter} Ordnung, F_6, hingewiesen, welche eine Raumcurve 4^{ter} Ordnung, vom Geschlecht 1, zur Doppelcurve und eine diese Curve nicht treffende Gerade zur Doppelgeraden hat. Die daselbst für die Fläche F_6 nur angedeuteten Resultate sollen nun hier entwickelt werden.

Diese Fläche F_6 wurde deshalb gewählt, weil sie der erste, nicht unmittelbar zu behandelnde, Repräsentant einer Flächenclasse ist, die über die früher**) von mir erledigte Classe von Flächen, welche eine lineare Schaar von rationalen Curven besitzen, hinausgeht. Eine Fläche dieser letzteren Classe hat das *numerische Flächengeschlecht****) 0 und lässt sich rational eindeutig auf die Ebene abbilden. Die Fläche F_6 hat, wie ein Kegel 3^{ter} Ordnung, ein negatives numerisches Flächengeschlecht, $= -1$, und besitzt eine Schaar rationaler Curven, deren Parameter in derselben Irrationalität eingeht, wie der Parameter der Geraden eines Kegels 3^{ter} Ordnung. Es fragt sich, ob die Fläche F_6 sich auf einen Kegel 3^{ter} Ordnung rational abbilden lässt? Durch die hier folgende Entwicklung der Grundzüge der Geometrie der Fläche F_6 wird diese Frage bejaht.

§ 1.

Die Kegelschnittschaar der Fläche.

Eine Gerade C_1 sei durch die Gleichungen zweier durch dieselbe gehenden Ebenen

$$A = 0, \quad B = 0, \tag{1}$$

*) Diese von der kgl. Akad. der Wiss. in Berlin 1882 mit dem Steiner'schen Preise gekrönte Arbeit wird in den „Abhandlungen“ der gen. Akademie erscheinen. Ein ausführlicher Auszug findet sich im Journal f. die reine u. angew. Mathem., Bd. 93, p. 271.

**) „Ueber Flächen, welche Schaaren rationaler Curven besitzen“, Math. Annalen Bd. III.

***) Vgl. § 12 meines 2^{ten} Aufsatzes „Ueber das eindeutige Entsprechen algebraischer Gebilde“, Math. Annalen Bd. VIII.

eine Raumcurve 4^{ter} Ordnung, vom Geschlecht 1, C_4, welche C_1 nicht trifft, durch die Gleichungen zweier durch C_4 gehenden Flächen 2^{ter} Ordnung

$$\varphi = 0, \quad \psi = 0 \tag{2}$$

gegeben. Die Fläche F_6, welche C_1 und C_4 zu Doppelcurven hat, wird die Gleichungsform haben:

$$(a_0 A^2 + a_1 AB + a_2 B^2)\varphi^2 + (b_0 A^2 + b_1 AB + b_2 B^2)\varphi\psi + (c_0 A^2 + c_1 AB + c_2 B^2)\psi^2 = 0. \tag{3}$$

Verbindet man mit der Gleichung (3) der Fläche F_6 die Gleichungen der beiden Flächenbüschel

$$A - \lambda B = 0, \tag{4}$$

$$\varphi - \mu\psi = 0, \tag{5}$$

so wird die Gleichung (3) erfüllt, sobald ausser (4) und (5) noch die Gleichung zwischen den Parametern λ, μ besteht:

$$(a_0\lambda^2 + a_1\lambda + a_2)\mu^2 + (b_0\lambda^2 + b_1\lambda + b_2)\mu + (c_0\lambda^2 + c_1\lambda + c_2) = 0. \tag{6}$$

Der durch (4), (5) unter der Bedingung (6) gegebene Kegelschnitt liegt also auf F_6, und die Fläche F_6 enthält eine einfach unendliche Schaar Σ von Kegelschnitten, welche rational von zwei, durch (6) verbundenen, Parametern abhängt. Jeder der Kegelschnitte trifft C_1 in zwei, C_4 in 4 Punkten.

Sowohl die Schaar (4), als die Schaar (5) trifft F_6 in einer linearen Schaar von je zwei Kegelschnitten. Ebenso trifft die dreifach unendliche Schaar von Flächen 3^{ter} Ordnung, welche durch C_1 und C_4 gehen, also die Schaar

$$\lambda_0 A\varphi + \lambda_1 A\psi + \lambda_2 B\varphi + \lambda_3 B\psi = 0,$$

die Fläche F_6 in einer linearen ∞^3-Schaar von je 4 der Kegelschnitte aus Σ; denn jede dieser Flächen 3^{ter} Ordnung hat mit irgend einem der Kegelschnitte schon 6 Punkte gemein, muss denselben also vollständig enthalten, sobald sie durch einen weiteren Punkt desselben geht. Analog treffen die Flächen 4^{ter} Ordnung, welche C_1 doppelt, C_4 einfach enthalten, F_6 nur in Gruppen von Kegelschnitten aus Σ, und allgemein so die Flächen der Ordnung $\alpha + 2\beta$, welche C_1 α-fach, C_4 β-fach enthalten; für dieselben stellt es immer *eine* Bedingung vor, wenn sie durch einen gegebenen der Kegelschnitte aus Σ gehen sollen.

Unter den Kegelschnitten der Schaar Σ existiren 10, welche in *Geradenpaare* zerfallen. Denn soll der Schnitt der Fläche 2^{ter} Ordnung (5) mit der Ebene (4) zerfallen, so hat man die Bedingung, dass die durch die Coefficienten von (4) geränderte Determinante von (5) verschwindet. Setzt man nun $\frac{\lambda}{\nu}$ statt λ, $\frac{\mu}{\nu}$ statt μ und betrachtet

λ, μ, ν als Coordinaten in der Ebene, so stellt diese Bedingung eine Curve 5ter Ordnung vor, welche in $\lambda = \nu = 0$ einen Doppelpunkt, in $\mu = \nu = 0$ einen dreifachen Punkt hat. Die Bedingung (6) stellt eine Curve 4ter Ordnung vor, welche diese beiden Punkte zu Doppelpunkten hat. Man hat also noch 10 weitere Schnittpunkte beider Curven.

Jede dieser Geraden trifft C_1 einmal, C_4 zweimal. Auch hieraus folgt geometrisch deren Anzahl; denn die Geraden, welche C_1 einmal, C_4 zweimal treffen, bilden eine Fläche 8ter Ordnung, welche C_1 doppelt, C_4 dreifach enthält, und deren weiterer Schnitt mit F_6, eine Curve 20ter Ordnung, muss in Gerade zerfallen.

Andere Gerade, als solche, welche Theile von Kegelschnitten der Schaar Σ sind, oder überhaupt andere rationale Curven als die von Σ, kann es auf F_6 nicht geben. Denn jede Curve R auf F, ausser denen von Σ, muss alle Kegelschnitte von Σ in mindestens je einem Punkte treffen, die Punkte von R sind also auf die Punkte der Curve (6), vom Geschlecht 1, so bezogen, dass jedem Punkte von R nur *ein* Punkt von (6) entspricht, weil durch einen willkürlichen Punkt von F_6 nur *ein* Kegelschnitt aus Σ geht; dass aber jedem Punkt von (6) ein oder mehrere Punkte von R entsprechen. Das Geschlecht der Curve R ist also nicht kleiner, als das von (6), d. h. $\leqq 1$.

Liegt auf F_6 eine Curve R, welche jeden Kegelschnitt aus Σ in nur je *einem* Punkte trifft, also eine Curve vom Geschlecht 1, so lassen sich die Punkte eines solchen durch ein (6) genügendes Werthsystem (λ, μ) gegebenen Kegelschnittes durch einen Parameter ϱ rational darstellen, d. h. die Fläche F_6 lässt sich dann Punkt für Punkt eindeutig, und rational umkehrbar, auf den Kegel 4ter Ordnung mit zwei Doppelgeraden, als dessen Gleichung (6) aufgefasst werden kann, beziehen; also auch auf einen Kegel dritter Ordnung. Umgekehrt wird für eine solche Beziehung, damit die Darstellung in ϱ keine weitere von λ, μ abhängige Irrationalität, ausser (6), liefere, die Existenz einer Curve R von der genannten Eigenschaft auf F_6 nothwendig. In den folgenden Paragraphen wird die Existenz derartiger Curven und ihre Anordnung auf F_6 untersucht.

§ 2.

Das Problem der Curven R.

In Bezug auf den Existenzbeweis einer Curve auf einer gegebenen Fläche ist allgemein das im Beginn der Einleitung citirte Verfahren anzuwenden. Ist nämlich eine Curvenspecies R, mit der Mannigfaltigkeit u, ferner eine specielle Flächenfamilie Φ gegeben, und bedeutet A die Zahl der Bedingungen, welchen die Flächen Φ unterworfen werden

müssen, um durch eine allgemein gegebene Curve R_0 aus der Species R hindurchzugehen, so hat man die Relation

(7) $$u = \mathsf{A} + t - \alpha,$$

wo α die Zahl der Bedingungen bedeutet, welchen die Flächen Φ unterworfen werden müssen, um überhaupt eine Curve der Species R enthalten zu können, t die Mannigfaltigkeit, welche die auf *einer* solchen Fläche Φ_0 der Φ dann existirenden Curven der Species R besitzen. Ist u und A bekannt, so ist die Geometrie einer Φ_0 zu untersuchen, um t zu bestimmen, wonach die Relation (7) α ergiebt.

Als specielle Flächenfamilie Φ sei hier die Gesammtheit der Flächen 6^{ter} Ordnung genommen, welche eine gegebene Gerade C_1 und eine gegebene Raumcurve C_4, 4^{ter} Ordnung, vom Geschlecht 1, zu Doppelcurven haben, eine 8-fach unendliche Schaar nach (6). Als Curvenspecies R sei die Gesammtheit der Raumcurven 5^{ter} Ordnung, vom Geschlecht 1, betrachtet, welche C_1 in je drei, C_4 in je acht Punkten treffen. Wie die Theorie der Flächen dritter Ordnung, welche durch C_4 gehen, unmittelbar ergiebt, existiren noch ∞^9 solcher Curven R, nämlich auf jeder dieser ∞^7 Flächen noch ∞^2 Curven; so dass $u = 9$ ist.

Um durch eine *gegebene* Curve R_5 aus dieser Schaar eine Fläche der Φ zu legen, hat man den Φ noch 8 lineare Bedingungen aufzulegen: $\mathsf{A} = 8$. Denn die ∞^8 Flächen Φ treffen R_5 noch in einer beweglichen Schaar von Gruppen von je $30 - 2 \cdot 8 - 2 \cdot 3 = 8$ Punkten, von denen aber auf R_5 nur eine ∞^7-Schaar existirt; lässt man also die Φ durch irgend 7 Punkte von R_5 und durch einen, von einem speciellen von den 7 Punkten abhängigen verschiedenen, achten Punkt von R_5 gehen, so muss diese Φ die R_5 ganz enthalten. — Man kann z. B. acht *beliebige* Kegelschnitte annehmen, welche C_1 in je zwei, C_4 in je 4 Punkten und ausserdem R_5 in je einem Punkte treffen; dann giebt es unter den Φ, da jeder solcher Kegelschnitt noch *eine* Bedingung mit sich bringt, noch *eine* Fläche, F_6, welche alle 8 Kegelschnitte enthält, und diese Fläche F_6 enthält dann zugleich die Curve R_5, und ebenso *alle* Curven der Species R, welche die 8 Kegelschnitte in je einem Punkte treffen.

Stellt nun die letztgenannte Forderung für die Curven der Species R genau 8 unabhängige Bedingungen dar, so muss die dieser Forderung genügende Schaar von Curven R eine (9—8)-einfach unendliche werden, und man hat $t = 1$, also nach (7): $\alpha = 0$, d. h. jede der Flächen enthält dann Curven der Species R. Andernfalls würde $t > 1$, $\alpha > 0$, so dass alsdann nur ein Theil der Flächen Φ Curven R enthielte. Wir untersuchen daher jetzt die Zahl t bei einer solchen Fläche F_6, auf welcher eine Curve der Species R angenommen wird.

Zu bemerken ist, dass man in der letzten Betrachtung statt der

8 Kegelschnitte auch solche 8 Gerade hätte benutzen können, welche R_5 je einmal, C_1 je einmal, C_4 je zweimal treffen. Von solchen Geraden existiren in der That 10, wie der Schnitt von R_5 mit der in § 1 genannten Fläche 8ter Ordnung zeigt. Nimmt man aber 9 *beliebige* Sehnen von C_4, die C_1 treffen, so ist das Problem, Curven R zu bestimmen, die alle 9 Sehnen schneiden, unlösbar, obwohl $u = 9$ ist; denn die Curven R, die 8 der Sehnen treffen, liegen auf der diese 8 Sehnen enthaltenden Fläche F_6, und diese wird von der neunten Sehne nur in den Doppelcurven von F_6 getroffen.

§ 3.

Die Curven R_5 auf der Fläche F_6.

Irgend eine Curve 5ter Ordnung R_5, welche auf F_6 liegt und C_1 in 3, C_4 in 8 Punkten trifft, schneidet jeden Kegelschnitt aus der auf F_6 existirenden Schaar Σ in je *einem* Punkte. Von den zwei Geraden irgend eines der 10 zerfallenden Kegelschnitte wird von R_5 die eine Gerade in einem Punkte, die andere gar nicht getroffen.

Sei mit R' eine specielle dieser Curven R_5 bezeichnet; und seien $a_1, a_2, \ldots, a_{10}$ die 10 Geraden von F_6, welche von R' getroffen werden, $b_1, b_2, \ldots, b_{10}$ die 10 Geraden von F_6, welche sich mit den a_i bez. zu Kegelschnitten aus Σ ergänzen.

Durch C_4 und R' kann man eine einzige Fläche 3ter Ordnung legen, welche alsdann die Fläche F_6 noch in einer weiteren Curve R_5 schneidet, die ebenfalls jeden Kegelschnitt von Σ in je einem Punkte trifft. Diese Curve sei mit R'' bezeichnet.

R'' ist eine Curve $R_5''^1(C_1^3, C_4^8, R'^6)$; d. h. eine Raumcurve 5ter Ordnung, vom Geschlecht 1, die C_1 in 3, C_4 in 8 und R' in 6, ausserhalb C_1 liegenden, Punkten trifft. Sie trifft ferner die 10 Geraden b_i in je einem Punkte, die 10 Geraden a_i gar nicht.

Irgend eine weitere Raumcurve $R_5(C_1^3, C_4^8)$ der Fläche F_6 trifft die durch C_4, R' und R'' gehende Fläche 3ter Ordnung in 15 Punkten, also R' und R'' zusammen in 7 Punkten. Von diesen Punkten mögen q auf R', $7 - q$ auf R'' fallen, wo q die Werthe 0, 1, ..., 7 haben kann. Es genügt aber, $q = 4, 5, 6, 7$ anzunehmen und die übrigen Fälle durch Vertauschung von R' mit R'' zu erledigen.

Hat man nun eine solche Curve R_5 auf F_6, die R' in q ($q = 4, 5, 6, 7$) Punkten trifft, so kann man immer Flächen $F_5(C_1^2, C_4, R', R_5)$ legen, d. h. Flächen 5ter Ordnung, welche C_1 zur Doppelgeraden haben und durch C_4, R' und R_5 einfach gehen. Denn es giebt noch ∞^{39} Flächen F_5 mit doppelter C_1, also noch ∞^{19} Flächen $F_5(C_1^2, C_4)$, und folglich *wenigstens* $\infty^{19-(25-8-2\cdot 3)} = \infty^8$ Flächen $F_5(C_1^2, C_4, R')$; also auch *wenigstens* $\infty^{8-(25-8-6-q)} = \infty^{q-3}$ Flächen $F_5(C_1^2, C_4, R', R_5)$. Alle

diese letzteren Flächen schneiden nun schon jeden Kegelschnitt der Schaar Σ in je 10 Punkten; sie müssen also, sobald sie durch einen weiteren Punkt eines solchen Kegelschnitts gehen, denselben, oder beim Zerfallen desselben eine der beiden Geraden, ganz enthalten; d. h. *die Flächen* $F_5(C_1^2, C_4, R', R_5)$ *treffen* F_6 *nur noch in Kegelschnitten oder Geraden aus* Σ. Der Schnitt in einer Geraden tritt dabei nothwendig dann ein, wenn diese zugleich von R' und R_5, also von F_5 in 6 Punkten, getroffen wird, während die diese ergänzende Gerade dann nicht auf F_5 liegt.

Um also alle Curven $R_5^1(C_1^3, C_4^8)$ auf F_6 zu erhalten, welche R' in wenigstens 4 Punkten treffen, braucht man nur umgekehrt alle Flächen $F_5(C_1^2, C_4, R')$ zu legen, welche noch durch Curven 8^{ter} Ordnung R_8 hindurchgehen, die aus Kegelschnitten und Geraden von Σ, die R' treffen, zusammengesetzt sind. Besteht diese R_8 aus r Kegelschnitten und $2(4-r)$ Geraden, welche ebensovielen verschiedenen Kegelschnitten aus Σ angehören, was für die F_5 noch $2r + 2(4-r) = 8$ Bedingungen ausmacht, so erhält man als Restcurve eine R_5, welche mit R'' $5 \cdot 5 - 2 \cdot 3 - 8 - 6 - r = 5 - r$ Punkte gemein hat, welche also R' in $7 - (5-r) = r + 2$ Punkten trifft. Man hat daher $q = r + 2$, und man sieht zunächst, dass, da r höchstens gleich 4 werden kann, q höchstens gleich 6 ist; d. h. *dass der Fall von* 7, *bez.* 0, *Schnittpunkten einer* R_5 *mit* R' *nicht vorkömmt.*

Wir zeigen nun zunächst, dass die Flächen $F_5(C_1^2, C_4, R')$ *genau* eine lineare ∞^8-Schaar bilden. Oben war gezeigt, dass die Schaar keine geringere Mannigfaltigkeit hat; wäre dieselbe grösser als 8, so würden die Flächen $F_5(C_1^2, C_4, R', R_5)$ eine $\infty^\varkappa$-Schaar bilden, wo $\varkappa > q - 3$; alle diese Flächen treffen aber F_6 noch in $2(6-q)$ festen Geraden und in einer linearen $\infty^\varkappa$-Schaar von Gruppen von je $q-2$ Kegelschnitten aus Σ; also diejenigen unter ihnen, welche noch durch $q-3$ festangenommene Kegelschnitte gehen, in einer linearen $\infty^{\varkappa-q+3}$-Schaar von je einem Kegelschnitte, was aber wegen der Irrationalität von Σ unmöglich ist.

Legt man jetzt die Flächen $F_5(C_1^2, C_4, R', R_5)$ durch eine Curve R_5, welche R' in q ($q = 4, 5, 6$) Punkten trifft, so erhält man genau eine lineare ∞^{q-3}-Schaar; und dieselben treffen F_6 noch, ausser in $2(6-q)$ Geraden, in $q-2$ Kegelschnitten, von denen man genau $q-3$ beliebig annehmen kann, ohne R_5 zu ändern. *Alle* Curven R_5, welche R' in q Punkten treffen, ergeben sich also, wenn man die Flächen $F_5(C_1^2, C_4, R')$ durch $q-3$ beliebig, aber fest anzunehmende Kegelschnitte aus Σ legt und den Flächen vorschreibt, durch *einen* weiteren Kegelschnitt aus Σ und durch $2(6-q)$ der 10 Geraden a_i zu gehen. R_5 hängt dann nur von der Wahl des letzten Kegelschnitts

und der $2(6-q)$ Geraden ab; und da die Fläche F_5 durch diese Bedingungen eindeutig bestimmt ist, ergiebt sich nach Wahl der $2(6-q)$ Geraden a_i noch *eine* Curve R_5, dem letzten Kegelschnitt aus Σ zugeordnet. — Dasselbe folgt für $q < 4$ aus R''.

So liegt also auf F_6 eine endliche Anzahl von Schaaren von je *einfach* unendlich vielen Curven R_5; und die Curven einer solchen Schaar sind den Kegelschnitten der Schaar Σ einzeln zugeordnet.

Hiermit ist in der That das in § 2 *angedeutete Resultat, dass die dortige Zahl* $t = 1$, *also* $\alpha = 0$ *wird, erhalten; d. h. unsere Fläche* F_6 *mit der Raumcurve* R' *ist die allgemeinste Fläche der Art von Flächen* 6ter *Ordnung, mit doppelter* C_1 *und doppelter* C_4.

§ 4.

Die Geometrie der Fläche F_6. Abbildung auf eine Fläche 4ter Ordnung.

Nach dem vorhergehenden Paragraphen giebt es auf der Fläche F_6 im Ganzen 2^9 von einander verschiedene einfach unendliche Schaaren von Curven R_5, die C_1 in je drei, C_4 in je 8 Punkten treffen. Die Schaaren unterscheiden sich untereinander nach der Wahl der Geraden aus den 10 Geradenpaaren von F_6, welche die Curven der Schaar schneiden sollen; und zwar ist die 10te Gerade durch 9 aus 9 verschiedenen Paaren beliebig gewählte bestimmt. Irgend zwei Curven *einer* Schaar treffen sich noch in *einem* Punkte; und allgemeiner ergiebt sich aus § 3 der Satz:

Zwei Curven R_5 *von* F_6, *welche* $2(6-q)$ *gemeinsame Gerade treffen, schneiden sich noch in* q *Punkten* ($q = 1, 2, \ldots, 6$).

Jede dieser einfach unendlichen Schaaren, deren Curven nach § 3 den Kegelschnitten von Σ eindeutig zugeordnet werden können, möge die Eigenschaft haben, dass durch jeden Punkt der Fläche F_6 $\varkappa$ Curven der Schaar hindurchgehen. Da sich zwei Curven *einer* Schaar in einem beweglichen Punkte schneiden, ist $\varkappa$ wenigstens gleich 2, und es wird sich am Schlusse dieses Paragraphen zeigen, dass $\varkappa$ genau gleich 2 wird.

Um nun die auf F_6 gelegenen *Raumcurven* 4ter *Ordnung, vom Geschlecht* 1, welche C_1 in 2, C_4 in 6 Punkten treffen, $R_4(C_1^2, C_4^6)$, zu bestimmen, genügt es, irgend eine der 2^9 Schaaren von R_5, etwa die, deren Curven die R' des § 3 in je 6 Punkten, also die 10 Geraden b_i in je einem Punkte, die Geraden a_i gar nicht treffen, zu betrachten. Man hat also dann die Flächen $F_5(C_1^2, C_4, R')$ zu legen, welche F_6 noch in 4 Kegelschnitten aus Σ und je einer R_5 dieser Schaar treffen. Wählt man, nach Annahme von dreien der Kegelschnitte, den vierten so, dass die F_5 noch weiter durch den Schnittpunkt von a_1 und b_1 gehen, was auf $\varkappa$ Weisen geschehen kann, so

muss jedesmal die weiter ausgeschnittene $R_5^1(b_1, b_2, \ldots, b_{10})$ in die Gerade a_1, verbunden mit einer Raumcurve 4^{ter} Ordnung, vom Geschlecht 1, die a_1 trifft, also mit einer $R_4^1(a_1, b_2, b_3, \ldots, b_{10})$, zerfallen. In jeder der Schaaren von R_5^1 giebt es also $10 \cdot \varkappa$ Curven R_4^1. Aber jede dieser Curven R_4^1 ist so in 10 verschiedenen Schaaren von R_5^1 enthalten, nämlich die obige $R_4^1(R'^5, a_1, b_2, b_3, \ldots, b_{10})$

mit a_1 verbunden in der Schaar der $R_5^1(R'^6, b_1, b_2, b_3, \ldots, b_{10})$,

„ b_2 „ „ „ „ „ $R_5^1(R'^5, a_1, a_2, b_3, \ldots, b_{10})$,

„ b_3 „ „ „ „ „ $R_5^1(R'^5, a_1, b_2, a_3, b_4, \ldots, b_{10})$,

. . . . . .

„ b_{10} „ „ „ „ „ $R_5^1(R'^5, a_1, b_2, b_3, \ldots, b_9, a_{10})$.

Hieraus folgt, dass auf F_6 überhaupt $\frac{10\varkappa \cdot 2^9}{10} = \varkappa \cdot 2^9 = 2^{10}$ Raumcurven 4^{ter} Ordnung, vom Geschlecht 1, existiren. Und man sieht, dass zwei solche dieser Raumcurven, welche dieselben $2(5-q)$ Geraden von F_6 treffen, sich noch in q ($q = 0, 1, \ldots, 5$) Punkten schneiden.

Die Geometrie der Fläche F_6 ergiebt sich nun vollständig, wenn man durch die hier nachgewiesenen Geraden, Curven R_5 und Curven R_4 von F_6, sowie durch C_1 und C_4, alle möglichen Schnittflächen legt. Sie ergiebt sich auch, wenn man die durch irgend eine der Curven R_5, etwa R' des § 3, zu ermittelnde *eindeutige Abbildung* der Fläche F_6 auf eine einfachere Fläche, wie auf den Kegel (6) des § 1, oder auf die Fläche F_4', 4^{ter} Ordnung, mit zwei Doppelgeraden, als dessen Gleichung ebenfalls (6) des § 1 für $\frac{\lambda}{\lambda'}$ statt λ und $\frac{\mu}{\mu'}$ statt μ betrachtet werden kann, ins Auge fasst. Diese Abbildung soll jetzt angegeben werden.

Die Flächen $F_5(C_1^2, C_4, R')$, welche noch durch zwei Kegelschnitte aus Σ gelegt werden, bilden nach § 3 noch eine lineare ∞^4-Schaar. Man kann insbesondere, wie der Einfachheit halber angenommen werden soll, die beiden Kegelschnitte in einer und derselben Ebene mit der Doppelgeraden C_1 von F_6 wählen, wonach die F_5 in diese Ebene und in die lineare ∞^1-Schaar von Flächen 4^{ter} Ordnung $F_4(C_1, C_4, R')$ zerfallen. Diese Flächen F_4 treffen F_6 noch in Raumcurven 9^{ter} Ordnung, vom Geschlecht 1: $R_9(C_1^7, C_4^{16}, R'^8)$ und irgend zwei dieser Raumcurven schneiden sich noch in $4.9 - 7 - 16 - 8 = 5$ Punkten. Von diesen Punkten ist keiner fest auf F_6, und es bestimmt auch nicht irgend einer derselben andere eindeutig.

Benutzt man also aus dieser Schaar von Flächen F_4 eine solche lineare ∞^3-Schaar von Flächen, f_4, welche noch durch einen beliebig gewählten festen Punkt P von F_6 gehen, zur Transformation von F_6, so wird F_6 eindeutig, und eindeutig umkehrbar, in eine Fläche

F_4' transformirt. Denn diese f_4 schneiden aus F_6 noch Curven R_9^1 aus, welche sich gegenseitig, ausser in P, in je $5 - 1 = 4$ Punkten treffen. Die F_4' hat eine Doppelcurve 2^{ter} Ordnung, weil die ebenen Schnitte von F_4', den R_9^1 entsprechend, das Geschlecht 1 haben müssen.

Da diese Curven R_9^1 die Kegelschnitte aus Σ in nur je einem Punkte treffen, entspricht hierbei der Schaar Σ von F_6 eine analoge *Geradenschaar* auf F_4'; insbesondere also entspricht solchen Flächen f_4, welche F_6 in zwei Kegelschnitten aus Σ treffen, der Schnitt von F_4' mit solchen Ebenen, die in je 2 Geraden schneiden. Nun gehen durch den Punkt P von F_6 nach der obigen Annahme $\varkappa$ Curven R_5 derart, dass die durch eine solche R_5 gehenden Flächen f_4 die Fläche F_6 noch in je 2 Kegelschnitten aus Σ schneiden (§ 3); und die durch eine solche R_5 gehenden f_4 bilden eine lineare ∞^1-Schaar. Dem entspricht auf F_4', dass $\varkappa$ verschiedene Ebenenbüschel existiren, deren Ebenen F_4' in je zwei Geraden schneiden. Die Basisgerade eines solchen Ebenenbüschels muss daher *doppelte* Gerade auf F_4' sein; und es folgt, dass F_4' $\varkappa$ Doppelgeraden hat.

Da nun $\varkappa > 1$ nach dem Obigen, so folgt aus dem Geschlechte 1 des ebenen Schnitts von F_4', dass, wie oben angegeben wurde, $\varkappa = 2$ wird.

§ 5.

Untersuchung der Abbildung.

Wir entwickeln die Abbildung des § 4 nur so weit, dass sich auch die Construction ihrer Umkehrung, die Ableitung der Fläche F_6 aus der F_4', ergiebt.

Dem *einfachen Fundamentalpunkt* P auf F_6 entspricht eine *Gerade*, p', auf F_4'. Dem Kegelschnitt k_2 von F_6, welcher durch P geht, entspricht ein auf p' gelegener *doppelter Fundamentalpunkt* P' auf F_4', d. h. ein einfacher Punkt von F_4', durch den aber alle den ebenen Schnitten von F_6 entsprechenden Curven auf F_4' mit je 2 Zweigen gehen. Denn die durch P gehenden ∞^3 Curven R_9^1 des § 4 treffen k_2 ausser P nicht weiter. Den 10 Geraden $a_1, a_2, \ldots, a_{10}$ von F_6, welche von R', nicht aber von den R_9^1, getroffen werden, entsprechen 10 *einfache Fundamentalpunkte* $A_1', A_2', \ldots, A_{10}'$ auf F_4'.

Die beiden *Doppelgeraden* von F_4' seien mit g', h' bezeichnet; dieselben entsprechen den beiden durch P gehenden R_5, welche die Geraden $b_1, b_2, \ldots, b_{10}$ treffen.

Den ebenen Schnitten von F_6 entsprechen auf F_4' Curven 9^{ter} Ordnung, vom Geschlecht 5, welche g', h' in je 5, die einfachen Geraden von F_4' in je 2 Punkten treffen, durch die A_i' einfach, durch P' doppelt gehen oder Curven $\Gamma_9'^5(g'^5, h'^5, A_1', \ldots, A_{10}', P'^2)$.

Um diese Curven aus F_4' auszuschneiden, kann man Flächen $f_4'(g', h', A_1', \ldots, A_{10}', \overline{P'})$, d. h. Flächen 4^{ter} Ordnung, die durch g', h' und die A_i' gehen und F_4' in P' berühren, legen. Denn es giebt, ausser F_4', noch ∞^{10} solcher f_4'; und diese treffen irgend eine der $\Gamma_9'^5$ noch in Gruppen von je $4 \cdot 9 - 2 \cdot 5 - 10 - 4 = 12$ Punkten. Da es aber auf $\Gamma_9'^5$ nur ∞^7 solcher Gruppen giebt, müssen wenigstens ∞^2 der Flächen f_4' durch die Curve $\Gamma_9'^5$ gehen. Der weitere Schnitt dieser f_4' mit F_4' besteht dann aus drei *Geraden* von F_4', weil alle Geraden auf F_4' von den f_4' schon in je 4 Punkten auf g', h' $\Gamma_9'^5$ getroffen werden.

Es möge nun eine durch irgend eine der Curven $\Gamma_9'^5$ gehende, beliebig gewählte f_4' die Fläche F_4' noch in den 3 Geraden l_1', l_2', l_3' treffen. Nach dem Restsatze (§ 7 meines oben cit. Aufsatzes, Math. Ann. Bd. VIII) muss dann die ∞^3-Schaar von Curven $\Gamma_9'^5$ durch die Schaar von Flächen $f_4'(g', h', l_1', l_2', l_3', A_1', A_2', \ldots, A_{10}', \overline{P'})$ aus F_4' ausgeschnitten werden können.

Zwei solche Flächen f_4' treffen in der That F_4' noch in $4 \cdot 9 - 2 \cdot 5 - 3 \cdot 2 - 10 - 4 = 6$ beweglichen Punkten; und die f_4' führen daher F_4' in eine Fläche F_6 über. Aber wenn die Geraden l' und der Punkt P' willkürlich auf F_4' gewählt wird, können die 10 Punkte A' nicht mehr willkürlich liegen, vielmehr müssen, damit die f_4' noch F_4' in einer ∞^3-Schaar treffen können, zwei der Punkte A' durch die übrigen mitbestimmt sein. Es handelt sich jetzt um die Construction dieser Beziehungen.

Die 10 Punkte A_i' müssen, als den Geraden a_i entsprechend, auf der Curve C' von F_4' liegen, welche die Doppelgerade C_1 von F_6 abbildet. Diese Curve C' ist also zuerst zu untersuchen. — Den ebenen Schnitten von F_6, welche durch C_1 gehen, müssen auf F_4' solche Curven $R_9'^5$ entsprechen, welche in je 2 Gerade und in diese C' zerfallen; C' wird also eine Curve 7^{ter} Ordnung, vom Geschlecht 3: $C_7'^3(g'^3, h'^3, l_1'^2, l_2'^2, l_3'^2, A_1', \ldots, A_{10}', P'^2)$. Die obigen Flächen f_4', welche durch diese $C_7'^3$ gehen, bilden nun in der That, ausser F_4', noch eine $\infty^{33-2.5-3.3-3-(26-2.3-3.2-4)} = \infty^1$-Schaar, welche F_4' in ∞^1 Gruppen von je 2 Geraden trifft. Da indess die $C_7'^3$ eine lineare ∞^1-Schaar von *Punktpaaren* enthalten muss, den Punkten von C_1 entsprechend, so muss $C_7'^3$ als *hyperelliptische* Curve construirt werden.

Zu diesem Zwecke ist es erforderlich, diejenigen Flächen φ zu betrachten, welche die $C_7'^3$ in den *Specialgruppen* (cf. § 8 des obigen Aufsatzes Math. Ann. VIII oder den am Anfang genannten Auszug Cr. J., Bd. 93, § 1, VII.) schneiden. Allgemeiner soll dieses zunächst für die Curven $\Gamma_9'^5$ geschehen.

Für eine solche Curve $\Gamma_9'^5$ sind die Flächen φ diejenigen Flächen φ_4', 4^{ter} Ordnung, welche durch g', h' gehen und dabei längs dieser Geraden die

die $\Gamma_9'^5$ ausschneidende Fläche f_4' berühren, und welche ferner durch l_1', l_2', l_3' und P' gehen; wenn man noch die beiden $\Gamma_9'^5$ enthaltenden solchen Flächen f_4' und F_4' ausnimmt. Vermöge der einen Constanten in f_4' kann man diese φ_4' so modificiren, dass die φ_4' eine der Geraden g', h', etwa h', zur Doppelgeraden erhalten, so dass man $\varphi_4'(\overline{g'}, h'^2, l_1', l_2', l_3', P')$ hat. Für die φ_4' sind dies im Ganzen $12+13+3.1+1=29$ Bedingungen, und es bleibt, vermöge $F_4'=0$, noch eine $\infty^{33-29}=\infty^4$-Schaar solcher φ_4', wie es auch wegen des Geschlechts $p=5$ der $\Gamma_9'^5$ sein muss.

Die $C_7'^3$ sei nun, mit zwei Geraden m_1', m_2' von F_4' verbunden, eine specielle $\Gamma_9'^5$. Dann werden ebenso die Flächen φ für die $C_7'^3$ die Flächen $\varphi_4'(\overline{g'}, h'^2, l_1', l_2', l_3', P', m_1', m_2')$, wo $\overline{g'}$ bedeutet, dass diese φ_4' die die $C_7'^3$ ausschneidende f_4' längs g' berühren. Diese φ_4' bilden, vermöge $F_4'=0$, eine $\infty^{33-12-13-3.1-1-2.1}=\infty^2$-Schaar, wie es auch wegen des Geschlechts $p=3$ der $C_7'^3$ sein muss. — Soll nun diese Curve hyperelliptisch sein, so muss zu einem beliebigen Punkte Q_1' von $C_7'^3$ noch ein zweiter Q_2' angebbar sein, derart, dass durch Q_1' und Q_2' noch eine ∞^1-Schaar der φ_4' geht. Aber der durch Q_1' gehende Büschel von Flächen φ_4' hat ausser $g', h', l_1', l_2', l_3', m_1', m_2'$ noch eine Basiscurve $K_5'(g'^3, h'^3, l_1', l_2', l_3', m_1', m_2', P', Q_1')$, welche also die Fläche F_4' noch in $5.4-2.3-2.3-5.1-1-1=1$ Punkte Q_2' trifft. Durch solche 2 Punkte Q_1', Q_2' geht ein Büschel von Flächen φ_4'.

Hiernach wird die Construction des Fundamentalsystemes auf F_4' folgende: Man nehme die 5 Geraden l_1', l_2', l_3', m_1', m_2' willkürlich aus den Geraden von F_4', ferner die beiden Punkte P', Q_1' beliebig auf F_4' an; lege dann einen Büschel von Flächen φ_4', welche einander längs g' berühren, h' zur Doppelgeraden haben und durch die Geraden l' und m', sowie durch die Punkte P' und Q_1' hindurchgehen sollen, und bestimme den letzten Schnittpunkt Q_2' der weiteren Basiscurve K_5' dieses Büschels mit F_4'. Eine Fläche $f_4'(\overline{g'}, h', l_1', l_2', l_3', m_1', m_2', \overline{P'}, Q_1', Q_2')$, welche diesen Büschel von Flächen φ_4' längs g' und F_4' in P' berührt und ausserdem durch h', die l', m' und Q_1', Q_2' geht, schneidet dann aus F_4' weiter eine hyperelliptische Curve $C_7'^3$ aus, welche von dem Büschel von Flächen φ_4' in einer ∞^1-Schaar von Punktepaaren getroffen wird. Der Schnitt dieser Curve $C_7'^3$ mit einer Fläche $f_4'(g', h', l_1', l_2', l_3', \overline{P'}, Q_1', Q_2')$ besteht noch aus 10 Punkten, welche man als die Punkte $A_1', A_2', \ldots, A_{10}'$ nehme.

In der That bilden die nach dem Obigen zu betrachtenden Flächen, welche man zur Transformation von F_4' zu verwenden hat: $f_4'(g', h', l_1', l_2', l_3', \overline{P'}, A_1', A_2', \ldots A_{10}')$, jetzt eine ∞^3-Schaar. Denn einmal existirt darunter der Büschel von f_4', welcher durch $C_7'^3$ geht und F_4' noch in Gruppen von je 2 Geraden trifft; sodann existirt darunter ein Büschel von Flächen f_4', welcher $C_7'^3$ in der ∞^1-Schaar

von Punktpaaren schneidet, welche dem Paar Q_1', Q_2' coresidual sind; also im Ganzen 4 linear von einander unabhängige Flächen f_4'. —

Es sei noch eine kleine Specialisirung und Vereinfachung dieser Construction erwähnt. Lässt man den willkürlichen Fundamentalpunkt P auf F_6 in diejenige Curve R'' von F_6 fallen, welche mit R' den Schnitt von F_6 mit der $F_3(C_4, R')$ (§ 3) bildet, so wird diese Curve R'' einer Doppelgeraden, g', von F_4' entsprechen. Zu den F_6 transformirenden Flächen gehört dann F_3, verbunden mit dem Ebenenbüschel durch C_1, entsprechend dem Ebenenbüschel durch g'. Aus dem letzteren Umstande folgt, dass die beiden Geraden m_1', m_2' hier in *eine* Ebene durch g' fallen.

Die Vereinfachung besteht also darin, dass man für den Büschel von f_4', welcher durch $C_7'^3$ geht, hier den Ebenenbüschel durch g', verbunden mit einer f_3', nimmt; und die Construction wird so:

Man nehme die 3 Geraden l' und die beiden Punkte P', Q_1' willkürlich auf F_4' an; lege dann den Büschel von Flächen

$$\varphi_3'(h'^2, l_1', l_2', l_3', P', Q_1')$$

und bestimme den letzten Schnittpunkt Q_2' von F_4' mit der weiteren Basiscurve, einem Kegelschnitte, dieses Büschels φ_3'. Eine Fläche $f_3'(h', l_1', l_2', l_3', \overline{P'}, Q_1', Q_2')$ schneidet dann F_4' weiter in einer hyperelliptischen Curve $C_7'^3$. Der Schnitt dieser Curve $C_7'^3$ mit einer Fläche $f_4'(g', h', l_1', l_2', l_3', \overline{P'}, Q_1', Q_2')$ besteht weiter aus 10 Punkten, welche als die Punkte $A_1', \ldots, A_{10}'$ zu nehmen sind.

Die Flächen $f_4'(g', h', l_1', l_2', l_3', \overline{P'}, A_1', A_2', \ldots, A_{10}')$ bilden dann wieder die Transformationsflächen; und zu ihnen gehört jetzt der Ebenenbüschel durch g', verbunden mit der $f_3'(h', l_1', l_2', l_3', \overline{P'}, (C_7'^3))$. —

Nun ergeben sich alle Beziehungen von F_6 zu F_4' ohne Weiteres. So entspricht der Doppelcurve C_4 von F_6 auf F_4' eine Curve

$$C_{16}'(g'^8, h'^8, l_1'^4, l_2'^4, l_3'^4, P'^4, A_1'^2, \ldots, A_{10}'^2),$$

vom Geschlecht 9, ausgeschnitten von einer Fläche

$$f_8'(g'^2, h'^2, l_1'^2, l_2'^2, l_3'^2, m_1', m_2', \overline{P'}, A_1'^2, \ldots, A_{10}'^2).$$

Der Schaar von Curven R_5, welche R' in je 6 Punkten treffen, entspricht auf F_4' die Schaar von ebenen Curven 3ter Ordnung, ausgeschnitten von der Schaar von Ebenen, welche durch P' und je eine der Geraden von F_4' gehen. Und analoge Abbildungen in Curven 4ter und 5ter Ordnung liefern die übrigen Schaaren von Curven R_5 auf F_6, worauf wir jedoch nach der principiellen Erledigung der Geometrie der Fläche F_6 nicht näher eingehen wollen.

Erlangen, im April 1882.

Ueber eine eindeutige Entwickelung von Zahlen in eine unendliche Reihe.

Von

J. Lüroth in München.

Im Folgenden erlaube ich mir eine eigenthümliche Darstellung aller positiven Zahlen, die Eins nicht überschreiten, darzulegen, auf die ich kam, als ich, angeregt durch die Entdeckungen G. Cantor's, mich mit der Abbildung von Mannigfaltigkeiten verschiedener Dimensionen aufeinander beschäftigte.

I.

Ist a eine Zahl > 0 aber ≤ 1, so ist $\frac{1}{a}$ entweder eine ganze Zahl g, also

$$a = \frac{1}{g},$$

oder es liegt zwischen zwei aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen g_1 und $g_1 + 1$, so dass man

$$a = \frac{1}{g_1 + 1} + a'$$

setzen kann, wobei $a' > 0$ ist. Weil aber dann

$$\frac{1}{g_1} > a > \frac{1}{g_1 + 1},$$

ist

$$a' < \frac{1}{g_1(g_1 + 1)}$$

und

$$a' g_1 (g_1 + 1) = a_1 < 1.$$

Dies liefert die Gleichung

$$a = \frac{1}{g_1 + 1} + \frac{a_1}{g_1 (g_1 + 1)}.$$

Da a_1 positiv und < 1 ist, so ist es entweder $= \frac{1}{g'}$, wo g' eine ganze Zahl oder man kann es, wie eben a, mit Hülfe einer ganzen Zahl g_2 und eines echten Bruches a_2 ausdrücken durch die Gleichung

$$a_1 = \frac{1}{g_2+1} + \frac{a_2}{g_2(g_2+1)}.$$

Also ergiebt sich entweder

$$a = \frac{1}{g_1+1} + \frac{1}{g_1(g_1+1)} \cdot \frac{1}{g'}$$

oder

$$a = \frac{1}{g_1+1} + \frac{1}{g_1(g_1+1)(g_2+1)} + \frac{a_2}{g_1(g_1+1)\,g_2(g_2+1)}.$$

Im letzten Falle kann man auf a_2 dieselbe Betrachtung anwenden und in dieser Weise so lange fortfahren, bis man auf eine reciproke ganze Zahl kommt, was aber manchmal niemals eintritt.

Bezeichnet man, unter $g_1\, g_2 \cdots g_n\, g$ ganze Zahlen verstanden, der Kürze wegen

$$\frac{1}{g_1(g_1+1)\,g_2(g_2+1)\cdots g_p(g_p+1)} \text{ mit } R(g_1, g_2, \cdots, g_p),$$

$$\frac{R(g_1, g_2, \cdots, g_p)}{g+1} \text{ mit } Q(g_1, g_2, \cdots, g_p, g),$$

$$\frac{1}{g+1} \text{ mit } Q(g),$$

so ergiebt sich also für a entweder die Gleichung

$$(1)\quad a = Q(g_1) + Q(g_1, g_2) + Q(g_1, g_2, g_3) + \cdots + Q(g_1, g_2, \cdots, g_n) + \frac{R(g_1, g_2, \cdots, g_n)}{g},$$

oder der Ausdruck

$$a = Q(g_1) + Q(g_1, g_2) + \cdots + Q(g_1, g_2, \cdots, g_n) + R(g_1, g_2, \cdots, g_n) \cdot a_n,$$

in welchem a_n ein echter Bruch ist, der für keinen Werth des Zeigers n einer reciproken ganzen Zahl gleich wird.

Da alle Zahlen $g_1, g_2, \cdots$ mindestens gleich Eins sind, so ist

$$R(g_1, g_2, \cdots, g_n) < \frac{1}{2^n}.$$

Lässt man also in der letzten Gleichung n ins Unendliche wachsen, so nähert sich das letzte Glied der Null und es kommt die Gleichung

$$(2)\qquad a = \sum_{p=1}^{\infty} Q(g_1, g_2, \cdots, g_p).$$

Für $a = \frac{11}{18}$ z. B. hat man die Gleichungen

$$\frac{11}{18} = \frac{1}{2} + \frac{1}{1\cdot 2}\, a_1,$$

$$a_1 = \frac{2}{9} = \frac{1}{5} + \frac{1}{4 \cdot 5} a_2,$$
$$a_2 = \frac{4}{9} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2 \cdot 3} a_3,$$
$$a_3 = \frac{6}{9} = \frac{1}{2} + \frac{1}{1 \cdot 2} a_4,$$
$$a_4 = \frac{1}{3},$$

aus welchen

$$\frac{11}{18} = \frac{1}{2} + \frac{1}{1\,2 \cdot 5} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3}$$

folgt.

Dagegen liefert der Bruch $\frac{5}{13}$ die Gleichungen

$$\frac{5}{13} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2 \cdot 3} a_1.$$
$$a_1 = \frac{4}{13} = \frac{1}{4} + \frac{1}{3 \cdot 4} a_2,$$
$$a_2 = \frac{9}{13} = \frac{1}{2} + \frac{1}{1 \cdot 2} a_3,$$
$$a_3 = \frac{5}{13}.$$

Da a_3 sich $= a$ ergeben hat, so kehren jetzt dieselben Gleichungen wieder und man erkennt, dass das System nie zu einem a_n führen kann, welches einer reciproken ganzen Zahl gleich ist, dass vielmehr $\frac{5}{13}$ sich nur durch eine unendliche Reihe der Form (2) darstellen lässt, indem

$$\frac{5}{13} = Q(2) + Q(2, 3) + Q(2, 3, 1) + Q(2, 3, 1, 2) + \cdots$$

wird.

Für die rechte Seite der Gleichung (2) sei die Abkürzung

$$(3) \qquad \sum_{p=1}^{\infty} Q(g_1, g_2, \cdots, g_p) = S(g_1, g_2, \cdots)$$

benutzt. Die ganzen Zahlen $g_1, g_2, \cdots$ mögen die Elemente der Reihe heissen.

Die Reihe (1) lässt sich noch umwandeln. Man hat ja identisch

$$\frac{1}{g} = \frac{1}{g+1} + \frac{1}{g(g+1)}.$$

Damit wird

$$\frac{R(g_1, g_2, \cdots, g_n)}{g} = \frac{R(g_1, g_2, \cdots, g_n)}{g+1} + \frac{R(g_1, g_2, \cdots, g_n)}{g(g+1)}$$
$$= Q(g_1, g_2, \cdots, g_n, g) + R(g_1, g_2, \cdots, g_n, g) \cdot \frac{1}{1}.$$

Wendet man dies auf

$$R(g_1, g_2, \cdots, g_n, g) \cdot \frac{1}{1}$$

an, so entsteht

$$R(g_1, g_2, \cdots, g_n, g) \cdot \frac{1}{1} = Q(g_1, g_2, \cdots, g_n, g, 1) + R(g_1, g_2, \cdots, g_n, g, 1)\frac{1}{1}$$

und indem man in die vorige Gleichung einträgt

$$\frac{R(g_1, g_2, \cdots, g_n)}{g} = Q(g_1, g_2, \cdots, g_n, g) + Q(g_1, g_2, \cdots, g_n, g, 1) + R(g_1, g_2, \cdots, g_n, g, 1)\frac{1}{1} \cdot$$

Setzt man dieses Verfahren weiter fort, so erkennt man, dass die linke Seite der letzten Gleichung durch die unendliche Reihe

$$Q(g_1, \cdots, g_n, g) + Q(g_1, \cdots, g_n, g, 1) + Q(g_1, \cdots, g_n, g, 1, 1) + \cdots$$

ersetzt werden kann, so dass schliesslich aus der Reihe (1)

$$a = S(g_1, g_2, \cdots, g_n, g, 1, 1, \cdots) \tag{4}$$

hervorgeht, in welcher sich rechts das Element 1 ins Unendliche wiederholt. Speciell ist noch

$$\begin{cases} \frac{1}{g} = S(g, 1, 1, \cdots), \\ 1 = S(1, 1, 1, \cdots). \end{cases} \tag{5}$$

Man kann also jede Zahl a die > 0 aber < 1 ist, durch eine unendliche Reihe der Form (2) *darstellen.*

Diese Zahlen zerfallen in zwei Classen, solche, welche durch eine endliche Reihe, und solche, welche nur durch eine unendliche Reihe dargestellt werden können. Die ersteren Zahlen sind sicher rational und bilden folglich, als Theil der abzählbaren Menge der rationalen Zahlen, selbst eine abzählbare Menge, die mit M bezeichnet sei.

Im Folgenden werden wir aber ausschliesslich die Darstellungen durch die unendlichen Reihen benutzen.

Gesetzt zwei solche Reihen $S(g_1, g_2, g_3, \cdots)$ und $S(h_1, h_2, \cdots)$ hätten dieselbe Summe a. Da nun

$$S(g_1, g_2, g_3, \cdots) = \frac{1}{g_1 + 1} + \frac{1}{g_1(g_1+1)} S(g_2, g_3, \cdots)$$

und die Reihe S, nach unserer Annahme eine unendliche ist, so ist sicher

$$S(g_1, g_2, g_3, \cdots) > \frac{1}{g_1 + 1} \cdot$$

Da aber jede Reihe S, also auch $S(g_2, g_3, \cdots)$, ≤ 1 ist, so wird andererseits

$$S(g_1, g_2, g_3, \cdots) \leq \frac{1}{g_1+1} + \frac{1}{g_1(g_1+1)} = \frac{1}{g_1}.$$

Somit ist

$$\frac{1}{g_1} > a > \frac{1}{g_1+1}.$$

Für die zweite Reihe $S(h_1, h_2, \cdots)$ ergiebt sich ebenso

$$\frac{1}{h_1} \geq a > \frac{1}{h_1+1}.$$

Aus beiden Ungleichungen folgt, weil g_1 und h_1 ganze Zahlen sind, $g_1 = h_1$. Dieses Resultat lässt aus der Gleichung

$$S(g_1, g_2, \cdots) = S(h_1, h_2, \cdots) \tag{6}$$

die neue

$$S(g_2, g_3, \cdots) = S(h_2, h_3, \cdots)$$

hervorgehen, die wieder $g_2 = h_2$ liefert u. s. w. *so dass aus der Gleichung* (6) *die Gleichheit jeder Zahl* g_n *mit der gleichstelligen* h_n *hervorgeht.* Dies Resultat zeigt also, *dass man eine Zahl* $a > 0$ *und* ≤ 1 *nur auf eine Art durch eine unendliche Reihe S darstellen kann.*

Unter diesen Reihen sind noch besonders die *periodischen* hervorzuheben, d. h. diejenigen, bei welchen sich eine Gruppe von Elementen stets wiederholt. Es soll gezeigt werden, dass diese rationale Brüche darstellen. Sei

$$S(g_1, g_2, \cdots, g_p, h_1, h_2, \cdots, h_q, h_1, h_2, \cdots, h_q, \cdots)$$

eine solche Reihe, in welcher die Elemente $h_1, h_2, \cdots, h_q$ periodisch wiederkehren. Indem man sie in Gruppen zerlegt, kann man sie schreiben

$$\sum_{n=1}^{p} Q(g_1, \cdots, g_n) + \sum_{n=1}^{q} Q(g_1, \cdots, g_p, h_1, \cdots, h_n) + \sum_{n=1}^{q} Q(g_1, \cdots, g_p, h_1, \cdots, h_q, h_1, \cdots, h_n) + \cdots.$$

Nun sieht man sofort, dass

$$R(a, \cdots, l, m, \cdots, r) = R(a, \cdots, l) \cdot R(m, \cdots, r),$$
$$Q(a, \cdots, l, m, \cdots, r) = R(a, \cdots, l) \cdot Q(m, \cdots, r)$$

ist. Daher ist

$$Q(g_1, \cdots, g_p, h_1, \cdots, h_n) = R(g_1, \cdots, g_p)\, Q(h_1, \cdots, h_n),$$
$$Q(g_1, \cdots, g_p, h_1, \cdots, h_q, h_1, \cdots, h_n)$$
$$= R(g_1, \cdots, g_p, h_1, \cdots, h_q)\, Q(h_1, \cdots, h_n)$$
$$= R(g_1, \cdots, g_p)\, R(h_1, \cdots, h_q)\, Q(h_1, \cdots, h_n)$$

u. s. w.

Trägt man ein, so sieht man, dass die Reihensumme

$$= \sum_{n=1}^{p} Q(g_1, \cdots, g_n) + \frac{R(g_1, \cdots, g_p) \sum_{n=1}^{q} Q(h_1, \cdots, h_n)}{1 - R(h_1, \cdots, h_q)},$$

also einer rationalen Zahl gleich wird.

Umgekehrt muss eine Reihe S, wenn sie eine rationale Zahl darstellen soll, nothwendig periodisch sein. Denn sei der rationale Bruch $\frac{m}{n}$ der Reihe $S(k_1, k_2, \cdots)$ gleich, wo natürlich die k ganze Zahlen sind, dann ist

$$\frac{m}{n} - \frac{1}{k_1 + 1} = \frac{1}{k_1(k_1 + 1)} \cdot S(k_2, k_3, \cdots)$$

folglich

$$S(k_2, k_3, \cdots) = \frac{(m(k_1 + 1) - n)k_1}{n}.$$

Der Bruch rechts hat im Zähler eine ganze Zahl die $\leq n$ ist, weil links eine Reihe S steht. Man findet so, indem man weiter geht, dass alle die Reihen $S(k_3, \cdots)$, $S(k_4, \cdots) \cdots$ rationale echte Brüche mit dem Nenner n sind.

Weil nur n solcher Brüche existiren, können die $n + 1$ Reihen

$$S(k_1, \cdots), S(k_2, \cdots), \cdots, S(k_{n+1}, \cdots)$$

nicht alle von einander verschieden sein. Sei $S(k_p, \cdots)$ die erste dieser Reihen, welche einer späteren gleich ist, und die nächste ihr gleiche die $S(k_{p+r}, \cdots)$, so ist also

$$S(k_p, k_{p+1}, \cdots) = S(k_{p+r}, \cdots)$$

folglich, nach dem bei (6) gefundenen Resultate,

$$k_p = k_{p+r},\ k_{p+1} = k_{p+r+1}, \cdots, k_{p+2r-1} = k_{p+r-1}$$
$$k_{p+2r} = k_{p+r} = k_p,\ k_{p+2r+1} = k_{p+r+1} = k_{p+1},$$

u. s. w.

Die Gruppe $k_p, k_{p+1}, \cdots, k_{p+r-1}$ von Elementen wiederholt sich also periodisch. Da die Zahlen p und $p + r$ beide der Reihe $1 \cdots n + 1$ angehören, so ist r höchstens $= n$.

Man sieht demnach, *dass jede periodische Reihe eine rationale Zahl, jede nicht periodische eine irrationale Zahl darstellt.*

Im Folgenden sollen zwei Reihen S nach ihrer Grösse verglichen werden. Seien

$$a = S(g_1, g_2, \cdots, g_p, g, k, m, \cdots),$$
$$b = S(g_1, g_2, \cdots, g_p, h, l, n, \cdots)$$

zwei Reihen, in welchen die ersten p Stellen mit denselben Zahlen besetzt sind. Dann ist

$$(7) \quad b - a = R(g_1, g_2, \cdots, g_p)\{S(h, l, \cdots) - S(g, k, \cdots)\},$$

Weil aber

$$S(h, l, \cdots) > \frac{1}{h+1},$$

$$S(g, k, \cdots) \leq \frac{1}{g}$$

so folgt

$$b - a \geq R(g_1, g_2, \cdots, g_p) \frac{g - h - 1}{g(h+1)}.$$

Ist nun die ganze Zahl h kleiner als g, so ist sie höchstens $= g - 1$; daher, *wenn* $h < g$, $g - h - 1 > 0$ und *folglich auch* $b - a > 0$.

Für das Folgende ist eine genauere Rechnung nöthig. Zu dem Zwecke schreibe man

$$b - a = R(g_1, g_2, \cdots, g_p)\left\{\frac{1}{h+1} + \frac{S(l, n, \cdots)}{h(h+1)} - \frac{1}{g+1} - \frac{S(k, m, \cdots)}{g(g+1)}\right\}.$$

Weil $h \leq g - 1$, ist

$$\frac{1}{h+1} - \frac{1}{g+1} \geq \frac{1}{g(g+1)};$$

und weil $S(l \cdots)$ sicher > 0 ist, ergiebt sich

$$b - a > R(g_1, g_2, \cdots, g_p) \frac{1 - S(k, m, \cdots)}{g(g+1)};$$

oder, anders geschrieben,

$$(8) \quad S(g_1, g_2, \cdots, g_p, h, l, \cdots) - S(g_1, g_2, \cdots, g_p, g, k, \cdots)$$
$$> R(g_1, g_2, \cdots, g_p, g)\big(1 - S(k, m, \cdots)\big)$$

unter der Bedingung $h < g$.

Sehen wir nun von der Bedingung $h < g$ ab, und beachten, dass jede Reihe S höchstens $= 1$ ist, so folgt aus (7)

$$| b - a | < R(g_1, g_2, \cdots, g_p).$$

Weil aber alle g mindestens $= 1$ sind, ist

$$R(g_1, g_2, \cdots, g_p) < \frac{1}{2^p};$$

folglich

$$(9) \quad | b - a | < \frac{1}{2^p}.$$

Dies ist auch der Fall, wenn

$$b = S(g_1, g_2, \cdots, g_p, 1, 1, \cdots)$$

folglich *giebt es Zahlen der Menge* M *in jedem, wenn auch noch so kleinen, Bereiche um eine gegebene Zahl.*

Soll $b - a$ gleich einer bestimmten Zahl ϑ sein, so muss

$$S(h, l, \cdots) = S(g, k, \cdots) + \frac{\vartheta}{R(g_1, g_2, \cdots, g_p)}$$

sein. Man kann aus dieser Gleichung die Zahlen $h, l, \cdots$ eindeutig bestimmen, wenn die rechte Seite positiv aber ≤ 1 ist, d. h. wenn ϑ der Ungleichung

$$(10)\quad \Big(1-S(g,k,\cdots)\Big)R(g_1,\cdots,g_p)>\vartheta>-S(g,k,\cdots)R(g_1,g_2,\cdots,g_p)$$

genügt. In diesem Falle also ergiebt sich $a+\vartheta$ aus a, indem die p ersten Stellen in der Reihe von a ungeändert bleiben. Die Ungleichung (10) lässt dem ϑ einen Spielraum nach der negativen und nach der positiven Seite, wenn $S(g,k,\cdots)$ nicht $=1$ ist. Ist aber $S(g,k,\cdots)=1$ oder sind alle Zahlen $g, k, \cdots = 1$, so kann ϑ nur negativ sein. Dies ist selbstverständlich; denn, weil dann

$$(11)\qquad a=S(g_1,g_2,\cdots,g_p,1,1,\cdots),$$

kann eine Abänderung, die die ersten p Stellen *nicht* betrifft, nur einen Einer in eine grössere Zahl verwandeln, wodurch nach (8) der Werth der Reihe verkleinert wird. Eine *Vergrösserung* der in (11) gegebenen Zahl wird also nur erreicht, wenn man eine der Zahlen $g_1, \cdots, g_p$ abändert und zwar verkleinert. Zunächst wird man g_p durch $g_p'<g_p$ ersetzen (wenn, wie wir annehmen, g_p nicht selbst $=1$ ist); dann ist,

$$b=S(g_1,g_2,\cdots,g_{p-1},g_p',h,l,n,\cdots)$$

gesetzt, $b>a$. Soll $b-a=\vartheta$ sein, so muss

$$\vartheta=R(g_1,g_2,\cdots,g_{p-1})\left\{S(g_p',h,l,n\cdots)-S(g_p,1,1,\cdots)\right\}$$

sein. Es ist aber $S(g_p,1,1,\cdots)=\frac{1}{g_p}$, daher hat man die Gleichung

$$S(g_p',h,l,n,\cdots)=\frac{1}{g_p}+\frac{\vartheta}{R(g_1,g_2,\cdots,g_{p-1})}.$$

Ist

$$(12)\qquad \vartheta\leq R(g_1,g_2,\cdots,g_{p-1})\Big(1-\frac{1}{g_p}\Big),$$

so ist die rechte Seite der Gleichung ≤ 1, also kann man aus der Gleichung in der That die Zahlen $g_p', h, l, n, \cdots$ bestimmen.

Die betrachtete Darstellung aller Zahlen, die >0 und ≤ 1 sind, durch die Reihen S hat manche Aehnlichkeit mit der Darstellung durch unendliche Decimalbrüche und man kann an jene analoge zahlentheoretische Probleme wie an diese knüpfen. Ich erwähne hier nur die Aufgabe die Zahlen der Menge M in anderer Weise zu charakterisiren als es oben geschehen ist, wo sie definirt sind als diejenigen, welche eine Entwickelung in eine endliche Reihe zulassen. Es ist mir nicht gelungen diese Frage zu erledigen.

II.

Als Anwendung der entwickelten Reihen sei zuerst *eine Function y der Variabeln x construirt, welche für alle* $x > 0$ *und* $\leqq 1$ *irrationale Werthe hat und sich eindeutig umkehren lässt.* Um dies zu erreichen setze man

$$x = S(g_1, g_2, g_3, \cdots)$$

und

$$y = \frac{1}{g_1 +} \frac{1}{g_2 +} \frac{1}{g_3 +} \cdots;$$

dann entspricht jedem $x > 0$ und $\leqq 1$ ein einziges System von Zahlen g, also auch nur ein Werth von y, der, weil der Kettenbruch unendlich ist, irrational ist. Ist umgekehrt eine irrationale Zahl $y > 0$ und < 1 gegeben, so kann man sie nur auf *eine* Art in einen Kettenbruch entwickeln, also sind durch y die Zahlen g und damit auch der Werth von x eindeutig bestimmt.

Als zweite Anwendung soll *eine Ebene auf eine Gerade gegenseitig eindeutig abgebildet werden.* Wir beginnen mit der Abbildung eines Quadrats von der Seitenlänge Eins auf eine Strecke von der Länge Eins. Zwei anstossende Quadratseiten seien zu den x- und y-Axen eines Coordinatensystems gewählt und vom einen Endpunkt der Strecke aus Abscissen ξ gezählt, so dass x, y und ξ sich alle drei zwischen 0 und 1 bewegen. Dann wird die Beziehung erhalten, indem man x und y in unendliche Reihen S entwickelt:

$$x = S(g_1, g_2, \cdots),$$

$$y = S(h_1, h_2, \cdots)$$

und dann

$$\xi = S(g_1, h_1, g_2, h_2, g_3, h_3, \cdots)$$

setzt.

Aus der früher bewiesenen Eigenschaft, dass sich eine Zahl nur auf eine Weise in eine unendliche Reihe S entwickeln lässt, folgt, dass einem Punkte (xy) des Quadrates *ein* Punkt (ξ) der Geraden entspricht und umgekehrt. Ausgenommen sind nur die Punkte für die x oder y den Werth Null hat sowie der Punkt der $\xi = 0$ entspricht, also zwei Quadratseiten und ein Endpunkt der geraden Strecke; für diese giebt es keine Bilder.

Nach einem allgemeinen Satze (siehe Lüroth, Erlanger Berichte 1878, 8. Juli; G. Cantor, Göttinger Nachrichten 1879, Seite 127) muss eine solche Beziehung, wie wir sie eben aufstellten, unstetig sein. Es soll jetzt untersucht werden, für welche Werthsysteme von xy die Unstetigkeiten von ξ eintreten.

Sei

$$x_0 = S(a_1, a_2, \cdots),$$
$$y_0 = S(b_1, b_2, \cdots),$$

und

$$\xi_0 = S(a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, \cdots).$$

Man ändert nun nach dem früheren ξ_0 sicher um weniger als eine gegebene Grösse δ ab, wenn man die ganze Zahl p aus der Ungleichung

$$\frac{1}{2^{2p}} < \delta$$

bestimmt und dann nur die an $2p + 1^{\text{ter}}, 2p + 2^{\text{ter}} \cdots$ Stelle stehenden Zahlen von ξ_0 durch andere ersetzt. Somit wird

$$\xi = S(a_1, b_1, a_2, b_2, \cdots, a_p, b_p, a'_{p+1}, b'_{p+1}, \cdots)$$

die Ungleichung $|\xi - \xi_0| < \delta$ erfüllen. Das ξ entspricht aber den Werthen

$$x = S(a_1, a_2, \cdots, a_p, a'_{p+1}, \cdots),$$
$$y = S(b_1, b_2, \cdots, b_p, b'_{p+1}, \cdots).$$

Für die Stetigkeit ist nöthig, dass diese Werthsysteme $(x\,y)$ ein Gebiet erfüllen, welches den Punkt $x_0\,y_0$ allseitig mit endlichen, wenn auch noch so kleinen, Dimensionen umgiebt. Nach den in Gleichung (10) niedergelegten Resultaten können wir aber x aus x_0 und y aus y_0 durch Abänderung der Zahlen, die auf die p^{te} Stelle folgen, herleiten, wenn die Ungleichungen

$$(13)\quad \begin{cases} \cdot \quad \big(1 - S(a_{p+1}, a_{p+2}, \cdots)\big) R(a_1, a_2, \cdots, a_p) \\ > x - x_0 > -S(a_{p+1}, a_{p+2}, \cdots)\ R(a_1, a_2, \cdots, a_p) \\ \qquad \big(1 - S(b_{p+1}, b_{p+2}, \cdots)\big) R(b_1, b_2, \cdots, b_p) \\ > y - y_0 > -S(b_{p+1}, b_{p+2}, \cdots)\ R(b_1, b_2, \cdots, b_p) \end{cases}$$

erfüllt sind. Jedem Werthsystem $(x\,y)$, welches diesen Ungleichungen genügt, entspricht dann ein ξ für das $|\xi - \xi_0| < \delta$ ist. Die Ungleichungen (13) definiren geometrisch gesprochen ein Rechteck, in dessen *Innerem* $(x_0\,y_0)$ aber nur dann gelegen ist, wenn nicht eine der beiden Seiten Null ist. Von den rechten Seiten ist dies unmöglich, dagegen kann es bei den linken eintreten wenn $S(a_{p+1}, a_{p+2}, \cdots)$ oder $S(b_{p+1}, b_{p+2}, \cdots)$ oder beide gleich Eins sind d. h. wenn x_0 oder y_0 oder beide der Menge M angehören. *Somit ist für jeden Punkt* $(x_0 y_0)$, *für den weder* x_0 *noch* y_0 *zu* M *gehört,* ξ *stetig.* Dass in allen anderen Fällen ξ unstetig ist, zeigt sich so:

Es beginne bei x_0 die Periode Eins mit der $q + 1^{\text{ten}}$, bei y_0 mit der $(r + 1)^{\text{ten}}$ Stelle (wo q oder r auch unendlich sein können).

Sei zuerst $q < r$, so dass

$$x_0 = S(a_1, a_2, \cdots, a_q, 1, 1, \cdots),$$
$$y_0 = S(b_1, b_2, \cdots, b_q, b_{q+1}, \cdots)$$

und $a_q > 1$ ist, während unter den Zahlen $b_{q+1}, b_{q+2}, \cdots$ sicher noch von Eins verschiedene vorkommen, weil die Periode Eins, wenn sie existirt, nach der Annahme erst bei der $q + 2^{\text{ten}}$ oder einer höheren Stelle beginnen soll.

Wenn man nun die positive Zahl ε gemäss den Ungleichungen

$$\varepsilon < \left(1 - \frac{1}{a_q}\right) R(a_1, a_1, \cdots, a_{q-1}),$$
$$\varepsilon < R(b_1, b_2, \cdots, b_q)\left(1 - S(b_{q+1}, b_{q+2}, \cdots)\right)$$

bestimmt (was stets möglich ist, weil $S(b_{q+1}, b_{q+2}, \cdots)$ nicht $= 1$ ist) so kann man nach den bei (10) und (11) erhaltenen Resultaten alle x und y, für welche

$$x - x_0 > 0 \text{ und } < \varepsilon,$$
$$y - y_0 > 0 \text{ und } < \varepsilon$$

ist, durch die Formeln

$$x = S(a_1, \cdots, a_{q-1}, a'_q, a'_{q+1}, \cdots),$$
$$y = S(b_1, \cdots, b_{q-1}, b_q, b'_{q+1}, \cdots).$$

durch passende Wahl der Grössen $a'_q, a'_{q+1}, \cdots, b'_{q+1}, \cdots$ (wo $a'_q < a_q$) ausdrücken. Für diesen Punkt $(x\,y)$ ist aber

$$\xi = S(a_1, b_1, a_2, b_2, \cdots, a_{q-1}, b_{q-1}, a'_q, b_q, a'_{q+1}, \cdots),$$

während

$$\xi_0 = S(a_1, b_1, \cdots, a_{q-1}, b_{q-1}, a_q, b_q, 1, b_{q+1}, \cdots)$$

war.

Nach (8) ist also

$$\xi - \xi_0 > R(a_1, b_1, \cdots, a_{q-1}, b_{q-1}, a_q)\left(1 - S(b_q, 1, b_{q+1}, 1, \cdots)\right);$$

die rechte Seite ist von Null verschieden, weil in der Reihe $b_q, b_{q+1}, \cdots$ Zahlen vorkommen, die nicht gleich Eins sind. Wie klein also auch ε gewählt werden mag, es ist nicht möglich $\xi - \xi_0$ unter die durch die rechte Seite obiger Ungleichung gegebene Grenze herunterzubringen. Dies ist aber das Zeichen, dass ξ in der Nähe von $(x_0\,y_0)$ unstetig ist.

Ist $r \leqq q$, so ist

$$y_0 = S(b_1, b_2, \cdots, b_r, 1, 1, \cdots),$$
$$x_0 = S(a, a_2, \cdots, a_r, a_{r+1}, \cdots)$$

und hier ist b_r sicher > 1, und $S(a_r, a_{r+1}, \cdots) < 1$, weil sonst

$$a_r = a_{r+1} = \cdots = 1$$

sein müsste, gegen unsere Annahme über den Beginn der Periode. Es ist dann

$$\xi_0 = S(a_1, b_1, \cdots, a_{r-1}, b_{r-1}, a_r, b_r, a_{r+1}, 1, \cdots).$$

Nimmt man jetzt

$$0 < \varepsilon < \begin{cases} R(b_1, b_2, \cdots, b_{r-1})\left(1 - \frac{1}{b_r}\right), \\ R(a_1, a_2, \cdots, a_{r-1})\left(1 - S(a_r, a_{r+1}, \cdots)\right), \end{cases}$$

so kann man durch

$$x = S(a_1, a_2', \cdots, a_{r-1}, a_r', \cdots),$$
$$y = S(b_1, b_2, \cdots, b_{r-1}, b_r', b_{r+1}', \cdots)$$

wenn man $b_r' < b_r$ nimmt, alle x und y erzeugen, für die

$$0 < x - x_0 < \varepsilon, \qquad 0 < y - y_0 < \varepsilon$$

ist. Für diese ist dann

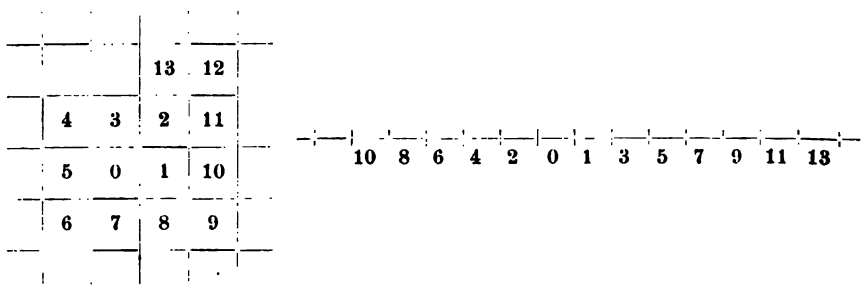
$$\xi = S(a_1, b_1, \cdots, a_{r-1}, b_{r-1}, a_r', b_r', \cdots),$$

$$\xi - \xi_0 > R(a_1, b_1, \cdots, a_{r-1}, b_{r-1}, a_r)\left(1 - S(b_r, a_{r+1}, 1, \cdots)\right);$$

die rechte Seite ist hier > 0, weil schon $b_r > 1$ ist. Somit ist auch hier $\xi - \xi_0$ nicht unter eine gewisse Grenze herabzubringen und folglich ξ bei $(x_0\, y_0)$ unstetig.

Also ist ξ unstetig für alle Punkte $(x_0\, y_0)$ bei welchen x_0 oder y_0 oder beide zur Menge M gehören.

Man kann diese Abbildung anwenden um die unbegrenzte Ebene auf die unbegrenzte Gerade gegenseitig eindeutig abzubilden. Man denke sich die ganze Ebene durch äquidistante horizontale und verticale Linien in ein System von Quadraten und die Gerade in gleichgrosse Strecken getheilt. Dann lassen sich jene Quadrate und diese Strecken gegenseitig zuordnen, etwa so, wie es in nebenstehender Figur geschehen ist.



Ein Quadrat kann man auf die gleichnamige Strecke dann so abbilden,

dass einerseits die Punkte der linken und der unteren Quadratseite andererseits der linke Endpunkt der Strecke ohne Bilder bleiben, wie dies bei der eben vorgetragenen Abbildung der Fall ist, wenn die Coordinatensysteme passend gewählt werden. Weil aber jede untere Quadratseite zugleich die obere eines andern Quadrates ist, und ebenso die linke Seite zugleich in einem zweiten als rechte Seite auftritt, andererseits der Endpunkt einer Strecke mit dem Anfangspunkt einer zweiten zusammenfällt, so ergiebt sich für *jeden* Punkt der Ebene ein Bild auf der Geraden und umgekehrt.

Schliesslich sei bemerkt, dass man die Reihenentwickelungen die wir an die Reihe der positiven ganzen Zahlen geknüpft haben, mit einigen Modificationen auch ausführen kann, wenn man andere Zahlenreihen zu Grunde legt. Die Fragen, welche oben schon unbeantwortet geblieben sind, dürften sich bei diesen freilich nur noch schwieriger gestalten.

München im October 1882.

Beiträge zur Theorie der algebraischen Gleichungen.

Von

Julius König in Budapest.

Die Frage, wie die Galois'sche Theorie zur Untersuchung einer (durch ihre Coefficienten) wirklich gegebenen Gleichung benutzt werden kann, ist bisher, so viel ich weiss, nicht behandelt worden. In § 1. der vorliegenden Arbeit gebe ich eine Methode an, nach welcher der wichtigste Punkt dieser Untersuchung, die Aufstellung aller verschiedener Gattungen von Resolventen immer erledigt werden kann. Hierauf gestützt, kann in § 2. ein allgemeines Kriterium dafür angegeben werden, ob eine vorgelegte Gleichung „theilweise" oder „vollständig" algebraisch lösbar ist, zugleich mit einer Methode, die diese algebraische Lösung nach einem völlig bestimmten Algorithmus liefert, der allerdings durch ihre Langwierigkeit beinahe undurchführbare Rechnungen verlangt.

Dass die angewandten Methoden auch in andern algebraischen Fragen gut verwerthet werden können, zeigt § 3., wo eine Reihe von Sätzen behandelt wird, die sich auf Gruppen beziehen, deren Ordnung eine Primzahlpotenz ist. Insbesondere wird der Gang der Auflösung für Gleichungen mit solcher Gruppe präcisirt.

Im Zusammenhange hiermit steht die Theorie einer Classe algebraisch lösbarer Gleichungen, welche die Abel'schen Gleichungen als speciellen Fall enthält, und die am kürzesten dadurch charakterisirt wird, dass die Reihenfolge der zur Auflösung nothwendigen irrationalen Operationen beliebig vertauscht werden kann.

§ 1.

Die Resolventen einer gegebenen Gleichung.

Jedes algebraische Problem ist als erledigt zu betrachten, wenn es gelingt, dasselbe auf die beiden elementaren Fundamentalaufgaben zurückzuführen.

1. Bestimmung der symmetrischen Functionen der Wurzeln einer Gleichung durch die Coefficienten derselben.

2. Bestimmung der irreductibeln Factoren einer ganzen Function in Bezug auf einen beliebigen Rationalitätsbereich*).

Diese zweite Aufgabe kann noch, wie hinzugefügt werden mag, dem Wesen nach darauf zurückgeführt werden, die ganzzahligen Wurzeln einer Gleichung mit ganzzahligen Coefficienten (im natürlichen Rationalitätsbereiche) zu bestimmen.

Man kann demnach mit Hülfe elementarer Algorithmen von der Gleichung $f(x) = 0$ zu ihrer Galois'schen Resolvente $F(V) = 0$ übergehen und so vor allem die Ordnung der Gleichung $f(x) = 0$ bestimmen; denn hierzu bedarf es nur der Bildung einer Gleichung vom Grade $n!$, deren Coefficienten symmetrische Functionen der Wurzeln von $f(x) = 0$, und sodann der Aussonderung eines beliebigen irreductibeln Factors der letzteren.

Die Untersuchung einer beliebigen Gleichung kann demnach immer zurückgeführt werden auf diejenige einer Gleichung $F(V) = 0$, in der jede Wurzel rationale Function einer beliebigen Wurzel ist, oder — was dasselbe ist — für welche Grad und Ordnung (N) übereinstimmen. Diese Gleichungen sollen im Anschluss an die von Klein eingeführten Anschauungsweisen kurz als *reguläre Gleichungen* bezeichnet werden.

Diese regulären Gleichungen haben die charakteristische Eigenschaft, dass die rationalen Functionen ihrer Wurzeln nur *uneigentliche Gattungen* (nach Kronecker) bilden, d. h. dass jede derselben, wenn ihre Adjunction die Gruppe der Gleichung erniedrigt, das Gleichungspolynom $F(V)$ in Factoren zerlegt. Sei ψ eine solche Function, deren Adjunction aus $F(V)$ den Factor $F_1(V)$ aussondert, und

$$V_1, V_2, \cdots, V_\varkappa,$$

die der Gleichung $F_1(V) = 0$ entsprechenden Wurzeln, so gehören, wie man leicht sieht, ψ und die allgemeinste symmetrische Function der Grössen $V_1, \cdots, V_\varkappa$

$$S = (V_1 - \mu)(V_2 - \mu) \cdots (V_\varkappa - \mu),$$

(wo μ so zu wählen, dass die $\binom{N}{\varkappa}$ Werthe, welche durch sämmtliche Vertauschungen der V erzeugt werden, auch sämmtlich von einander verschieden sind) zur selben Gattung.

Die verschiedenen Gattungen von Resolventen der Gleichung $F(V) = 0$ werden daher durch die den verschiedenen Functionen $S_\varkappa$ entsprechenden Gleichungen erschöpft, wobei natürlich in den S

*) S. Kronecker, Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen. § 4.

nicht nur die Zahl der eintretenden Wurzeln, sondern auch diese Wurzeln selbst beliebig gewählt werden können *).

Soll demgemäss die Frage entschieden werden, ob die Gleichungen $f(x) = 0$ und $F(V) = 0$ eine Resolvente r^{ten} Grades besitzen, so wird man nur zu berücksichtigen haben, dass, wenn eine solche existirt, die Adjunction einer ihrer Wurzeln einen Factor vom Grade $\frac{N}{r} = \varkappa$ aus $F(V)$ aussondert. Bilden wir daher die Gleichung $\binom{N}{\varkappa}$-ten Grades für $S_\varkappa$, so muss eine der Wurzeln dieser Gleichung, d. h. eine der durch Vertauschung der V aus $S_\varkappa$ entstehenden Functionen, mit einer Wurzel der Resolvente zur selben Gattung gehören, also mit andern Worten, das Polynom der Gleichung für $S_\varkappa$ einen irreductibeln Factor r^{ten} Grades enthalten. Ist ein solcher vorhanden, so giebt derselbe gleich Null gesetzt, die Resolvente selbst. Sind mehrere Typen von Resolventen r^{ten} Grades vorhanden, so wird das entsprechende Gleichungspolynom mehrere irreductible Factoren gleichen Grades enthalten.

Um zu entscheiden ob die beliebige Gleichung $f(x) = 0$ eine (irreductible) Resolvente r^{ten} Grades besitzt, hat man zuerst die Gleichung $F(V) = 0$ vom Grade N (die Galois'sche Resolvente) zu bilden, gehe dann zur Gleichung für

$$S_\varkappa = (V_1 - \mu)(V_2 - \mu) \cdots (V_\varkappa - \mu), \qquad \varkappa = \frac{N}{r}$$

über, die vom Grade $\binom{N}{\varkappa}$ ist, und deren Coefficienten symmetrische Functionen der V sind. Ist diese Gleichung

$$\Phi_\varkappa = 0,$$

so wird die Gleichung $f(x) = 0$ dann und nur dann (irreductible) Resolventen r^{ten} Grades besitzen, wenn sich aus $\Phi_\varkappa$ ein irreductibler Factor r^{ten} Grades aussondern lässt. Diese Factoren, gleich Null gesetzt, geben alle verschiedenen Gattungen der Resolventen r^{ten} Grades.

Die Frage kann daher in jedem Fall mit Hülfe eines vollständig durchführbaren Rechnungsalgorithmus gelöst werden. Es möge nur noch bemerkt werden, dass dieselben Algorithmen darüber entscheiden, ob die so erhaltenen Resolventen holoedrisch oder meriedrisch sind, da hierzu wieder nur die Bestimmung ihrer Ordnungszahl nothwendig, die im ersten Fall gleich N, im zweiten Fall gleich einem Theiler von N sein wird.

---

*) S. meine Abhandlung „Ueber Factorenzerlegung ganzer Functionen etc." Diese Annalen Bd. XV.

§ 2.

Allgemeine Kriterien der algebraischen Lösbarkeit.

Um zu entscheiden, ob die Gleichung $f(x) = 0$ algebraisch lösbar ist, werden wir vor allem wieder zur entsprechenden regulären Gleichung

$$F(V) = 0$$

übergehen, deren Grad und Ordnung (in Primzahlfactoren zerlegt) gleich

$$N = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_t^{\alpha_t}$$

sei. Soll nun die Gleichung algebraisch lösbar sein, so muss die Auflösung mit Hülfe einer Abel'schen Gleichung vom Grade $p_1, p_2, \cdots$ oder p_t beginnen, und diese Gleichung ist eine Resolvente von $F(V) = 0$, die $F(V)$ in Factoren vom Grade $\frac{N}{p_1}$, $\frac{N}{p_2}$, $\cdots$, oder $\frac{N}{p_t}$ zerlegt. Ob nun eine solche Resolvente existirt, wird durch die Bildung der Gleichungen

$$\Phi_{\frac{N}{p_1}} = 0, \cdots, \Phi_{\frac{N}{p_t}} = 0$$

entschieden, und man erhält für die algebraische Lösbarkeit von $F(V) = 0$ die Bedingung, dass wenigstens eine dieser Gleichungen

$$\Phi_{\frac{N}{p_t}} = 0$$

einen irreductibeln Factor p_i^{ten} Grades enthalten muss. Soll die so erhaltene Resolvente $F(V)$ in der That algebraisch in Factoren zerfallen, so muss der entsprechende Factor von $F(V)$ zugleich auch von der Ordnung p_i sein.

Wir haben in dieser Weise die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür erhalten, dass $F(V)$ durch Adjunction von Wurzelgrössen in Factoren vom Grade $\frac{N}{p}$ (p Primzahl) zerfällt werden könne. Ist diess der Fall, so wird man diese Untersuchung an einem der so erhaltenen Factoren wiederholen, und diess genügt, da die einzelnen Factoren isomorph sind.

Man sieht unmittelbar ein, dass, wenn es durch eine Kette aufeinanderfolgender Abel'scher Gleichungen gelingt einen Factor vom Grade $\frac{N}{p_1^{\alpha_1} \cdots p^{\alpha_t}}$ abzusondern, die Coefficienten desselben $\frac{N}{\nu}$-deutige Functionen sind, und wenn man demnach diese Coefficienten mit den entsprechenden Werthen vertauscht, man alle Factoren erhält, deren Product wieder $F(V)$ giebt.

Auf diese Weise gelangt man dazu die Reduction der Gleichungen

$f(x) = 0$ oder $F(V) = 0$ so weit zu führen, als diess überhaupt durch Adjunction von Wurzelgrössen möglich ist, und gelangt schliesslich dazu, wenn die Gleichung algebraisch lösbar ist, nicht nur diess zu erkennen, sondern auch die Lösung zu bewerkstelligen. Man erhält nämlich für V einen N-deutigen Ausdruck, aus welchem dann auch die Werthe von x rational berechnet werden.

So langwierig auch die Anwendung dieses Verfahrens für eine gegebene Gleichung erscheinen mag, so besitzt das angegebene Kriterium doch einen principiellen Werth, indem es die erste allgemeine Methode angiebt, um die algebraische Lösbarkeit einer Gleichung zu untersuchen, und wenn diess möglich, die Wurzeln in algebraischer Form darzustellen. Ob ein Kriterium der algebraischen Lösbarkeit in wesentlich anderer Form*) (die obigen Resultate können in mannigfaltiger Weise ausgedrückt werden) für Gleichungen von *beliebigem* Grade aufgestellt werden kann, scheint überhaupt sehr fraglich. Dass jene Formen für die Bedingung der algebraischen Lösbarkeit, wie sie Abel und Galois für Gleichungen, deren Grad eine Primzahl ist, aufgestellt haben, so einfach sind, findet seinen Grund in Verhältnissen, die bei zusammengesetzter Gradzahl wegfallen. In jenem einfacheren Falle ist nämlich erstens nicht blos Charakter, sondern auch die *Reihenfolge* der erforderlichen Radicirungen von vorneherein festgelegt, und es genügt zweitens schon die Kenntniss der Ordnungszahl allein, ohne weiter auf die Structur der Gruppe einzugehen, um über die algebraische Lösbarkeit der Gruppe zu entscheiden. Weder das eine, noch das andere ist der Fall, sobald der Grad der vorgelegten Gleichung ein beliebiger ist.

§ 3.

Ueber irreductible Factoren, deren Grad eine Primzahlpotenz ist.

Die in § 1. angegebene Methode liefert sehr einfache und directe Beweise für jene algebraische Sätze, welche aus dem Cauchy'schen Fundamentaltheorem über Substitutionsgruppen und den von Sylow gegebenen Verallgemeinerungen desselben folgen. Diese Sätze selbst ergeben sich hierdurch auf einem neuen Wege, da man immer eine Gleichung aufstellen kann, welche die beliebig angegebene Gruppe G besitzt.

Ist $F(V) = 0$ eine (irreductible) reguläre Gleichung vom Grade $N = p^\alpha Q$, wo p eine Primzahl und Q nicht mehr durch p theilbar, so kann $F(V)$ durch Adjunction einer Grösse φ in Factoren vom Grade p^α zerfällt werden, wo φ selbst Wurzel einer irreductibeln Gleichung

*) Insbesondere in Form *algebraischer* Relationen zwischen den Wurzeln.

Q-ten Grades ist, deren Coefficienten demselben Rationalitätsbereiche angehören, wie die Coefficienten der ursprünglichen Gleichung.

Um unabhängig von der Gruppe der Gleichung einen Factor $p^{\alpha\,\text{ten}}$ Grades zu bestimmen, hat man eine Gleichung vom Grade

$$\binom{p^\alpha Q}{p^\alpha} = \frac{p^\alpha Q(p^\alpha Q-1)\cdots(p^\alpha Q-r)\cdots(p^\alpha Q-p^\alpha+1)}{p^\alpha\,(p^\alpha-1)\,(p^\alpha-r)\cdots(p^\alpha-p^\alpha+1)}$$

zu bilden, deren Coefficienten symmetrische Functionen der Wurzeln von $F(V)=0$ sind. Man sieht, dass die Gradzahl dieser Gleichung nicht durch p theilbar ist, denn $p^\alpha Q - r$ und $p^\alpha - r$ sind immer durch dieselbe Potenz von p theilbar. Die so erhaltene Gleichung kann noch reductibel sein; ihre irreductibeln Factoren seien vom Grade $\varkappa_1, \varkappa_2, \cdots, \varkappa_m$. Dann ist

$$\varkappa_1 + \varkappa_2 + \cdots + \varkappa_m = \binom{p^\alpha Q}{p^\alpha}.$$

Keine der Zahlen $\varkappa$ kann gleich 1 sein, da sonst $F(V)$ reductibel wäre. Zugleich muss wenigstens eine der Zahlen $\varkappa$, z. B. $\varkappa_1$ durch p nicht theilbar sein; denn wären alle Zahlen $\varkappa$ durch p theilbar, so müsste es auch $\binom{p^\alpha Q}{p^\alpha}$ sein.

Die Gleichung $F(V)=0$ hat demnach eine irreductible Resolvente $\varkappa_1$-ten Grades. Sei eine der Wurzeln derselben φ_1. Dann zerlegt die Adjunction von φ_1 das Polynom $F(V)$ in irreductible Factoren vom Grade $p^\alpha \frac{Q}{\varkappa_1}$, wo $\frac{Q}{\varkappa_1}$ eine ganze Zahl sein muss, da p^α und $\varkappa_1$ relativ prim sind.

Es kann demnach $\varkappa_1$ nicht grösser sein als Q; ebensowenig kann aber $\varkappa_1$ kleiner sein als Q; denn die Adjunction von φ müsste dann irreductible Factoren vom Grade $p^\alpha \frac{Q}{\varkappa_1} > p^\alpha$ ergeben, im Widerspruche damit, dass nach Einbeziehung von φ in den Rationalitätsbereich jedenfalls ein rationaler Factor $p^{\alpha\,\text{ten}}$ Grades sich aussondert.

Den Wurzeln $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_Q$ der so erhaltenen Resolvente Q^{ten} Grades entsprechen in der Gruppe der Gleichung enthaltene Untergruppen $p^{\alpha\,\text{ter}}$ Ordnung, die sämmtlich durch Transformation auseinander entstehen, und von denen man ferner nachweisen kann, dass *jede in der Gleichungsgruppe enthaltene Gruppe, deren Ordnung eine Potenz von p ist, in einer jener Gruppen enthalten sein muss.* Ist nämlich P eine Gruppe von der Ordnung $p^{\alpha'}$ und ψ eine Function, die nur für die Substitutionen dieser Gruppe ungeändert bleibt, so wird $F(V)$ durch Adjunction von ψ in Factoren zerfällt, deren Grad und Ordnung $p^{\alpha'}$. In dem so erhaltenen Rationalitätsbereich ist also auch die Ordnung von $F(V)=0$ eine Potenz von p. Demgemäss

muss auch die Resolvente Q^{ten} Grades in Factoren zerfallen, deren Grad eine Potenz von p ist. Sind demnach die einzelnen Factoren vom Grade p^{a_1}, p^{a_2}, $\cdots$, so hat man

$$Q = p^{a_1} + p^{a_2} + \cdots .$$

Da aber Q nicht durch p theilbar, ist diess nur so möglich, dass einer der Exponenten a gleich Null wird, d. h. *die Adjunction von ψ bestimmt wenigstens eine Wurzel der Resolvente Q^{ten} Grades in rationaler Weise*, was mit dem obigen übereinstimmt.

Ohne in das Detail dieser Sätze weiter einzugehen, sei hier nur noch der folgende erwähnt:

Jede (irreductible) Gleichung, deren Grad und Ordnung Potenz derselben Primzahl p ist, wird durch Auflösung einer Abel'schen Gleichung vom Grade p, in p Factoren gleichen Grades zerfällt. Dass diese Gleichungen algebraisch lösbar sind, hat Herr Sylow bewiesen; der zu beweisende Satz präcisirt den Gang der Auflösung.

Sei Grad der Gleichung p^x, um hieraus einen Factor $p^{x-1\,ten}$ Grades auszusondern, hat man für $S_{p^{x-1}}$ eine Gleichung zu bilden, deren Coefficienten symmetrische Functionen und deren Gradzahl

$$\binom{p^x}{p^{x-1}} = \frac{p^x(p^x-1)\cdots(p^x-p^{x-1}+1)}{p^{x-1}(p^{x-1}-1)\cdots(p^{x-1}-p^{x-1}+1)}$$

von der Form pQ ist, wo p und Q relativ prim sind. Da aber auch die Ordnung der vorgelegten Gleichung gleich einer Potenz von p ist, muss die so gebildete Gleichung in mehrere Factoren zerfallen, deren Gradzahlen wieder Potenzen von p sind. Also, wenn die einzelnen Factoren vom Grade p^{a_1}, p^{a_2}, $\cdots$ sind, wird:

$$p^{a_1} + p^{a_2} + \cdots + p^{a_r} = pQ.$$

Hieraus folgt, dass nicht alle Exponenten > 1 sein können, sonst müsste pQ durch p^2 theilbar sein, was nicht der Fall ist. Es kann aber auch kein a gleich 0 sein. Sonst hätte die Gleichung für $S_{p^{x-1}}$ eine rational bekannte Wurzel, und die untersuchte Gleichung wäre nicht irreductibel. Demnach muss ein a gleich eins sein. Und man erhält für die Factorenzerlegung eine *irreductible Resolvente p^{ten} Grades*, von der es unmittelbar klar ist, dass *sie eine Abel'sche Gleichung, d. h. auch von der Ordnung p sein muss.* Denn ihre Ordnung muss einerseits eine Potenz von p, andererseits ein Theiler von $p!$ sein, was in der That die Zahl p bestimmt.

§ 4.

Ueber eine specielle Klasse algebraisch lösbarer Gleichungen.

Ist $f(x) = 0$ eine algebraisch lösbare Gleichung, so kann der bei der Auflösung zu befolgende Gang schematisch durch eine Reihe von Primzahlen charakterisirt werden:

$$[p_1],\ [p_2],\ \cdots,\ [p_\varkappa].$$

Man hat nämlich zuerst eine Abel'sche Gleichung vom Grade p_1 zu bilden, deren Coefficienten dem ursprünglichen Rationalitätsbereich angehören, dann adjungirt man eine Wurzel dieser Gleichung u_1. Hierauf ist wieder eine Abel'sche Gleichung vom Grade p_2 zu bilden, deren Coefficienten im Allgemeinen dem durch die Adjunction von u_1 erweiterten Rationalitätsbereiche angehören. (In speciellen Fällen braucht u_1 nicht in den Coefficienten aufzutreten). Hierauf adjungirt man wieder eine Wurzel dieser Gleichung u_2, und so fort, bis schliesslich nach Adjunction von $u_\varkappa$ alle Wurzeln der Gleichung rational ausdrückbar sind.

Neben der Berechnung rational bekannter Grössen sind daher $[p_1]$ u. s. w. die Elementaroperationen, die für die Auflösung von $f(x) = 0$ verlangt werden. *Im Allgemeinen ist hierbei die Reihenfolge der Operationen $[p]$ eine fest bestimmte.* Für gewisse Gleichungen können die Operationen $[p]$ in verschiedener Weise geordnet werden, wobei aber natürlich das Product der Primzahlen p constant bleibt.

Die einfachste Klasse algebraisch lösbarer Gleichungen wird durch die Forderung bestimmt, die Operationen $[p]$ in völlig beliebiger Reihenfolge ausführen zu können. Die so erhaltene Klasse von Gleichungen ist die allgemeinste, für welche die Auflösung der Galois'schen Resolvente noch genau nach den von Gauss angegebenen Methoden erfolgen kann. Sie enthält alle Abel'schen Gleichungen, alle Gleichungen, deren Ordnung eine Primzahlpotenz ist und viele andere.

Ist die Ordnung der Gleichung:

$$N = \pi_1^{\alpha_1}\, \pi^{\alpha_2} \cdots \pi_3^{\alpha_s},$$

so kann die Auflösung durch eine Kette von α_i Abel'schen Gleichungen π_i^{ten} Grades begonnen werden. Dementsprechend besitzt die Gruppe der Gleichung G eine Untergruppe G_i von der Ordnung $\frac{N}{\pi_i^{\alpha_i}}$.

Die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass $f(x) = 0$ in die angeführte Klasse gehöre, ist, dass ihre Gruppe G invariante) Untergruppen G_i von der Ordnung $\frac{N}{\pi_i^{\alpha_i}}$ enthalte* $(i = 1, 2, \cdots s)$.

*) Der Ausdruck „invariant" statt „ausgezeichnet" ist nicht nur charakteristischer, sondern empfiehlt sich auch durch seine internationale Brauchbarkeit.

Dass diese Bedingung hinreichend ist, ist unmittelbar einzusehen; denn der Gruppe G_i entspricht dann eine Resolvente $R_i = 0$ von der Ordnung $\pi_i^{\alpha_i}$; und die von einander unabhängige Auflösung der Gleichungen

$$R_1 = 0, \cdots, R_s = 0$$

löst die Gleichung $f(x) = 0$ vollständig, und gestattet eine beliebige Reihenfolge der Operationen $[\pi]$.

Andererseits ist die Bedingung auch nothwendig. Jedenfalls kann die Auflösung der Gleichung durch eine Kette von α_i Abel'schen Gleichungen π_i^{ten} Grades begonnen werden, und diese Kette von Gleichungen durch eine einzige Gleichung $R_i = 0$ von der Ordnung $\pi_i^{\alpha_i}$ ersetzt werden. Dann sind aber die Gleichungen

$$f(x) = 0 \quad \text{und} \quad R_1 R_2 \cdots R_s = 0$$

vollständig äquivalent, und die Wurzeln der einen rational durch die der andern ausdrückbar. Demnach sind ihre Gruppen G und Γ holoedrisch isomorph. Die Gruppe Γ besteht aber aus dem Product von s Gruppen $\gamma_1 \cdots \gamma_s$ von der Ordnung $\pi_1^{\alpha_1} \cdots \pi_s^{\alpha_s}$, deren jede sich auf andere Elemente bezieht. Das Product von $s - 1$ derselben ist also jedenfalls eine invariante Untergruppe von Γ, und die entsprechende Untergruppe in G muss dann dieselbe Eigenschaft besitzen.

Man bemerkt zugleich, dass $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_s$ invariante Untergruppen von Γ sind, und dass daher die entsprechenden Gruppen $g_1, \cdots, g_s$ in G, deren Ordnung $\pi_1^{\alpha_1} \cdots \pi_s^{\alpha_s}$ dieselbe Eigenschaft besitzen. Da aber sämmtliche Gruppen dieser Ordnungszahl durch Transformation auseinander entstehen, *so kann man die charakteristische Eigenschaft der Gruppe G auch so aussprechen, dass sie nur je eine Untergruppe von der Ordnung* $\pi_1^{\alpha_1} \cdots \pi_s^{\alpha_s}$ *enthält.*

Dass diese Bedingung nicht nur nothwendig, sondern auch hinreichend ist, ersieht man leicht. Wenn nämlich $g_1 \cdots g_s$ invariante Untergruppen sind, so ist es auch das Product von $s - 1$ derselben, das, wie man aus dem isomorphen Producte der γ schliesst, eine Untergruppe der Ordnung $\frac{N}{\pi_i^{\alpha_i}}$ ergiebt.

Aus der Beziehung zur Gruppe Γ folgt noch, dass *wenn d irgend ein Theiler von N ist, die Gruppe G immer eine Untergruppe von der Ordnung d besitzt.*

Ist nun $F(V) = 0$ die der Gleichung $f(x) = 0$ entsprechende reguläre Gleichung, so zerlegt die Resolvente $R_i = 0$ das Polynom $F(V)$ in $\pi_i^{\alpha_i}$ Factoren, deren Grad und Ordnung $\frac{N}{\pi^{\alpha_i}}$; zugleich ent-

scheiden wir, ob eine durch ihre Coefficienten gegebene Gleichung in die betrachtete Klasse gehört, indem wir mit Hülfe symmetrischer Functionen die Gleichungen für $S_{\frac{N}{\pi_i^{\alpha_i}}}$ bilden und untersuchen, ob dieselben je einen irreductibeln Factor vom Grade und von der Ordnung $\pi_i^{\alpha_i}$ besitzen. $(i = 1, 2, \cdots, s)$.

Ist diess der Fall, so lösen die Resolventen

$$R_1 = 0, \quad R_2 = 0, \cdots, R_s = 0$$

unsere Gleichung vollständig auf. Jede derselben zerlegt das Polynom $F(V)$ in $\pi_i^{\alpha_i}$ Factoren $\frac{N}{\pi_i^{\alpha_i}}$ten Grades, so dass

$$F(V) = X_1^{(i)} X_2^{(i)} \cdots X_{\pi_i^{\alpha_i}}^{(i)}$$
$$(i = 1, \cdots, s)$$

wird.

Man erkennt dann leicht, dass die s Gleichungen

$$X_\alpha^{(1)} = 0, \quad X_\beta^{(2)} = 0, \cdots, X_\sigma^{(s)} = 0,$$

wo $\alpha, \beta, \cdots, \sigma$ beliebige Indices sind, nicht mehr als eine Wurzel gemeinsam haben können; denn wenn jede dieser Gleichungen die Wurzeln V_1 und V_2 enthielte, so würde dies bedeuten, dass nach Adjunction jeder einzelnen Gleichung $R_i = 0$, also auch nach Adjunction aller dieser Gleichungen die Gruppe von $F(V) = 0$ eine Substitution enthält, die V_1 mit V_2 vertauscht. Daraus folgt aber, *dass jedes System von Gleichungen, wie*

$$X_\alpha^{(1)} = 0, \quad X_\beta^{(2)} = 0, \cdots, X_\sigma^{(s)} = 0,$$

eine Wurzel der Gleichung $F(V) = 0$, als einzige gemeinschaftliche Wurzel des ganzen Systems bestimmt, die dann nach der Methode des grössten gemeinschaftlichen Theilers gefunden wird.

Da nämlich jede Wurzel von $F(V) = 0$ als gemeinschaftliche Wurzel eines solchen Systems auftreten muss, und jedes System nur eine solche Wurzel giebt, und schliesslich nur $\pi_1^{\alpha_1} \cdots \pi_s^{\alpha_s} = N$ solcher Systeme aufgestellt werden können, muss jedes solche Gleichungssystem eine Wurzel eindeutig bestimmen.

Was schliesslich die Auflösung der Resolventen $R_i = 0$ betrifft, so geschieht dieselbe nach der am Schlusse des vorhergehenden Paragraphen angegebenen Methode.

Eine neue canonische Form von Gruppen binärer Formen.

Von

Franz Meyer in Tübingen.

Der Satz, welchen ich im Folgenden ohne Beweis mittheile und der binnen kurzem in meinem schon bei früherer Gelegenheit angekündigten Buche*) im Zusammenhang dargelegt werden soll, ist bereits am 2. Dec. 1881 von mir in derselben Gestalt Hrn. P. du Bois-Reymond schriftlich mitgetheilt worden, nur die Zusätze von Nr. 7 an sind jetzt neu hinzugekommen. Ich erwähne diesen Umstand, um die ursprüngliche Unabhängigkeit meiner Untersuchungen von den neuesten Arbeiten der Herren Brill und Stephanos darzuthun. In der That war ich bereits vor längerer Zeit zu dem Princip gekommen, dass conjugirte Gruppen binärer Formen dieselben Covarianten haben; und hat sich mir der hier mitzutheilende Satz als ein Ausfluss aus diesem Princip ergeben.

Was die Eintheilung des Folgenden betrifft, so habe ich die Trennung in einen rein algebraischen und einen geometrischen Theil für nützlich gehalten. Jedem der beiden Abschnitte werden einige Definitionen und Sätze vorausgeschickt.

Die angeführten Beispiele des zweiten Abschnitts lassen sich natürlich noch vielfach vermehren.

Den Beweis des Satzes habe ich hauptsächlich deshalb unterdrückt, weil er wegen Zuhülfenahme verschiedener polydimensionaler Begriffe und Anschauungen eine etwas ungefüge Gestalt annehmen würde.

I.

Algebraische Hülfsdefinitionen und Sätze.

1) Unter einer $(d+1)$ gliedrigen „Gruppe“ von Formen versteht man (nach Rosanes) alle linearen Combinationen von $(d+1)$ Formen

$$\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_d. \tag{1}$$

*) Ueber Apolarität und rationale Curven; vgl. diese Ann. Bd. XXI, p. 125.

Es ist im Folgenden (mit einer Ausnahme cf. pag. 437) *nur* von binären Formen gleicher Ordnung (n) die Rede, sodass

$$(2) \qquad \varphi_i(\lambda) \equiv a_{i0}\lambda^n + a_{i1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_{in}.$$

Greife ich aus dem System dieser Gruppe irgend $\varkappa$ ($\varkappa < d+1$) linear unabhängige Formen heraus:

$$(3) \qquad \psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_\varkappa,$$

so bilden diese eine neue $\varkappa$-gliedrige Gruppe (n^{ten} Grades), die eine „*Untergruppe*“ der ersten heissen soll.

2) Zwei binäre Formen heissen (nach Reye) apolar, wenn ihre bilineare Invariante verschwindet. Dann gehört nach Rosanes zu jeder ($d+1$) gliedrigen Gruppe (1) (von binären Formen n^{ter} Ordnung) eine ganz bestimmte zweite ($n-d$) gliedrige Gruppe von binären Formen gleicher Ordnung

$$(4) \qquad \chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_{n-d}$$

von der Art, dass jede Form der einen Gruppe apolar ist zu jeder Form der andern Gruppe.

„Die beiden Gruppen sind hinsichtlich ihrer Combinanten vertauschbar.“*)

3) Unter einer ∞^g Schaar von Grössen versteht man eine solche von der Mannigfaltigkeit g d. h. eine solche, die von g von einander unabhängigen willkürlichen Parametern abhängt. Speciell ∞^0 stellt eine endliche Zahl dar.

Ich behalte das Zeichen ∞^g *auch bei für den Fall, wo g eine negative ganze Zahl ist* $= -g'$. Dann bedeutet eine $\infty^{-g'}$ Schaar von Grössen, dass g' Bedingungen erfüllt sein müssen, damit solche Grössen existiren.

3) Der Satz handelt von den $\varkappa$ gliedrigen Untergruppen einer ($d+1$) gliedrigen Gruppe n^{ten} Grades, die**) μ lineare Factoren mit einander gemein haben

$$(\mu = 1, 2, \ldots, n-1)$$

(d. h. wo alle *Formen* einer solchen Untergruppe diese μ linearen Factoren gemein haben).

I. „*Die Mannigfaltigkeit einer solchen Gruppe ist*

$$(5) \qquad m = \varkappa(d+1-\varkappa) - \mu(\varkappa-1) = \varkappa d - (\varkappa+\mu)(\varkappa-1).“$$

*) cf. Stephanos, Comptes Rendus 1882; Brill, diese Annalen XX, p. 335, (wo auch Formen mit mehr Veränderlichen betrachtet sind); Cap. I meines wiederholt in Aussicht gestellten Buches.

**) Die vier Zahlen $n, d, \varkappa, \mu$ sind also, abgesehen von den evidenten Ungleichheiten unter ihnen, *unabhängig* von einander.

II.*) *Dann gehört zu einer jeden solchen Gruppe von $\varkappa$ Formen eine Gruppe von*

$$p = \mu - d - 1 + \varkappa \tag{6}$$

Formen, die eine Untergruppe der $(n - d)$ gliedrigen zur gegebenen $(d + 1)$ gliedrigen Gruppe apolaren Gruppe darstellt und folgende Eigenschaft besitzt:

Jede Form dieser p gliedrigen Untergruppe lässt sich in die canonische Form bringen:

$$\sum_1^{\mu} x_i(\lambda - \delta_i)^n. \tag{7}$$

Dabei sind die Grössen δ immer dieselben und zwar eben die Wurzeln der oben erwähnten gemeinsamen Factoren

$$„\lambda - \delta_1“, \; „\lambda - \delta_2“, \; \ldots, \; \lambda - \delta_\mu“,$$

wo die δ als ungleich vorausgesetzt werden.“

Damit ist das Problem der Auffindung solcher gemeinsamen Factoren auf ein Problem der Canonizirung von binären Formen, spec. ihrer Darstellung als Summen von n^{ten} Potenzen reducirt.

II.

Geometrische Bedeutung dieses Satzes.

4. Dieselbe umfasst eine der allgemeinsten Fragen, die man bei rationalen Curven stellen kann.

Es werden wieder vorausgeschickt einige:

Geometrische Hülfs-Definitionen und Sätze.

1) Das System

$$„\varrho x_i = \varphi_i(\lambda), \qquad (i = 0, 1, \ldots, d)“ \tag{8}$$

stellt eine rationale Curve n^{ter} Ordnung im Raume von d Dimensionen dar. Die ϱx_i sind die homogenen Coordinaten eines Punktes in diesem Raume.

2) Die Gleichung

$$u_x \equiv u_0 x_0 + u_1 x_1 + \cdots + u_d x_d = 0 \tag{9}$$

stellt ein „Lineargebilde“ von $(d - 1)$ Dimensionen dar; $\varkappa$ solcher Gleichungen ein „Lineargebilde“ von $(d - \varkappa)$ Dimensionen $\{d - \varkappa = 0, 1, 2$ entsprechen resp. Punkt, Gerade, Ebene$\}$.

---

*) Der Satz gilt natürlich wegen der Apolarität der auftretenden Formen auch *umgekehrt*.

5. *Dann* sagt unser Satz folgendes aus (wo die Zahlen $m, d, k, \mu, \varkappa$ die obigen sind):

I. „Es giebt immer eine ∞^m Schaar von Lineargebilden $(d-k)^{\text{ter}}$ Dimension, die mit der rationalen Curve

$$\varrho x_i = \varphi_i(\lambda), \qquad (i = 0, 1, \ldots, d) \tag{8}$$

μ Punkte gemein haben."

II. [Für jede rationale Curve $\varrho x_i = \varphi_i(\lambda)$ giebt es ein System von $(n-d)$ Gleichungen von der Form

$$a_s \equiv a_0 s_0 + a_1 s_1 + \cdots + a_n s_n = 0 \tag{10}$$

wo die s die elementarsymmetrischen Functionen von n Grössen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sind, die n *solchen* Punkten der Curve zugehören*), die auf einem Lineargebilde $(n-1)^{\text{ter}}$ Dimension $u_x = 0$ liegen. Das System dieser $(n-d)$ Formen a_s kann offenbar auch durch ihre $(n-d)$ gliedrige Gruppe**) ersetzt werden].

„Dann***) enthält diese $(n-d)$ gliedrige Gruppe stets eine $p = \mu - d + 1 + k$ gliedrige Untergruppe, deren sämmtliche Formen in die canonische Gestalt zu bringen sind:

$$\sum_1^{\mu} x_i \Psi(\delta_i) = 0 \quad \text{wo} \quad \Psi(\lambda) \equiv (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\ldots(\lambda - \lambda_n). \tag{11}$$

Die δ sind die obigen, die x_i sind veränderliche Coefficienten."

6. So giebt es beispielsweise eine $\infty^{d+\delta-d\delta}$ Schaar von δ fachen Punkten einer solchen rationalen Curve n^{ter} Ordnung im Raume von d Dimensionen d. h. (nach der früheren Definition):

„Es sind $d\delta - d - \delta$ Bedingungen nöthig, wenn die Curve einen δ fachen Punkt haben soll.

Dann ist

$$p = \delta - 1 \quad \text{etc. etc.}"$$

Ein anderes Beispiel sei gegeben durch eine rationale Raumcurve $(d = 3)$. Diese besitzt $(n > 4)$ immer eine *endliche* Schaar von vierfachen Secanten. Die Aufgabe diese zu finden, ist identisch mit der rein algebraischen Aufgabe:

„Wenn gegeben sind irgend welche $n - 3 = \nu$ binäre Formen n^{ter} Ordnung, aus der $(n-3)$ gliedrigen Gruppe derselben eine zwei-

*) Jedem Punkte der Curve *gehört* bekanntlich *ein* Werth als Argument (Parameter) *zu* und umgekehrt.

**) An dieser Stelle ist also das Wort Gruppe in allgemeinem Sinne (Gruppe von *nicht* binären Formen) genommen.

***) Dieser Satz hätte auch in *rein algebraischer* Ausdrucksweise dem ersten Abschnitt einverleibt werden können.

gliedrige Untergruppe (Involution) von der Art auszuscheiden, dass alle Formen dieser Untergruppe die canonische Form

$$(12) \qquad x_1(\lambda-\delta_1)^n + x_2(\lambda-\delta_2)^n + x_3(\lambda-\delta_3)^n + x_4(\lambda-\delta_4)^n$$

annehmen, wo die δ für alle Formen dieser Untergruppe dieselben sind.

Die Zahl dieser Punktquadrupel (Werthquadrupel)

$$(\delta_1\,\delta_2\,\delta_3\,\delta_4)$$

ergiebt unmittelbar die Zahl der vierfachen Secanten.

7. Das letzte Beispiel gewinnt aber erst seine Wichtigkeit durch Umkehrung, indem man die gesuchten Zahlen geometrisch auf ganz anderem Wege bestimmt. Wendet man die von Salmon (Raumgeometrie III. Aufl. p. 302) gegebene Formel für die vierfachen Secanten einer Raumcurve auf rationale Curven an, so erhält man nach einiger Rechnung den Satz:

„Die Anzahl der vierfachen Secanten einer rationalen Raumcurve ($d = 3$) n^{ter} Ordnung ist

$$(13) \qquad \frac{(n-2)(n-3)}{1\cdot 2}\cdot\frac{(n-3)(n-4)}{2\cdot 3}\text{,“}$$

Daraus folgt mit Hülfe des Obigen der Satz:

„In einer allgemeinen Gruppe von ν binären Formen der Ordnung $n = \nu + 3$ giebt es:

$$(14) \qquad s = \frac{(\nu+1)\nu}{1\cdot 2}\cdot\frac{\nu(\nu-1)}{2\cdot 3}$$

Involutionen $f + k\varphi$, wo f, φ gleichzeitig in die canonische Form

$$(12) \quad \begin{cases} f = a_1{}^*(\lambda-\delta_{s1})^n + a_2(\lambda-\delta_{s2})^n + a_3(\lambda-\delta_{s3})^n + a_4(\lambda-\delta_{s4})^n, \\ \varphi = b_1(\lambda-\delta_{s1})^n + b_2(\lambda-\delta_{s2})^n + b_3(\lambda-\delta_{s3})^n + b_4(\lambda-\delta_{s4})^n, \end{cases}$$

gebracht werden können.“

8. Geht man einen Schritt rückwärts zu den *ebenen* rationalen Curven, die ja bekanntlich, wenn sie von der Ordnung n,

$$(16) \qquad \delta = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

Doppelpunkte besitzen, so erhält man in gleicher Weise:

„In einer allgemeinen Gruppe von ν binären Formen der Ordnung $n = \nu + 2$ giebt es

$$(17) \qquad \sigma = \frac{\nu(\nu+1)}{1\cdot 2}$$

---

*) Die Coefficienten a, b sind natürlich für jede der Involutionen auch wieder andere.

Formen f, wo f in die canonische Form

$$f \equiv a_1(\lambda - \delta_{\sigma 1})^n + a_2(\lambda - \delta_{\sigma 2})^n \tag{18}$$

gebracht werden kann."

9. Ich habe die entsprechende Zahl für rationale Raumcurven im Raume von d Dimensionen gefunden und daraus den allgemeinen Satz erhalten:

„In einer allgemeinen Gruppe von ν binären Formen der Ordnung $n = \nu + d$ giebt es

$$D = \frac{(\nu+1)\nu}{1\cdot 2} \cdot \frac{\nu(\nu-1)}{2\cdot 3} \cdot \frac{(\nu-1)(\nu-2)}{3\cdot 4} \cdots \frac{(\nu-d+3)(\nu-d+2)}{(d-1)d} \tag{19}$$

$(d-1)$ gliedrige Untergruppen, von der Art, dass *alle* Formen einer solchen in die canonische Form gebracht werden können

$$a_1(\lambda - \delta_{D,1})^n + a_2 - \delta_{D,2})^n + \cdots + a_{2(d-1)}(\lambda - \delta_{D,2(d-1)})^n \text{"}. \tag{20}$$

10. Zieht man in gleicher Weise die dreifachen Secanten der rationalen Raumcurven ($d = 4$) in Betracht, so erhält man, wie ich gefunden habe, Folgendes:

„In einer allgemeinen Gruppe von ν binären Formen der Ordnung $n = \nu + 4$ giebt es

$$E = \frac{(\nu+2)(\nu+1)\nu}{1\cdot 2\cdot 3} \tag{21}$$

Formen, die in die Gestalt gebracht werden können:

$$a_1(\lambda - \delta_{E1})^n + a_2(\lambda - \delta_{E2})^n + a_3(\lambda - \delta_{E3})^n \text{"}. \tag{22}$$

„In einer allgemeinen Gruppe von ν binären Formen der Ordnung $n = \nu + 6$ giebt es

$$\eta = \frac{(\nu+3)(\nu+2)(\nu+1)\nu}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} \tag{23}$$

Formen der Gestalt:

$$a_1(\lambda - \delta_{\eta_1})^n + a_2(\lambda - \delta_{\eta_2})^n + a_3(\lambda - \delta_{\eta_3})^n + a_4(\lambda - \delta_{\eta_4})^n \text{"} \tag{24}$$

etc. etc.

Indessen mag die allgemeinste Anzahl für jede Art dieser Canonization noch dahin gestellt sein.

11. Dagegen mag eine andere Art von Sätzen noch durch ein Beispiel angedeutet werden.

Untersucht man die specielle Classe von *ebenen* rationalen Curven n^{ter} Ordnung mit $(n-1)$ fachem Punkt, so ergiebt sich:

„Enthält eine Gruppe von 3 binären Formen n^{ter} Ordnung eine Involution n^{ten} Grades mit *festen* $(n-1)$ linearen Factoren, so kann man die zur Gruppe apolare Gruppe von $(n-2)$ Formen linear zusam-

mensetzen aus den $(n-3)^{\text{ten}}$ Differentialquotienten einer Form vom Grade $2n-3$, d. h. die apolare Gruppe lässt sich mit Benutzung der Gordan'schen Bezeichnung*) in die Gestalt bringen:

$$a_{\lambda^n \mu_1 \mu_2 \dots \mu_{n-3}} \tag{25}$$

wo $\mu_1 \mu_2 \dots \mu_{n-3}$ variable Werthe vorstellen.

Eine weitere Reihe von Sätzen, die ich übergehe, habe ich erhalten durch das Hereinziehen der ternären und quaternären Apolarität; alle entspringen unserem Hauptsatze.

Tübingen, 11. October 1882.

*) Gordan, Erlanger Programm 1875.

Ein Satz über lineare Identitäten zwischen Quadraten binärer Formen.

Von

FRANZ MEYER in Tübingen.

1. Herr Brill hat in seinem Aufsatze: „Ueber binäre Formen' und die Gleichung sechsten Grades" (diese Annalen, Bd. XX, p. 354 folgenden Satz aufgestellt:

„Zu drei gegebenen binären Formen zweiten Grades gehört stets eine einzige vierte solche Form, so dass nicht nur zwischen diesen vier Formen (wie bekannt) sondern auch zwischen ihren Quadraten eine lineare Identität herrscht."

Seien also die gegebenen Formen φ_1, φ_2, φ_3; die vierte φ_4, so sind die fraglichen Identitäten von der Form:

$$a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2 + a_3\varphi_3 + a_4\varphi_4 \equiv 0,$$
$$b_1\varphi_1^2 + b_2\varphi_2^2 + b_3\varphi_3^2 + b_4\varphi_4^2 \equiv 0,$$

wo sowohl die Verhältnisse der Coefficienten b (und der a), als die Wurzeln der vierten Form φ_4 eindeutig bestimmt sind.

Herr Brill giebt auch eine geometrische Erklärung dieses Satzes (vgl. seine neueste Note „über das Polvierseit", diese Annalen Bd. XX), berücksichtigt die Ausnahmen, für die er versagt, und stellt nähere Beziehungen (Identitäten) zwischen den vier Formen und ihren sechs Functionaldeterminanten auf.

Dieser Satz möge im Folgenden ausgedehnt werden, ohne auf die auftretenden Ausnahmen, sowie weitere aus ihm entspringende Beziehungen zunächst einzugehen.

2. Die gemeinte Erweiterung lautet:

„Durch $(d+1)$ binäre Formen d^{ten} Grades sind im Allgemeinen $2^d - (d+1) = \delta$ weitere solche Formen in eindeutiger Weise bestimmt von der Art, dass nicht nur zwischen den sämmtlichen 2^d Formen (wie bekannt), sondern auch zwischen ihren Quadraten δ lineare Identitäten stattfinden."

Die Beweismethode erhellt vollständig aus der Durchführung des (an den von Herrn Brill behandelten sich zunächst anschliessenden) Falles $d = 3$.

Sind also vier binäre cubische Formen gegeben:

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \tag{1}$$

so bilden wir aus ihren Quadraten eine „viergliedrige Gruppe sechsten Grades":

(2) $$\varkappa_1 \varphi_1^2 + \varkappa_2 \varphi_2^2 + \varkappa_3 \varphi_3^2 + \varkappa_4 \varphi_4^2$$

wo mit den $\varkappa$ variable Coefficienten bezeichnet sind.

Statt dessen substituiren wir aber vorerst eine allgemeinere solche „Gruppe“:

(3) $$\nu_1 \chi_1 + \nu_2 \chi_2 + \nu_3 \chi_3 + \nu_4 \chi_4$$

wo die ν wieder variabel, die χ vier beliebige binäre Formen sechsten Grades vorstellen.

Von einer solchen Gruppe (3) gilt folgender Satz (der sich in allgemeinster Weise für irgend welche binäre Gruppen im ersten Capitel meines unter der Presse befindlichen Buches, auf welches schon wiederholt Bezug genommen wurde, ausgesprochen findet):

„Soll ein System von sechs Werthen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_6$ das Wurzelsystem einer Form der Gruppe (3) *sein, so sind dazu folgende drei Bedingungen nothwendig und hinreichend:*

(4) $$\begin{cases} a_s \equiv a_0 s_0 + a_1 s_1 + a_2 s_2 + a_3 s_3 + a_4 s_4 + a_5 s_5 + a_6 s_6 = 0, \\ b_s \equiv b_0 s_0 + b_1 s_1 + b_2 s_2 + b_3 s_3 + b_4 s_4 + b_5 s_5 + b_6 s_6 = 0, \\ c_s \equiv c_0 s_0 + c_1 s_1 + c_2 s_2 + c_3 s_3 + c_4 s_4 + c_5 s_5 + c_6 s_6 = 0, \end{cases}$$

wo die $\frac{s_i}{s_0}$ $(i = 1, 2, , . ., 6)$ *die elementaren symmetrischen Functionen der sechs Werthe* λ *sind.*

(*Die Coefficienten* a, b, c *sind vollständig und eindeutig dadurch bestimmt, dass die drei Formen* a_λ, b_λ, c_λ, *die aus* (4) *durch Gleichsetzen aller sechs Werthe,* $= \lambda$, *hervorgehen, die zur Gruppe* (3) (*nach Rosanes*) *conjugirte Gruppe bestimmen*).*)

Suchen wir daher die in der Gruppe (3) enthaltenen vollständigen Quadrate (cubischer Formen), so haben wir nur in (4):

(5) $$\lambda_1 = \lambda_2 = \mu_1; \quad \lambda_3 = \lambda_4 = \mu_2; \quad \lambda_5 = \lambda_6 = \mu_3$$

zu setzen; dann sind die μ die Wurzeln einer solchen cubischen Form.

Dadurch gehen aber (cf. das erste Capitel meines Buches), wie man übrigens leicht verificirt, die Gleichungen (4) über in:

(6) $$\begin{cases} A_0 \sigma_0 + A_1 \sigma_1 + A_2 \sigma_2 + A_3 \sigma_3 = 0, \\ B_0 \sigma_0 + B_1 \sigma_1 + B_2 \sigma_2 + B_3 \sigma_3 = 0, \\ C_0 \sigma_0 + C_1 \sigma_1 + C_2 \sigma_2 + C_3 \sigma_3 = 0, \end{cases}$$

wo z. B. die A**) die Ausdrücke sind:

(7) $$\begin{cases} A_0 \equiv a_0 \sigma_0 + a_1 \sigma_1 + a_2 \sigma_2 + a_3 \sigma_3, \\ A_1 \equiv a_1 \sigma_0 + a_2 \sigma_1 + a_3 \sigma_2 + a_4 \sigma_3, \\ A_2 \equiv a_2 \sigma_0 + a_3 \sigma_1 + a_4 \sigma_2 + a_5 \sigma_3, \\ A_3 \equiv a_3 \sigma_0 + a_4 \sigma_1 + a_5 \sigma_2 + a_6 \sigma_3. \end{cases}$$

*) Cf. Brill, die zuerst citirte Abhandlung.

**) Man kann sie auch bezeichnen als „die dritten Ueberschiebungen der dritten Differentialquotienten (nach zwei homogenen Variabeln λ, μ) der Formen

Dabei bedeuten die $\frac{\sigma_\varkappa}{\sigma_0}$ ($\varkappa = 1, 2, 3$) die elementaren symmetrischen Functionen der drei μ (5).

Die Gleichungen (6) haben aber unmittelbar zur Folge:

„*Jedes der acht Werthsysteme σ, die bekanntlich die Gleichungen* (7) *befriedigen, ist das Coefficientensystem einer cubischen Form:*

$$\psi_i \equiv \lambda^3 \sigma_0^{(i)} - \lambda^2 \sigma_1^{(i)} + \lambda \sigma_2^{(i)} - \sigma_3^{(i)}, \qquad (i = 1, 2, \ldots, 8) \tag{8}$$

deren Quadrat eine der Formen (3) *ist; und zwar sind diese acht Formen die einzigen der Art.*“

Daher kann man die Gruppe (3), anstatt aus den vier Formen χ, auch aus vier der Formen ψ^2 (8) zusammensetzen, wodurch sie in die ursprünglich gegebene Form (2) übergeht. Dann sind aber die vier weiteren Formen ψ durch die Gleichungen (6) bestimmt. Da aber alle acht Formen ψ^2 der Gruppe (3) angehören, so müssen vier lineare Identitäten (d. h. gerade so viele, als unter den Formen ψ selbst) zwischen ihnen herrschen.

Damit ist aber der Satz, (wenn man nur statt vier der ψ resp. φ schreibt) bewiesen.

Ganz analog wird der allgemeine Beweis geführt. Statt der drei Gleichungen (6) erhält man d Gleichungen, die in d Unbekannten quadratisch sind; mithin resultiren daraus 2^d Werthsysteme der Unbekannten, die ihnen genügen.

Und da die Quadrate der so entstehenden 2^d Formen, die den Formen ψ (8) entsprechen, derselben $(d+1)$-gliedrigen Gruppe angehören müssen, so bestehen für sie $2^d - (d+1)$ lineare Identitäten. q. e. d.

3. Geometrisch kann man unserm Satze eine Reihe von Fassungen geben, unter denen ich folgende auswähle, da sie sich unmittelbar an das Gleichungssystem (6) anschliesst. Auch hier wird es genügen, sich auf den Fall $d = 3$ zu beschränken. (cf. die Schlussbemerkung).

Um den Gang des Folgenden nicht zu unterbrechen, schicke ich einige einfache geometrische Definitionen und Sätze voraus (cf. auch meine Note auf pag. 125—137 des gegenwärtigen Annalenbandes).

a) Die Schmiegungsebenen einer cubischen Raumcurve, sowie die Tangentialebenen einer Fläche zweiter Ordnung (Classe) nenne ich kürzer die *Ebenen* der Curve resp. Fläche.

Eine Fläche zweiter Classe, unter deren Ebenen sich die Ebenen einer cubischen Raumcurve befinden, heissen der Curve *umschrieben.* Solcher Flächen giebt es bekanntlich bei gegebener Curve eine Schaarschaar (d. h. eine zweifach unendliche, lineare Schaar).

$a_\lambda, b_\lambda, c_\lambda$ über die Form, deren Wurzeln die drei Werthe μ sind“ oder auch als „diese Differentialquotienten, nach den drei Werthen μ *polarisirt*“ (cf. Gordan, Erlanger Programm, 1875).

b) Nach Reye *stützt* (*trägt*) eine Fläche zweiter Ordnung F_2 eine andere zweiter Classe Φ_2, wenn es ein (und damit unendlich viele) Poltetraeder der ersteren giebt, die der letzteren *umschrieben* sind.

Stützt eine Fläche F_2 die ganze Schaarschaar der einer cubischen Raumcurve umschriebenen (a) Flächen zweiter Classe, so heisse es kürzer, *die Fläche stütze die Curve.*

c) Auf einer cubischen Raumcurve denke man sich in bekannter Weise eine Parametervertheilung ausgebreitet (z. B. mittelst eines Ebenenbüschels, dessen Axe eine Curvensehne ist). Dann gehört jedem Punkte der Curve (und zugleich seiner Ebene) ein bestimmter Werth λ zu und umgekehrt.

Dann ist jeder Punkt des Raumes durch eine cubische binäre Form dargestellt (und umg.), deren Wurzeln λ_1, λ_2, λ_3 den drei Curvenebenen zugehören, die durch den Punkt gehen.*) Daher heisse die Form die *Darstellungsform des Punktes.*

Dann sagt unser Satz Folgendes aus:

„Es liege als gegeben eine beliebige (doch nicht zerfallende und in keiner Ebene liegende) cubische Raumcurve vor.

*Dann sind durch irgend vier gegebene Raumpunkte im Allgemeinen stets vier andere mitbestimmt, die mit den ersten die Grundpunkte eines Netzes***) von Flächen zweiter Ordnung bilden, die alle die gegebene Curve stützen.*

Die acht Darstellungsformen dieser Punkte sind solche, für die unser algebraischer Satz gilt.“

Der Beweis gestaltet sich so.

Man kann bekanntlich (cf. Salmon, l. c.) bei passender Wahl des Coordinatentetraeders eine beliebig gegebene cubische Raumcurve darstellen durch:***)

$$(9) \qquad \tau u_0 = \lambda^3, \quad \tau u_1 = -\lambda^2, \quad \tau u_2 = \lambda, \quad \tau u_3 = -1$$

wo die τu_i Ebenencoordinaten und λ der bewegliche Parameter ist. Dann lässt sich die Schaarschaar der der Curve umschriebenen Flächen zweiter Classe sofort hinschreiben:

*) Cf. z. B. Salmon, Raumgeom. p. 120; Sturm, die Darstellung binärer Formen auf der cubischen Raumcurve, Crelle Bd. 86; Cap. II, Abschn. I meines Buches.

**) Ein solches Flächennetz zweiter Ordnung beansprucht in den Untersuchungen meiner citirten Note eine hervorragende Wichtigkeit. Für jede Fläche desselben giebt es (einfach) unendlich viele Poltetraeder, die der Raumcurve umschrieben sind. Ist die Fläche etwa durch die erste der Gleichungen (6) dargestellt, so trifft sie die Curve im Punktsextupel a_λ. Dann bilden die eben bezeichneten Tetraeder auf der Curve (als Classencurve) eine Involution vierten Grades, die zu der Gruppe der zweiten Differentialquotienten von a_λ conjugirt ist.

***) Die angegebene Form ist auch desshalb so gewählt, weil für sie die homogenen Coordinaten eines Raumpunktes mit den in den Gleichungen (6) auftretenden Grössen σ ganz *identisch* sind.

(10) $\nu_0(u_0u_2-u_1^2)+\nu_1(u_0u_3-u_1u_2)+\nu_2(u_1u_3-u_2^2)=0$

bei veränderlichen ν.

Da nun die Bedingung, dass eine Fläche zweiter Ordnung:

(11) $a_x^2 \equiv \Sigma\Sigma a_{ik}x_ix_k = 0, \qquad (i, k = 0, 1, 2, 3)$

eine andere zweiter Classe:

(12) $u_a^2 \equiv \Sigma\Sigma a_{ik}u_iu_k$

trägt, nach Hesse gegeben ist durch:

(13) $(a\alpha)^2 \equiv \Sigma\Sigma a_{ik}\alpha_{ik} = 0,$

so folgt sofort, dass die Fläche (11) die ganze Schaarschaar (10) unter den Bedingungen trägt:

(14) $a_{02} = a_{11}, \quad a_{03} = a_{12}, \quad a_{13} = a_{22},$

Dies sind aber auch, wie man sich leicht überzeugt, die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen, unter denen die Gleichung einer Fläche zweiter Ordnung (11) *die Form der Gleichungen* (6) *annimmt.*

Damit ist der geometrische Theil unseres Satzes erwiesen.

Für die *Ebene* spricht sich der Satz also, wenn man analog unter der (quadratischen) Darstellungsform eines Punktes diejenige versteht, deren Wurzeln als Parameter den zwei Tangenten eines festen Kegelschnitts (auf dem eine Parametervertheilung wie in (c) ausgebreitet ist) zugehören, die vom Punkte an ihn gehen, folgendermassen aus:

*„Als gegeben liege in einer Ebene ein beliebiger (aber nicht zerfallender) Kegelschnitt vor. Dann ist durch drei Punkte der Ebene stets**) *ein vierter in der Weise bestimmt, dass er mit den drei ersten die Grundpunkte eines Büschels von Kegelschnitten bildet, die alle den festen Kegelschnitt tragen.*

Zwischen den Quadraten der bezüglichen vier Darstellungsformen findet eine lineare Identität statt."

Diese Erklärung kann man mit Hülfe einiger (in meinem Buche, Cap. II entwickelten) Sätze ohne Mühe in die von Herrn Brill (l. c.) gegebene**) überführen, was jedoch hier nicht näher ausgeführt werden soll.

Der Beweis und Ausspruch des Satzes für den allgemeinen Fall ist dem oben Gegebenen ganz analog: wir unterdrücken beide aber um so lieber, weil sich der Mangel einer geeigneten n-dimensionalen Sprache dabei sehr fühlbar machen würde.

Tübingen, den 1. December 1882.

---

*) Abgesehen von den von Herrn Brill l. c. angegebenen Ausnahmen.

**) Auf die Figur des Brill'schen Polvierseits ist auch Herr S. Kantor auf ganz anderem Wege gekommen; cf. seine Mittheilung; diese Ann. XXI, Heft 2. (Nachträgliche Bemerkung).

Ueber den integrirenden Factor der elliptischen Differentialgleichung.

Von

Rud. Sturm in Münster i./W.

In den „Principien der Flächentheorie“*) giebt in § 54 Herr R. Hoppe zu der Differentialgleichung:

$$\frac{dx}{\sqrt{(x-a)(x-b)(x-c)}} \pm \frac{dy}{\sqrt{(y-a)(y-b)(y-c)}} = 0,$$

welcher dort die Haupttangentencurven der Flächen 2. Grades zu genügen haben, ohne weitere Begründung oder ein Citat die Integralgleichung:

$$\frac{x \mp y}{\sqrt{(x-a)(y-b)(y-c)} \mp \sqrt{(y-a)(x-b)(x-c)}} = \text{const.};$$

sie ergiebt sich „nach dem Additionstheoreme der elliptischen Functionen, welches sich nach Lagrange's Methode hier besonders einfach herleiten lässt.“

Ich konnte den Zusammenhang mit der bekannten Form der Lagrange'schen Integralgleichung nicht gleich finden und versuchte eine directe Verification und zwar gleich bei dem allgemeinen Falle des Polynoms 4. Grades. Dabei ergab sich, dass *die elliptische Differentialgleichung direct vermittelst eines integrirenden Factors integrirt werden kann.*

Bekannt ist es ja, dass, wenn die Differentialgleichung die specielle Form hat:

$$\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \pm \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2x^2)}} = 0,$$

die Integration mit Hülfe eines integrirenden Factors vollzogen werden kann. Liouville hat in den hinterlassenen Papieren von Charles

*) Grunert-Hoppe's Archiv, Theil 59 S. 225.

Sturm diese Methode gefunden und weil sonst immer sorgfältig bei Entlehnungen aus andern Schriftstellern der Name mitgetheilt war, hier sich aber kein Namen fand, dieselbe in den Comptes rendus Bd. 42 (1856) S. 988, als Sturm's Methode veröffentlicht, und so wird sie seitdem meistens bezeichnet; obgleich bald darauf Liouville aus einem vorgefundenen Schreiben Sturm's an einen seiner Schüler, Despeyrous in Dijon, aus dem Jahre 1849 bemerkte, dass Sturm sich die Methode aus einem ihm von diesem übersandten Aufsatze ausgezogen habe, und dies in demselben Bande der Comptes rendus S. 1087 am Schlusse einer einen andern Gegenstand behandelnden Note mittheilte und zugleich auch die erste Note, nun aber mit der Ueberschrift: „Sur les fonctions elliptiques. Note rédigée par M. Sturm d'après un mémoire de M. Despeyrous", in seinem Journal Serie II t. I (1856) S. 231 abdrucken liess. Der Aufsatz von Despeyrous selbst befindet sich nicht, wie Liouville sagt, in den Mémoires der Academie von Dijon, sondern, wie Herr Enneper, dem ich für diese literarischen Notizen über Despeyrous, sowie auch über die späteren zu grossem Danke verpflichtet bin, gefunden hat, in den Mémoires de l'Académie des Sciences, Inscriptions et Belles-Lettres de Toulouse, sér. VII t. V S. 211; Despeyrous giebt noch das Integral in zwei andern Formen, die er auf directe Weise darstellt, und leitet dann aus ihnen die Additionstheoreme für Sinus, Cosinus, Delta amplitudinis her. Seitdem haben sich noch mit dem integrirenden Factor der speciellen elliptischen Differentialgleichung beschäftigt: Herr Schröter (Schlömilch's Zeitschrift Bd. 17 S. 508, 1872), sodann, wie mir auch Herr Enneper mitgetheilt hat, Herr Catalan (Comptes rendus Bd. 78 (1874) S. 1479; Bulletin de l'Académie de Belgique, sér. II t. XXVII (1869) S. 145) und Herr Much (Schlömilch's Zeitschrift Bd. 26 (1881) S. 333).

Die Behandlung der speciellen elliptischen Differentialgleichung mit Hülfe des integrirenden Factors war mir seit langem bekannt; noch nirgends aber hatte ich gelesen, dass auch die linke Seite der allgemeinen Gleichung mit Hülfe eines solchen integrabel gemacht werden kann.

Bedeutet, wie üblich, X das Polynom 4^{ten} Grades $A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 = E(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$ und Y dieselbe Function von y, bezeichnen wir ferner die Producte von zwei der linearen Factoren $(x-a)(x-b), \cdots, (y-a)(y-b), \cdots$ mit $X_{ab}, \cdots, Y_{ab}, \cdots$, so wird die linke Seite der Differentialgleichung:

$$\frac{dx}{\sqrt{X}} \pm \frac{dy}{\sqrt{Y}} = 0$$

durch Multiplication mit:

$$\frac{1}{(x-y)^2}\left\{\left[\tfrac{1}{2}(x+y)(a+b)-xy-ab\right]\sqrt{X_{cd}Y_{cd}}\right.$$
$$\left.\mp\left[\tfrac{1}{2}(x+y)(c+d)-xy-cd\right]\sqrt{X_{ab}Y_{ab}}\right\}$$

zum vollständigen Differential und zwar von:

$$\frac{1}{x-y}\left\{\sqrt{X_{ab}Y_{cd}}\mp\sqrt{X_{cd}Y_{ab}}\right\}.$$

Man hat also im Ganzen drei Formen des integrirenden Factors dieser Art, von denen mindestens einer reell ist.

Bei Herrn Hoppe ist Zähler und Nenner dieses Integrals vertauscht, was eigentlich für seinen Zweck gar nicht nothwendig ist; so dass ich nicht annehmen kann, dass er zu seiner Integralgleichung mit Hülfe des integrirenden Factors gelangt ist: es wäre eben zu wünschen, dass er an dieser Stelle, wie noch an vielen andern, nicht so äusserst knapp wäre und sich nicht des Citirens ganz enthielte. Zu der Integralgleichung:

$$\frac{x-y}{\sqrt{X_{ab}Y_{bc}}-\sqrt{X_{bc}Y_{ad}}}=\text{const.}$$

gelangt man auch, wie ich durch die Güte des Herrn Cayley selbst erfahre, aus einem der Integrale, welche er für die Differentialgleichung mit 3 Veränderlichen:

$$\frac{dx}{\sqrt{X}}+\frac{dy}{\sqrt{Y}}\pm\frac{dz}{\sqrt{Z}}=0$$

mitgetheilt hat*), wenn man darin z constant annimmt, nämlich aus:

$$\sqrt{\frac{a-z}{d-z}}=\frac{\sqrt{(a-b)(a-c)(x-y)}}{\sqrt{X_{ad}Y_{bc}}-\sqrt{Y_{ad}X_{bc}}}\quad\text{(S. 75, Z. 2.).}$$

Es ist auch nicht schwer, von der Integralgleichung:

$$\sqrt{X_{ab}Y_{cd}}-\sqrt{X_{cd}Y_{ab}}=(x-y)\sqrt{q},$$

in der q die Integrationsconstante ist, zu der rationalen Form der Integralgleichung zu gelangen, welche Herr Cayley aus der Lagrange'schen Integralgleichung erhalten hat**). Man erhält zunächst durch Rationalmachen:

$$(X_{ab}Y_{cd}-X_{cd}Y_{ab})^2$$
$$+q(x-y)^2\left\{q(x-y)^2-2(X_{ab}Y_{cd}+X_{cd}Y_{ab})\right\}=0;$$

*) Borchardt's Journal, Bd. 87, S. 74.

**) Treatise on Elliptic Fonctions (Cambridge 1876) S. 340.

nach Entfernung von X_{ab} etc. und Unterdrückung von $(x-y)^2$ ergiebt sich:

$$\{(c+d-a-b)\,xy+(cd-ab)\,(x+y)+(a+b)\,cd-(c+d)\,ab\}^2$$
$$+q^2(x-y)^2-2q\Big[2x^2y^2+\frac{D}{E}\,xy(x+y)+(ab+cd)\,(x^2+y^2)$$
$$+2(a+b)\,(c+d)\,xy+\frac{B}{E}\,(x+y)+2\frac{A}{E}\Big]=0;$$

wird nun eine neue Constante Δ (bei Cayley C) eingeführt vermittelst der Gleichung:

$$q=\frac{\Delta}{E}-(a+b)\,(c+d),$$

so hat man die Cayley'sche rationale symmetrische in Bezug auf jede Variable quadratische Gleichung

$$\mathfrak{a}+2\mathfrak{h}(x+y)+4\mathfrak{b}xy+\mathfrak{g}(x^2+y^2)+2\mathfrak{f}xy(x+y)+\mathfrak{c}x^2y^2=0,$$

wo

$$\mathfrak{a}=B^2-4A\Delta,\quad \mathfrak{b}=-2AE-\tfrac{1}{2}BD+\tfrac{1}{2}C^2-\tfrac{1}{2}\Delta^2,$$
$$\mathfrak{c}=D^2-4E\Delta,\quad \mathfrak{f}=CD-2BE-D\Delta,\quad \mathfrak{g}=-4AE+C^2-2C\Delta+\Delta^2,$$
$$\mathfrak{h}=BC-2AD-B\Delta.$$ —

Nun aber ist es Herrn Enneper bei seiner ausgezeichneten Kenntniss der Literatur über elliptische Functionen gelungen, *bei Euler eine Stelle nachzuweisen, in der dieser einen integrirenden Factor der allgemeinen elliptischen Differentialgleichung gefunden hat.* Alles Folgende verdanke ich der Güte des Herrn Enneper, der mir umfangreiches literarisches Material übersandte, insbesondere aber, als ich ihm mittheilte, dass ich hier den vierten Band der Institutiones calculi integralis nicht zur Verfügung habe, die Liebenswürdigkeit gehabt hat, die betreffende Stelle aus demselben mir abzuschreiben.

Im Allgemeinen bekannt ist wohl*), dass die ersten Untersuchungen Euler's über die Integration der elliptischen Differentialgleichung sich in Bd. VI, VII der Novi Commentarii der Petersburger Akademie befinden. Dann gelang es Lagrange, seine Integralgleichung zu finden (Lagrange's Werke Bd. II, S. 17; 78, 83). Der erstere Aufsatz (ursprünglich in den Miscellanea Taurinensia Bd. IV enthalten) erregte Euler's hohe Bewunderung. Er griff das Problem selbst von neuem an, vereinfachte den ziemlich complicirten Weg, den Lagrange eingeschlagen hatte, und Lagrange hat nachher in der

*) Man vergleiche auch Herrn Enneper's Elliptische Functionen, besonders § 23.

spätern Darstellung in der Théorie des fonctions analytiques*) die Euler'sche Vereinfachung adoptirt. Ehe Euler Lagrange's Integralgleichung einfacher ableitet, nimmt er eine directe Verification vor. Seine Untersuchungen finden sich ursprünglich in den Acta der Petersburger Akademie für 1778 (Tomus II) Pars prior (Petropoli 1780) S. 20 in dem Aufsatze: Dilucidationes super methodo elegantissima, qua illustris de la Grange usus est in integranda aequatione differentiali $\frac{dx}{\sqrt{X}} = \frac{dy}{\sqrt{Y}}$; wieder abgedruckt ist derselbe im vierten Bande der Institutiones calculi integralis**) S. 465 der Ausgabe von 1847 (Supplementum VIII); § 1—8 bringt die Verification, § 35—38 die einfachere Ableitung.

Die Lagrange'sche Integralgleichung der Gleichung:

$$\frac{dx}{\sqrt{X}} \pm \frac{dy}{\sqrt{Y}} = 0 \quad (1)$$***)

ist bekanntlich:

$$\left(\frac{\sqrt{X} \mp \sqrt{Y}}{x - y}\right)^2 = \Delta + D(x + y) + E(x + y)^2, \quad (2)$$

worin Δ die Integrationsconstante ist.

Wird differenzirt, so ergiebt sich als Coefficient von $\frac{dx}{\sqrt{X}}$:

$$-\frac{N\sqrt{X} \mp M\sqrt{Y}}{(x - y)^3},$$

und als Coefficient von $\pm \frac{dy}{\sqrt{Y}}$ dieselbe Grösse; also führt die Differentiation zu:

$$\left(\frac{dx}{\sqrt{X}} \pm \frac{dy}{\sqrt{Y}}\right) \frac{N\sqrt{X} \mp M\sqrt{Y}}{(x - y)^3} = 0;$$

*) Freilich finde ich in der mir zur Verfügung stehenden Ausgabe der Théorie (Paris, de l'imprimerie de la république, an V) Euler von Lagrange nicht erwähnt. Die genannte Ausgabe scheint die wenigst correcte zu sein; sie lässt bei Aufsuchung von Citaten stets im Stiche; eine zweite erschien 1813, und nun bilden die Fonctions analytiques den Bd. IX der von J. A. Serret herausgegebenen Werke von Lagrange.

**) Herr Enneper, welchem die vorzügliche Göttinger Bibliothek zur Verfügung steht, hat die drei Auflagen der Institutiones calculi integralis genauer eingesehen, und da die Bibliographien und Encyclopädien vielfach incorrect sind, so ist vielleicht folgende Notiz, die ich ihm verdanke, nicht überflüssig: Die von Euler besorgte Auflage — die mir nur allein zur Verfügung steht — erschien 1765—70 und hat drei Bände; dann erschien 1792—94 eine Editio altera et correctior in vier Bänden; endlich die Editio tertia vol. I—III, 1824—1827, vol. IV, 1847 (auf Kosten der Petersburger Akademie). Die ersten 3 Bände sind in allen 3 Auflagen identisch, der vierte Band enthält noch nicht oder in den Schriften der Akademie veröffentlichte Zusätze zu jenen.

***) Euler hat nur das untere Vorzeichen.

hierin ist:

$$(3) \qquad M = 4X + (y - x)\,X', \quad N = 4Y + (x - y)\,Y',$$

wobei X', Y' die Ableitungen sind.

Demnach wird durch die Integralgleichung (2) in der That die Differentialgleichung (1) befriedigt. Soweit Euler.

Dass

$$(4) \qquad H = \frac{N\sqrt{X} \mp M\sqrt{Y}}{(x-y)^3}$$

ein integrirender Factor ist, spricht er nicht direct aus; aber dass er sich dessen bewusst geworden, geht aus der Einleitung des Aufsatzes zweifellos hervor.

Den Zusammenhang zwischen diesem Factor und dem oben von mir angegebenen hat Herr Enneper ebenfalls ermittelt.

Wir nehmen, was ja keine Veränderung in (1) hervorbringt, $E = 1$ an. Eins der Glieder von $(y - x)\,X'$ ist $(y - x)\,(x - b) \cdot (x - c)\,(x - d)$, was wir umwandeln können in $(y - a)\,(x - b) \cdot (x - c)\,(x - d) - X$, indem wir setzen $y - x = y - a - (x - a)$; durch diese und die analogen Umformungen ergiebt sich:

$$\begin{aligned} M &= [(x - a)\,(y - b) + (x - b)\,(y - a)]\,X_{cd} \\ &\quad + [(x - c)\,(y - d) + (x - d)\,(y - c)]\,X_{ab}, \\ N &= [(x - a)\,(y - b) + (x - b)\,(y - a)]\,Y_{cd} \\ &\quad + [(x - c)\,(y - d) + (x - d)\,(y - c)]\,Y_{ab}. \end{aligned}$$

Also ist:

$$H = \frac{H_1 \cdot H_2}{(x-y)^3},$$

wo:

$$(5) \qquad \begin{aligned} H_1 &= [(x - a)\,(y - b) + (x - b)\,(y - a)]\sqrt{X_{cd}\,Y_{cd}} \\ &\quad \mp [(x - c)\,(y - d) + (x - d)\,(y - c)]\sqrt{X_{ab}\,Y_{ab}}, \end{aligned}$$

$$(6) \qquad H_2 = \sqrt{X_{ab}\,Y_{cd}} \mp \sqrt{X_{cd}\,Y_{ab}}.$$

Nun ist aber:

$$\begin{aligned} H_2^2 &= X_{ab}\,Y_{cd} + X_{cd}\,Y_{ab} \mp 2\sqrt{XY} \\ &= 2x^2y^2 + Dxy(x + y) + \{C - (a + b)\,(c + d)\}\,(x^2 + y^2) \\ &\qquad + 2(a + b)\,(c + d)\,xy + B(x + y) + 2A \mp 2\sqrt{XY} \\ &= 2x^2y^2 + Dxy(x + y) + C(x^2 + y^2) + B(x + y) + 2A \\ &\qquad \mp 2\sqrt{XY} - (a + b)\,(c + d)\,(x - y)^2 \end{aligned}$$

$$= X + Y \mp 2\sqrt{XY} - D(x+y)(x-y)^2 - (x+y)^2(x-y)^2$$
$$- (a+b)(c+d)(x-y)^2$$
$$= (\sqrt{X} \mp \sqrt{Y})^2 - (x-y)^2\{D(x+y) + (x+y)^2\}$$
$$- (a+b)(c+a)(x-y)^2$$
$$= \{\Delta - (a+b)(c+d)\}(x-y)^2$$

wegen (2).

Demnach ist $\frac{H_2}{x-y}$ eine Constante $\sqrt{\Delta - (a+b)(c+d)}$ *) und kann im integrirenden Factor H unterdrückt werden; es bleibt als einfacherer integrirender Factor:

$$\frac{H_1}{(x-y)^2},$$

der sich von dem meinigen nur durch den numerischen Factor $-\frac{1}{2}$ unterscheidet.

Andererseits leuchtet ein, dass auch:

$$\frac{H_2}{x-y} = \text{const.} \tag{7}$$

eine Integralgleichung von (1) ist; es ist ersichtlich die sich durch meinen integrirenden Factor ergebende. Die Verification nach Euler's Weise ist ebenfalls leicht. Formt man Grössen von der Art $(x-y)\sqrt{\frac{x-b}{x-a}}$, wie sie durch die Differentiation von $\frac{H_2}{x-y}$ sich ergeben, um in $\sqrt{(x-a)(x-b)} - (y-a)\sqrt{\frac{x-b}{x-a}}$, so erhält man, mit Benutzung der Gleichungen für X, Y, H_1:

$$2d \cdot \left(\frac{H_2}{x-y}\right) = \left(\frac{dx}{\sqrt{X}} \pm \frac{dy}{\sqrt{Y}}\right) \cdot \frac{H_1}{(x-y)^2} \cdot -$$

Aus (7) leitet Herr Enneper noch das Additionstheorem für sin am ab, indem er, unter der Voraussetzung, dass a, b, c, d alle reell sind und $a > b > c > d$, setzt:

$$x = \frac{a(b-d) - b(a-d)\sin\text{am}\, u^2}{b-d-(a-d)\sin\text{am}\, u^2}, \quad y = \frac{a(b-d) - b(a-d)\sin\text{am}\, v^2}{b-d-(a-d)\sin\text{am}\, v^2},$$
$$\frac{(b-c)(a-d)}{(a-c)(b-d)} = k^2.$$

Die linke Seite von (7) wird dann:

*) D. i. das obige $\sqrt{q}$.

$$\sqrt{(a-c)(b-d)} - \frac{\operatorname{sin\,am} v \operatorname{cos\,am} u \Delta \operatorname{am} u - \operatorname{sin\,am} u \operatorname{cos\,am} v \Delta \operatorname{am} v}{\operatorname{sin\,am}^2 u - \operatorname{sin\,am}^2 v},$$

oder:

$$- \frac{\sqrt{(a-c)(b-a)}}{\operatorname{sin\,am}(u+v)}.$$

Der weitaus grössere Theil dieser Note rührt von Herrn Enneper her und es ist auf seinen Wunsch geschehen, dass ich die Redaction derselben übernommen habe und dass sie so unter meinem Namen veröffentlicht wird.

Zu erledigen bleibt immer noch die Aufgabe, ähnlich wie es bei der speciellen elliptischen Differentialgleichung geschehen ist, ohne Kenntniss der Integralgleichung den integrirenden Factor zu finden.

Münster i/W., den 25. November 1882.

Bemerkung zur Form algebraischer Integrale linearer Differentialgleichungen.

Von

Leo Königsberger in Wien.

Wenn eine lineare homogene Differentialgleichung

$$(1) \qquad \frac{d^m z}{dx^m} + Y_1 \frac{d^{m-1} z}{dx^{m-1}} + \cdots + Y_m z = 0,$$

in welcher $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$ algebraische Functionen bedeuten, ein algebraisches Integral z_1 besitzt, welches die Lösung einer mit Adjungirung der Grössen $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$ irreductiblen algebraischen Gleichung

$$(2) \quad z^\lambda + f_1(x, Y_1, \ldots, Y_m) z^{\lambda-1} + \cdots + f_\lambda(x, Y_1, \ldots, Y_m) = 0$$

sein mag, so werden bekanntlich alle Lösungen dieser Gleichung Integrale der gegebenen Differentialgleichung sein; nehmen wir daher an, es sei z_1 eine durch algebraische Irrationalitäten darstellbare Function der Coefficienten der Gleichung, welche sich somit nach Abel*) in eine solche Form setzen lässt, dass sich jeder ihrer Theile rational durch die Lösungen der Gleichung (2) ausdrücken lässt, so folgt, dass, wenn ein algebraisches Integral der homogenen Differentialgleichung (1) durch algebraische Irrationalitäten darstellbar ist, dasselbe stets in eine solche Form gebracht werden kann, dass *alle* algebraischen Functionen, aus denen dasselbe zusammengesetzt ist, sich als *rationale* Functionen algebraischer Integrale eben dieser Differentialgleichung ausdrücken lassen.

Ist die gegebene Differentialgleichung nicht homogen, also von der Form

$$(3) \qquad \frac{d^m z}{dx^m} + Y_1 \frac{d^{m-1} z}{dx^{m-1}} + \cdots + Y_m z = y,$$

worin y ebenfalls eine algebraische Function bedeutet, so hat

*) Démonstration de l'impossibilité etc. Oeuvres compl. I.

bekanntlich*) eine solche Differentialgleichung die Eigenschaft, dass, wenn sie überhaupt ein algebraisches Integral besitzt, ihr auch stets ein in den Coefficienten der Differentialgleichung rational ausdrückbares Integral zukommt; sei nun z_1 wieder ein algebraisches Integral der Differentialgleichung (3), welches eine Lösung der mit Adjungirung der Grössen $Y_1, \ldots, Y_m, y$ irreductiblen algebraischen Gleichung

$$(4)\quad z^\lambda + f_1(x, Y_1, \ldots. Y_m, y) z^{\lambda-1} + \cdots + f_\lambda(x, Y_1, \ldots, Y_m, y) = 0$$

sein mag, und werde von dieser angenommen, dass auch sie wieder durch algebraische Irrationalitäten darstellbar sei, so wird, wenn ζ das in den Coefficienten rationale Integral jener Differentialgleichung darstellt, offenbar $z_1 - \zeta$ ein algebraisches, in Irrationalitäten ausdrückbares Integral der reducirten homogenen Differentialgleichung liefern, und da für die Theile dieses der oben ausgesprochene Satz gilt, so erhalten wir das folgende Theorem:

Wenn eine nicht homogene lineare Differentialgleichung mit algebraischen Coefficienten ein durch algebraische Irrationalitäten darstellbares Integral besitzt, so kann man diesem Integrale stets eine solche Form geben, dass sich alle algebraischen Functionen, aus welchen dasselbe zusammengesetzt ist, als rationale Functionen algebraischer Integrale der reducirten Differentialgleichung ausdrücken lassen, von einem durch die Coefficienten der Differentialgleichung rational ausdrückbaren Posten abgesehen, welcher ein rationales Integral der vorgelegten nicht homogenen Differentialgleichung darstellt.

Es mag noch bemerkt werden, dass man auch, ohne den Satz von der Existenz eines rationalen Integrales einer nicht homogenen linearen Differentialgleichung zu Hülfe zu nehmen, unmittelbar mit Hülfe der von Abel aufgestellten Form

$$z_1 = q_0 + p^{\frac{1}{\nu}} + q_2 p^{\frac{2}{\nu}} + \cdots + q_{\nu-1} p^{\frac{\nu-1}{\nu}}$$

leicht aus der bekannten Gestalt der sich für $q_0, p^{\frac{1}{\nu}}, q_2 p^{\frac{2}{\nu}}, \ldots, q_{\nu-1} p^{\frac{\nu-1}{\nu}}$ ergebenden, in den Grössen $z_1, z_2, \ldots, z_\nu$ linearen und mit aus ν^{ten} Einheitswurzeln zusammengesetzten Coefficienten versehenen Ausdrücke eben jenen Satz hätte folgern können, indem nur q_0, ebenso der erste Theil der aufs neue zerlegten Function q_0, u. s. w. Integrale der nicht homogenen Differentialgleichung bleiben, während alle anderen Theile der reducirten Differentialgleichung Genüge leisten, und hieraus geht wiederum der Satz von der Existenz des rationalen Integrales der Differentialgleichung hervor.

*) S. Seite 125 meiner „allg. Untersuchungen aus der Theorie der Differentialgleichungen" Teubner 1882.

Der oben für *homogene* lineare Differentialgleichungen ausgesprochene Satz, welcher nur eine andere Ausdrucksweise für den Abel'schen Satz bildet, gilt offenbar für jede algebraische Differentialgleichung; denn sei

$$(5) \qquad F\left(x, Y_1, \ldots, Y_m, z, \frac{dz}{dx}, \ldots, \frac{d^m z}{dx^m}\right) = 0,$$

worin wieder $Y_1, \ldots, Y_m$ beliebige in der Differentialgleichung vorkommende algebraische Functionen bedeuten, so werden, wenn dieselbe ein algebraisches Integral z_1 besitzt, welches der irreductibeln Gleichung

$$(6) \qquad z^\lambda + f_1(x, Y_1, \ldots, Y_m) z^{\lambda-1} + \cdots + f_\lambda(x, Y_1, \ldots, Y_m) = 0$$

genügt, offenbar alle Lösungen dieser Gleichung die Differentialgleichung (5) befriedigen, da dieselbe durch Einsetzen von $\frac{dz_1}{dx}, \frac{d^2 z_1}{dx^2}, \ldots, \frac{d^m z_1}{dx^m}$ in eine algebraische Gleichung in z_1 übergeht, deren Coefficienten den Charakter derjenigen der Gleichung (6) besitzen; nehmen wir somit wieder an, dass z_1 durch algebraische Irrationalitäten darstellbar ist, so folgt, dass jeder Theil dieses algebraischen Integrales wieder rational durch die algebraischen Integrale eben dieser Differentialgleichung ausgedrückt werden kann.

Wien, im November 1882.

Berichtigung.

S. 322, Anm. Z. 2 v. u. lies ausgeführt statt angewandt.

Ueber die Curven auf der allgemeinen Fläche dritter Ordnung.

Von

Rudolf Sturm in Münster i./W.

Im Folgenden beabsichtige ich vor allem, die Grenzen für das Geschlecht der auf der allgemeinen cubischen Fläche befindlichen Curven gegebener Ordnung, so wie die Zahl der Arten zu untersuchen.

Schicken wir, zur Vergleichung, eine kurze Bemerkung über die Curven auf den Flächen 2. Ordnung voraus, und ebenso werden, im Anhange, zwei specielle Flächen 4. Ordnung kurz besprochen werden.

Auf den Flächen 2. Ordnung ist das Geschlecht einer Curve R^n n^{ter} Ordnung, welche den einen Geraden in $\varrho \geqq \frac{n}{2}$, den andern in $n - \varrho$ Punkten begegnet, bekanntlich

$$p = \varrho(n - \varrho) - (n - 1),$$

also am grössten bei geradem n, wenn $\varrho = \frac{n}{2}$, bei ungeradem n, wenn $\varrho = \frac{n+1}{2}$. Jenes entspricht dem vollen Schnitte der F^2 mit einer $F^{\frac{n}{2}}$, dieses dem durch eine Gerade zum vollen Schnitte ergänzten Schnitte mit einer $F^{\frac{n+1}{2}}$. *Das Maximalgeschlecht ist* in beiden Fällen

$$\left[\frac{1}{4}(n-2)^2\right],$$

wenn, in der üblichen Weise, hierdurch die ganze in $\frac{1}{4}(n-2)^2$ enthaltene Zahl ausgedrückt wird. Das nächste Geschlecht unter dem Maximum ist um 1, 2 kleiner als dasselbe bei n gerade, ungerade. Im Allgemeinen bewegt sich das Geschlecht sprungweise. Das niedrigste Geschlecht ist 0, welches sich, wie nothwendig, bei $\varrho = n - 1$ ergiebt, und das nächst höhere erst $n - 3$, bei $\varrho = n - 2$.

Die Mannigfaltigkeit oder Mächtigkeit, d. i. der Grad der Unendlichkeit, in der die Curve auf der F^2 auftritt, *ist bekanntlich:*

$$t_2 = \varrho(n-\varrho) + n = p + 2n - 1.$$

Die Zahl der Arten ist

$$\left[\frac{n}{2}\right].$$ —*)

Gehen wir nun zu der Oberfläche 3. Ordnung.

I.

Das meist getroffene Dupel von zwei windschiefen Geraden der Fläche.

1. *Zwei windschiefe Geraden g, g', der cubischen Fläche* — ein „Dupel" nach der von mir in meinen „Flächen 3. Ordnung" (Leipzig 1867) benutzten Benennung — *werden bekanntlich von fünf andern gegen einander windschiefen Geraden l_1, l_2, l_3, l_4, l_5 getroffen.***)

Eine Curve n^{ter} Ordnung R^n auf der Fläche (ohne vielfache Punkte) *begegne den beiden Geraden g, g' bez. in s, s' und den fünf Geraden $l_1, \ldots, l_5$ bez. in q_1, q_2, q_3, q_4, q_5 Punkten.*

Setzen wir gleich fest, dass dies auch die Grössen-Reihenfolge der q_i sei, so dass:

$$q_1 \geq q_2 \geq q_3 > q_4 \geq q_5 \geq 0;$$

ebenso, dass:

$$s \geq s'.$$

Eine Gerade, welche an R^n, g, g' hingleitet, erzeugt eine windschiefe Fläche vom Grade $2n - (s + s')$, für welche g, g' bez. $(n - s')$-, $(n - s)$-fache Leitgeraden, die l_i aber q_i-fache Erzeugende sind. Da im Allgemeinen jede Erzeugende der R^n einmal begegnet, so hat R^n *dasselbe Geschlecht* wie diese Fläche, oder auch ein ebener Schnitt derselben, *nämlich:*

$$p = \tfrac{1}{2}[2n - (s+s') - 1] \cdot [2n - (s+s') - 2] - \tfrac{1}{2}(n-s)(n-s-1)$$
$$- \tfrac{1}{2}(n-s')(n-s'-1) - \tfrac{1}{2}\Sigma q_i(q_i-1)$$
$$= (n-s-1)(n-s'-1) - \tfrac{1}{2}\Sigma q_i(q_i-1).$$

Ferner bilden g, g', die l_i und R^n die volle Schnittcurve der Regelfläche mit F^3; demnach *erhalten wir die für das Folgende werthvolle Relation:*

$$3n = 2(s+s') + \Sigma q_i;$$

welche sich auch in anderer Weise ergiebt:

*) Cf. Plücker, Crelle's Journal Bd. 34; Cayley, Philos. Magaz. Juli 1861; Chasles, Comptes rendus, Bd. 53, S. 985, 1077, 1203; P. H. Schoote, omtrent Ruimtekrommen, Versl. en Mededel. der Akad. van Wetensch. 2te Reihe, 14. Theil.

**) Vergl. hierfür und für Nr. 3 a. a. O. Kap. II, Nr. 21 ff.

Eine der beiden Geraden g, g', z. B. g als doppelte, die andere g' als einfache Leitgerade, die fünf Geraden l_i als Erzeugende bestimmen eindeutig eine cubische Regelfläche,*) welche sich mit der F^3 längs der einfachen Leitgeraden berührt, weil sie sich in 5 Punkten dieser Geraden, nämlich den $g'\,l_i$, tangiren, während sie bei einfachem Schnitte sich nur viermal berühren könnten.**) Die sieben Geraden bilden nun den vollen Schnitt beider Flächen, und die $3n$ Schnitte der R^n mit der cubischen Regelfläche, die sich auf sie vertheilen, führen zur obigen Relation.***)

Wir führen aber lieber ν, ν' ein statt s, s' vermittelst:

$$s = n - \nu, \quad s' = n - \nu';$$

also:

$$\nu \leqq \nu';$$

dann lautet die Relation:

$$2(\nu + \nu') = n + \Sigma q_i. \tag{1}$$

Ferner ist die Formel für das Geschlecht von R^n:

$$p = (\nu - 1)(\nu' - 1) - \tfrac{1}{2}\Sigma q_i(q_i - 1),$$

oder, wegen (1):

$$p = \tfrac{1}{2}\{2\nu\nu' - (n-2) - \Sigma q_i^2\}. \tag{2}$$

2. *Die Mannigfaltigkeit t_3 der Curven R^n auf F^3, welche sich in der geschilderten Weise gegen die sieben Geraden verhalten*, ist gleich der der windschiefen Regelflächen vom Grade $\nu + \nu'$, welche diese Geraden in der oben erwähnten Vielfachheit zu Leit-, bez. erzeugenden Geraden haben; also:

$$t_3 = \nu\nu' + \nu + \nu' - \tfrac{1}{2}\Sigma q_i(q_i + 1),$$

oder, wegen (1):

$$t_3 = \tfrac{1}{2}(2\nu\nu' + n - \Sigma q_i^2). \tag{3}$$

Folglich ist:

$$t_3 = p + n - 1,$$

oder, wenn r den Rang der Curve R^n bezeichnet:

$$t_3 = \tfrac{1}{2}r.$$

Weil die Anzahl der Dupel auf F^3 eine endliche ist (216), *so wird*

*) Cremona, Sulle superficie gobbe del terz' ordine Nr. 7 (Atti dell' Istituto Lombardo vol. II, 1861); Em. Weyr, Geometrie der cubischen Regelflächen (Leipzig 1870) S. 139.

**) Cf. meine „Flächen 3. Ordnung" Nr. 60.

***) Cf. Borchardt's Journal Bd. 88, S. 238.

t_3 die Mächtigkeit der Curven R^n auf F^3 sein, welche sich gegen irgend ein Dupel und seine schneidenden Geraden in der erwähnten Weise verhalten.

Da eben jede R^n auf der F^3 eine Regelfläche vom Grade $\nu + \nu'$ hervorruft, welche die g, g', l_i zu ν'-, ν-fachen Leitgeraden, q_i-fachen Erzeugenden hat und diese dann eindeutig in einer festen Ebene eine Curve $(\nu+\nu')^{\text{ter}}$ Ordnung einschneidet, welche in den Spuren jener Geraden ν'-, ν-, q_i-fache Punkte hat, so ist ja klar, dass wir aus so beschaffenen Curven der festen Ebene die Curven auf F^3 in der richtigen Mannigfaltigkeit erhalten; denn auch jede Curve $(\nu + \nu')^{\text{ter}}$ Ordnung in der festen Ebene mit diesen Spuren als Punkten in der genannten Vielfachheit wird eindeutig mit g, g' als Leitlinien eine windschiefe Regelfläche erzeugen und diese in F^3 eine Curve R^n einschneiden, welche sich gegen die g, g', l_i in der beschriebenen Weise verhält.*) Aber vielleicht ist folgende Betrachtung nicht überflüssig.

Es sei in der festen Ebene eine Curve m^{ter} Ordnung C^m gegeben, für welche die Spuren von g, g', l_i bez. i-, i'-, q_i-fache Punkte sind. Sie und g, g' als Leitlinien liefern eine Regelfläche vom Grade $2m-(i+i')$, auf welcher g, g', die l_i resp. $(m-i')$-, $(m-i)$-, q_i-fach sind. Der Restschnitt mit F^3 hat die Ordnung

$$n = 4m - 2(i + i') - \Sigma q_i.$$

Auf g erhält man durch die Punkte, welche je Berührungspunkte der nämlichen Ebene durch g mit den beiden Flächen sind, eine Correspondenz $[m-i, 2(m-i')]$; die $3m - i - 2i'$ Coincidenzen derselben beweisen, dass g so viele Schnittpunkte mit dem gesammten übrigen Schnitte hat, folglich kommen deren auf R^n $3m - i - 2i' - \Sigma q_i$, was unser bisheriges $n - \nu$ ist; also:

$$\nu = m - i,$$

und ebenso:

$$\nu' = m - i'.$$

Die Gerade auf F^3, welche g, l_i zum vollen ebenen Schnitte ergänzt, hat mit der Regelfläche auf g, l_i zusammen $m - i' + q_i$, also auf R^n $m-i-q_i$ Punkte gemein, folglich kommen auf l_i $n-(n-\nu)-(m-i-q_i)=q_i$ Punkte von R^n.

Wenn mithin $\nu = m - i$, $\nu' = m - i'$ ist, so geben die Curven m^{ter} Ordnung der festen Ebene, welche in den genannten Spuren i-, i'-, q_i-fache Punkte haben, auf F^3 Curven derselben Art — d. h. derselben Ordnung und von demselben Verhalten gegen unser Dupel und seine fünf Schneidenden —, wie diejenigen, welche sich aus Curven $(\nu+\nu')^{\text{ter}}$ Ordnung ergeben, die in den Spuren ν'-, ν-, q_i-fache

*) Diese Abbildung ist schon von Clebsch, Math. Ann. Bd. V, S. 419 behandelt; eigentlich ist sie ja schon in der „schiefen Projection" von Steiner, System. Entw. Nr. 59, enthalten.

Punkte haben; aber *im Allgemeinen nicht von gleich hoher Mächtigkeit.* Bei den letzteren fanden wir die Mächtigkeit:

$$\nu\nu' + \nu + \nu' - \tfrac{1}{2}\Sigma q_i(q_i+1);$$

die der Curven m^{ter} Ordnung und der aus ihnen abgeleiteten Curven n^{ter} Ordnung ist:

$$\tfrac{1}{2}m(m+3) - \tfrac{1}{2}i(i+1) - \tfrac{1}{2}i'(i'+1) - \tfrac{1}{2}\Sigma q_i(q_i+1).$$

Zieht man diese Zahl von jener ab, nachdem ν, ν' durch $m-i$, $m-i'$ ersetzt sind, so ergiebt sich:

$$\tfrac{1}{2}\{m-(i+i')\}\cdot\{m-(i+i')+1\},$$

eine Zahl, welche immer ≥ 0 ist.

Z. B. durch Curven 3. Ordnung in der festen Ebene, welche durch die Spuren von g, g' einmal, durch die der l_i gar nicht gehen, erhält man auf F^3 Curven 8. Ordnung, welche die g, g' je sechsmal, keine der l_i treffen, aber nur in siebenfach unendlicher Mannigfaltigkeit, während sie thatsächlich in achtfach unendlicher Mächtigkeit auf F^3 vorhanden sind. (Vgl. Abschnitt V).

3. Wir haben bekanntlich 5 *Gerade auf F^3, welche g treffen und nicht g'; ihre „Schnittzahlen" mit R^n sind offenbar $\nu - q_i$,* weil jede mit g und einer der l_i in einer Ebene sich befindet; *ebenso sind die Schnittzahlen der* 5 *nur g' treffenden Geraden bez. $\nu' - q_i$.* Endlich *die* 10 *übrigen Geraden, welche gegen g, g' windschief sind,* bilden je mit g, g' ein Tripel, dessen zum „Doppeldrei"*) und vollen Schnitt mit einer F^2 ergänzendes Tripel durch 3 Geraden l_i gebildet wird. *Wir haben also die* 10 *Summen von je drei q_i von $\nu + \nu'$ abzuziehen, um die Schnittzahlen dieser Geraden zu erhalten.* Die grösste ist daher:

$$\nu + \nu' - (q_3 + q_4 + q_5),$$

die kleinste:

$$\nu + \nu' - (q_1 + q_2 + q_3).$$

Unter den Dupeln wollen wir nun für jede Curve ein solches aussuchen, dessen zwei Gerade in ihrer Schnittzahl von andern Geraden der F^3 wohl erreicht, aber nicht übertroffen werden, „das meist getroffene Dupel der Curve". Giebt es mehrere gleichartige, dann nimmt man ein beliebiges unter ihnen.

*) Ich bin mir später bewusst geworden, dass ich dies Wort in meinem Buche über die Flächen 3. Ordnung für eine Configuration von Geraden gebraucht habe, die doch nicht analog ist zu der schon vorher von Schläfli Doppelsechs genannten Configuration. Doppeldreien im Schläfli'schen Sinne hat Clebsch (Math. Ann. Bd. 3, S. 75 Anm.) auf der Fläche 5. Ordnung, die eine Curve 5. Ordnung mit dreifachem Punkte zur Doppelcurve hat, gefunden.

Wir machen ein gegebenes Dupel zum meist getroffenen, wenn wir die Bedingung einhalten:

$$q_1 + q_2 \leqq \nu, \tag{4}$$

welche für das Folgende von Bedeutung werden wird.

Es sei, wenn eine bestimmte Curve R^n auf F^3 vorliegt, g die Gerade der Fläche mit der grössten Schnittzahl $n - \nu$, „die meistgetroffene Gerade" (oder eine von ihnen, wenn mehrere mit gleicher Schnittzahl existiren); sodann sei g' diejenige unter den 16 gegen g windschiefen Geraden mit der zweitgrössten (oder gleichen) Schnittzahl $n - \nu'$, so dass $\nu' \geqq \nu$. Also sind nun schon alle 5 Zahlen $\nu' - q_i$ und alle 10 Zahlen $\nu + \nu' - \sum_3 q_i \leqq n - \nu'$, mithin auch

$$\nu + \nu' - (q_3 + q_4 + q_5) \leqq n - \nu',$$

daraus folgt, wegen (1):

$$q_1 + q_2 \leqq \nu;$$

d. i. (4).

Und umgekehrt folgt aus (4), dass die genannten 10 Zahlen alle $\leqq n - \nu'$ sind.

Ferner ergiebt sich aus (4), da $q_1 \geqq q_2 \geqq q_3 \geqq q_4$:

$$q_1 + q_2 + q_3 + q_4 \leqq 2\nu;$$

hieraus aber und aus (1):

$$\nu' - q_5 \leqq n - \nu';$$

nun ist aber $\nu' - q_5$ die grösste der 10 Schnittzahlen der Geraden, welche blos eine der beiden Geraden g, g' treffen; also ist der Beweis für diese geführt, und es bleibt noch derjenige für die 5 Geraden l_i, welche g und g' treffen, übrig.

Setzen wir:

$$\nu + \nu' = \xi, \tag{5}$$

so ergiebt sich:

$$\nu + \nu' = \xi \leqq \tfrac{4}{3} n. \tag{6}$$

Denn aus (1) und (4) erhält man:

$$q_3 + q_4 + q_5 \geqq 2\nu' + \nu - n;$$

aus $q_1 \geqq q_2$ und (4):

$$q_2 \leqq \tfrac{1}{2} \nu;$$

also, da $q_3, q_4, q_5 \leqq q_2$:

$$q_3 + q_4 + q_5 \leqq \tfrac{3}{2} \nu;$$

folglich:

$$\tfrac{3}{2} \nu \geqq 2\nu' + \nu - n,$$

oder:

(7) $$2\nu' < n + \tfrac{1}{2}\nu.$$

Demnach wegen (5):

$$2\zeta - 2\nu \leqq n + \tfrac{1}{2}\nu,$$

oder:

$$2\zeta - n \leqq \tfrac{5}{2}\nu.$$

Nun ist aber, ebenfalls wegen (5) und weil $\nu' \geqq \nu$:

$$\nu \leqq \tfrac{1}{2}\zeta,$$

also:

$$2\zeta - n \leqq \tfrac{5}{4}\zeta,$$

oder:

$$\zeta \leqq \tfrac{4}{3}n.$$

Aus $\nu \leqq \nu'$ und (7) folgt:

$$\nu \leqq \tfrac{1}{2}n + \tfrac{1}{4}\nu,$$

oder:

(8) $$\nu \leqq \tfrac{2}{3}n.$$

Ersetzen wir aber umgekehrt in (7) ν durch ν', so haben wir:

$$2\nu' \leqq n + \tfrac{1}{2}\nu',$$

oder:

(9) $$\nu' \leqq \tfrac{2}{3}n.$$

Also hat ζ die obere Grenze $\left[\frac{4}{3}n\right]$ und beide Summanden ν, ν' haben die obere Grenze $\left[\frac{2}{3}n\right]$

Nachdem diese auch für sich wichtigen Beziehungen (6), (8), (9) erhalten sind, wollen wir nun zeigen, dass die grösste der Zahlen q_i nicht die kleinere der beiden Schnittzahlen der Geraden des meistgetroffenen Dupels übertrifft, also:

$$q_1 \leqq n - \nu'.$$

Wir fanden in (7):

$$\nu' \leqq \tfrac{1}{2}n + \tfrac{1}{4}\nu.$$

Ist nun sogar $\nu' \leqq \frac{1}{2}n$, so ist um so mehr $\nu \leqq \frac{1}{2}n$; ferner auch $n - \nu' \geqq \frac{1}{2}n$; $q_1 \leqq \nu$ wegen (4); folglich:

$$q_1 \leqq n - \nu'.$$

Ist aber $\nu' = \frac{1}{2}n + x$, wo $x > 0$, aber $\leqq \frac{1}{4}\nu$ wegen (7); so ist:

$$\Sigma q_i = 2(\nu + \nu') - n$$

wegen (1)

$$= 2(\nu + x);$$

$$q_3, q_4, q_5 \leqq q_2 \leqq \nu - q_1$$

wegen (4); also:

$$q_1 + 4(\nu - q_1) \geqq \Sigma q_i$$

oder

$$\geqq 2(\nu + x),$$

mithin:

$$q_1 \leqq \tfrac{2}{3}(\nu - x)$$

und

$$n - \nu' - q_1 \geqq n - \nu' - \tfrac{2}{3}(\nu - x)$$

$$\geqq \tfrac{1}{2} n - x - \tfrac{2}{3}(\nu - x), \text{ da } \nu' = \tfrac{1}{2} n + x,$$

$$\geqq \tfrac{1}{2} n - \tfrac{2}{3}\nu - \tfrac{1}{3} x$$

$$\geqq \tfrac{1}{2} n - \tfrac{3}{4}\nu, \text{ weil } x \leqq \tfrac{1}{4}\nu,$$

$$\geqq 0, \text{ da } \nu \leqq \tfrac{2}{3} n;$$

demnach:

$$n - \nu' \geqq q_1. -$$

Aus (1) folgt, da ja $\Sigma q_i \geqq 0$ sein muss:

(10) $$\zeta = \nu + \nu' \geqq \tfrac{1}{2} n;$$

so dass wir nun auch *eine untere Grenze für* ζ haben.

Sodann sehen wir, dass, *wenn* ν *gegeben ist,* ν' *gebunden ist an:*

$$\nu' \leqq \tfrac{1}{2} n + \tfrac{1}{4}\nu, \qquad \nu' \geqq \tfrac{1}{2} n - \nu$$

wegen (7) und (10).

Wir haben jetzt folgendes Verfahren, um alle Curven n^{ter} *Ordnung auf* F^3 *zu ermitteln:*

Wir nehmen alle ganzen Zahlen ζ, welche der Bedingung genügen:

$$\tfrac{4}{3} n \geqq \zeta \geqq \tfrac{1}{2} n.$$

Jedes dieser ζ zerlegen wir in zwei ganze Summanden ν, ν', für welche

$$0 < \nu < \nu' \leqq \tfrac{2}{3} n;$$

sodann zerlegen wir $2\zeta - n = \Theta$ in 5 ganze Summanden (Nullen ev. eingeschlossen) q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, scheiden aber alle diejenigen Zerlegungen aus, bei denen die Summe der beiden grössten Summanden $q_1 + q_2 > \nu$ ist.

Jedes erhaltene System $\nu, \nu', q_1, q_2, q_3, q_4, q_5$ liefert uns Curven n^{ter} Ordnung, welche ein gegebenes Dupel zum meist getroffenen haben und seine Geraden in $n - \nu$, $n - \nu'$ Punkten, die 5 dieselben schneidenden in $q_1, \ldots, q_5$ Punkten treffen.

Geht man mit ζ über $\frac{4}{3} n$ oder mit $q_1 + q_2$ über ν hinaus, so reproducirt man schon erhaltene Fälle: man erhält dann Curven, welche zwar nicht das gegebene Dupel zum meist getroffenen haben, sondern ein anderes und bei diesem sich schon ergeben hätten und also gleichartig sind mit schon beim gegebenen Dupel vorgekommenen Curven.

Man vermeidet demnach, wenn man die obigen Bedingungen einhält, Wiederholungen gleichartiger Curven, freilich nicht gleichartiger gegen dasselbe, sondern im Allgemeinen gegen verschiedene Dupel; was jedoch keinen Unterschied macht.

Dass $\nu, \nu' > 0$ sein müssen, ist klar, weil die Curve die Geraden g, g' doch höchstens in $n - 1$ Punkten treffen kann.

(10) bewirkt, wie gesagt, $\Sigma q_i = \Theta \geqq 0$, so dass wir immer q_i bestimmen können, welche $\geqq 0$ sind. Dass alle $\nu - q_i$, $\nu' - q_i \geqq 0$ sind, folgt aus (4), da $\nu - q_1$ die kleinste unter ihnen ist. Und die kleinste Schnittzahl der 10 gegen g, g' windschiefen Geraden ist

$$\nu + \nu' - (q_1 + q_2 + q_3);$$

da aber $q_1 + q_2 \leqq \nu \leqq \nu'$ und $q_3 \leqq q_2$, so ist:

$$q_1 + q_2 + q_3 \leqq \nu + \nu'.$$

Im Folgenden (III) soll nun gezeigt werden, dass für keines der erhaltenen Systeme (ν, ν', q_i) der obige Ausdruck für p in Formel (2) negativ wird und da $t_3 = p + n - 1$, so folgt (für $n > 1$), dass:

$$t_3 > 0.$$

Die Geraden sind demnach die einzigen Linien der Fläche, welche nur in endlicher Zahl vorhanden sind.

Nun ist aber t_3 die Zahl der noch verfügbaren Constanten für die Regelfläche vom Grade $\nu + \nu'$ oder die Curve dieser Ordnung in der festen Ebene, welche zur Curve auf F^3 führt; so dass unter den genannten Bedingungen stets solche Curven für jedes der 216 Dupel möglich sind.

Bemerken wir hier nebenbei, (was später von Werth werden wird), da die Curve in der festen Ebene sonst durch lineare Bedingungen — gewisse Vielfachheiten in gegebenen Punkten — bestimmt ist und die schiefe Projection von der Ebene auf die Fläche und umgekehrt eindeutig ist, dass die Mannigfaltigkeit t_3 aussagt, dass durch t_3 beliebige Punkte der F^3 stets eine und nur eine Curve geht, die gegen ein bestimmtes Dupel und seine Schneidenden in einer gewissen Weise sich verhält.

Die Frage concentrirt sich demnach auf die Ermittelung der Grenzwerthe von p, und zwar nicht blos, wie wir eben erwähnten, des untern, sondern auch des obern. Dazu aber müssen wir in einem besondern Abschnitte einige arithmetische Sätze einschalten.

II.

Arithmetische Hülfssätze.

4. Es handelt sich zunächst darum, *unter den Zerlegungen einer (ganzen positiven) Zahl* Θ *in* λ *ganze Summanden, welche* $\geqq 0$ *sind, diejenige aufzufinden, bei welcher die Summe der Quadrate der Summanden ein Minimum ist.*

Es sei $\Theta = \alpha\lambda + \beta$, *wo* α, β *solche ganze Zahlen sind, dass* $\alpha \geqq 0$, $\lambda > \beta \geqq 0$ *ist; dann existirt eine Summandenreihe, bestehend aus* β *Summanden* $\alpha + 1$ *und* $\lambda - \beta$ *Summanden* α. *Diese führt zum Minimum der Quadratsumme.*

Es sei $q_1, q_2, \ldots, q_\lambda$ eine andere Summandenreihe, und $x_1, x_2, \ldots, x_\beta$ seien die positiven oder negativen Ueberschüsse der β ersten über $\alpha + 1$, $y_1, y_2, \ldots, y_{\lambda-\beta}$ die der $\lambda - \beta$ übrigen über α; so dass:

$$\Sigma x + \Sigma y = 0.$$

Die beiden Quadratsummen sind:

$$\beta(\alpha + 1)^2 + (\lambda - \beta)\alpha^2$$

und

$$(\alpha+1+x_1)^2+\cdots+(\alpha+1+x_\beta)^2+(\alpha+y_1)^2+\cdots+(\alpha+y_{\lambda-\beta})^2;$$

der Ueberschuss der letzteren über die erstere also:

$$\Sigma x^2 + \Sigma y^2 + 2\Sigma x \,.\, (\alpha + 1) + 2\Sigma y \,.\, \alpha$$
$$= \Sigma x^2 + \Sigma y^2 + 2\Sigma x = \Sigma(x+1)^2 + \Sigma y^2 - \beta.$$

Setzen wir $x_i + 1 = z_i$, so dass $\Sigma z + \Sigma y = \beta$, so haben wir zu zeigen, dass $\Sigma z^2 + \Sigma y^2 > \beta$, oder einfacher:

$$\Sigma w^2 > \beta, \quad \text{wenn} \quad \Sigma w = \beta.$$

Die absoluten Werthe der w seien $\bar{w}$; so ist $\Sigma w^2 = \Sigma \bar{w}^2$ und $\Sigma \bar{w} \geqq \Sigma w$, $=$ nur dann, wenn unter den w sich keine negativen befinden; d. h. kein $x < -1$, kein $y < 0$ ist. Da es sich um ganze Zahlen handelt, so ist $\Sigma \bar{w}^2 \geqq \Sigma \bar{w}$, $=$ nur dann, wenn die w nur aus $1, 0$ bestehen, also die x nur aus $-2, -1, 0$, die y nur aus $-1, 0, 1$. Mithin $\Sigma w^2 \geqq \Sigma w$ oder $\geqq \beta$, $=$ nur dann, wenn unter den x nur $-1, 0$, unter den y nur $1, 0$ vorkommen; da aber $\Sigma x + \Sigma y = 0$, so sind dann unter den y so viele $+1$, als -1 unter den x und auch unter beiden gleich viele 0; d. h. es gehen ebensoviele α in $\alpha+1$ über, als $\alpha + 1$ in α; oder die zweite Summandenreihe unterscheidet

sich nicht von der ersten. Sobald also die zweite Summandenreihe von der ersten verschieden ist, ist ihre Quadratsumme grösser, und damit die Behauptung bewiesen.

5. Bei der Frage nach *derjenigen Zerlegung, bei welcher die Quadratsumme ein Maximum ist*, haben wir nicht blos das absolute Maximum aufzusuchen, sondern auch das unter gewissen Bedingungen stattfindende.

Das absolute Maximum ist leicht zu finden; *es entspricht der Zerlegung*

$$\Theta, 0, 0, 0, 0, \ldots;$$

denn, ist wiederum $q_1, q_2, \ldots, q_\lambda$ eine andere Zerlegung, nach der Grösse geordnet; so dass mindestens $q_1, q_2 > 0$ sind; so ist

$$\Theta^2 = (q_1 + q_2 + \cdots + q_\lambda)^2 > q_1^2 + q_2^2 + \cdots + q_\lambda^2$$

um mindestens $2 q_1 q_2$.

Die nächst grösste Quadratsumme*) ergiebt sich bei:

$$\Theta - 1, 1, 0, 0, 0, \ldots.$$

Man findet zunächst leicht, dass alle Zerlegungen

$$\Theta - i, i, 0, 0, 0, \ldots$$

bei denen $i > 1$ ist, eine kleinere Quadratsumme haben. Also bleiben diejenigen Zerlegungen, bei denen mindestens $q_3 > 0$.

Nun ist:

$$\Theta^2 \geqq \Sigma q_i^2 + 2 q_1 q_2 + 2 q_3 \Theta - 2 q_3^2,$$

denn es fehlt rechts die Summe der doppelten Producte aus $q_4, q_5, \ldots$; also:

$$\Theta^2 \geqq \Sigma q_i^2 + 2 q_3 \Theta,$$

da

$$q_1 q_2 \geqq q_3^2;$$

mithin:

$$\Theta^2 - 2\Theta \geqq \Sigma q_i^2,$$

weil

$$q_3 \Theta \geqq \Theta;$$

folglich:

$$(\Theta - 1)^2 + 1 > \Sigma q_i^2. \; -$$

Wenn wir bei einer Zerlegung: $q_1, q_2, \ldots, q_\lambda$, wo wiederum nach der Grösse geordnet ist, den grössten Summanden q_1 um x_1 erhöhen, die übrigen zusammen um eben so viel erniedrigen, bez. um $x_2, \ldots, x_\lambda$; so also, dass $x_1 > 0$, $x_2, x_3, \ldots \geqq 0$, und $x_1 = x_2 + x_3 + \cdots$; dann nimmt die Quadratsumme zu, denn der Ueberschuss der neuen über die alte ist:

$$2(q_1 - q_2)x_2 + 2(q_1 - q_3)x_3 + \cdots + 2(q_1 - q_\lambda)x_\lambda + x_1^2 + \cdots + x_\lambda^2,$$

was sicher > 0 ist, da ja mindestens zwei der $x_i > 0$ sind.

*) Diese wird im Folgenden bei der cubischen Fläche selbst nicht benutzt, sondern bei der ersten der beiden im Anhange behandelten Flächen.

Demnach ist die Maximal-Quadratsumme unter den mit q_1 anfangenden Zerlegungen grösser als diejenige unter den mit q_1' beginnenden Zerlegungen, wenn $q_1 > q_1'$. Folglich ist auch die grösste Quadratsumme unter den Zerlegungen, bei denen die Summe der i ($< \lambda$) grössten Summanden $q_1 + q_2 + \cdots + q_i = \nu$), grösser als die unter den Zerlegungen, bei denen $q_1 + q_2 + \cdots + q_i < \nu$.* Denn man kann ja q_1 um so viel erhöhen, bis $q_1 + \cdots + q_i = \nu$ erreicht wird, und $q_{i+1}, q_{i+2}, \ldots, q_\lambda$ zusammen um ebenso viel erniedrigen. Dies ist möglich, denn es sei der Werth von $q_1 + \cdots + q_i = \nu - x$, so dass um x erhöht, bez. erniedrigt werden muss; dann ist

$$q_{i+1} + q_{i+2} + \cdots + q_\lambda = \Theta - (\nu - x) = (\Theta - \nu) + x,$$

also $\geqq x$, weil $\Theta \geqq \nu$.

Ebenso vergrössert sich die Quadratsumme, wenn der kleinste Summand q_λ um x_λ erniedrigt, die übrigen zusammen um ebenso viel erhöht werden; denn der Ueberschuss der neuen Quadratsumme ist:

$$2(q_1 - q_\lambda)x_1 + 2(q_2 - q_\lambda)x_2 + \cdots + 2(q_{\lambda-1} - q_\lambda)x_{\lambda-1} + x_1^2 + \cdots + x_\lambda^2,$$

was > 0 ist.

Ist nun für den untersten Summanden q_λ eine gewisse untere Grenze y vorgeschrieben (welche, wie man leicht findet, $\leqq \frac{\Theta}{\lambda}$ sein muss, denn diesen Werth kann q_λ höchstens erreichen), so ist wiederum das Maximum der Quadratsumme bei den Zerlegungen, wo $q_\lambda = y$ ist, grösser als bei denen, wo $q_\lambda > y$. Nun ist $q_{\lambda-1} \geqq q_\lambda$, mithin ist y auch untere Grenze für $q_{\lambda-1}$. Also muss bei derjenigen unter den Zerlegungen mit $q_\lambda = y$, welche die grösste Quadratsumme hat, $q_{\lambda-1} = y$ sein, u. s. w.; folglich muss sie aus $\Theta - (\lambda - 1)y$ als erstem Summanden und $\lambda - 1$ weiteren Summanden y bestehen. Dies umfasst den am Anfang dieser Nr. erhaltenen Satz, indem man $y = 0$ setzt.

6. Suchen wir, für beliebigen Werth von λ, den kleinsten Werth der Summe der i grössten Summanden $q_1 + q_2 + \cdots + q_i$, wenn $\Theta = \lambda\alpha + \beta$ gegeben ist, und umgekehrt, wenn jene Summe gegeben ist, den grössten Werth von Θ, bei dem sie noch möglich ist.

Nehmen wir an, $q_1', q_2', \ldots, q_i'$ seien die i grössten Summanden derjenigen Zerlegung von Θ, bei welcher die Quadratsumme ein Minimum ist, also lauter $\alpha + 1$, wenn $i < \beta$, oder β Summanden $\alpha + 1$ und $i - \beta$ Summanden α, wenn $i > \beta$; seien hingegen $q_1, q_2, \ldots q_i$ die i grössten Summanden irgend einer andern Zerlegung. Es kann niemals $\Sigma q_i < \Sigma q_i'$ sein. Denn dazu müsste es doch mindestens einen Werth $h \leqq i$ geben, so dass $q_h < q_h'$; also da $q_h' = \alpha + 1$ oder α, $q_h \leqq \alpha$.

---

*) Wo $\nu \leqq \Theta$, aber $\geqq$ als eine gewisse untere Grenze, die von Θ abhängt und in der folgenden Nr. besprochen werden soll.

Ferner müsste sein: $q_{i+1} + q_{i+2} + \cdots + q_\lambda > q'_{i+1} + q'_{i+2} + \cdots + q'_\lambda$; letztere Summe ist aber $\geq (\lambda - i)\alpha$, je nachdem $i \leqq \beta$ oder $> \beta$ ist. Also wäre $q_{i+1} + \cdots + q_\lambda > (\lambda - i)\alpha$ und dazu nothwendig mindestens $q_{i+1} > \alpha$, als der grösste von diesen $\lambda - i$ Summanden; demnach $q_{i+1} > q_k$, was der Reihenfolge widerspricht.

Folglich hat diejenige Zerlegung von $\Theta = \lambda\alpha + \beta$, *welche das Minimum der Quadratsumme giebt, zugleich die Eigenschaft, dass, für jeden Werth von* i, *der* $< \lambda$ *ist, die Summe der* i *grössten Summanden bei ihr immer den niedrigsten Werth hat* (der wohl bei andern Zerlegungen erreicht, aber nicht unterschritten werden kann), *und dieser niedrigste Werth der Summe der* i *grössten Summanden ist:*

$$i(\alpha+1), \text{ bez. } \beta(\alpha+1) + (i-\beta)\alpha = i\alpha + \beta,$$

je nachdem $i \leqq \beta$ *oder* $> \beta$ *ist.*

Wir können demnach diese Zerlegung mit Grund die *Minimalzerlegung von* Θ nennen.

Es sei umgekehrt der Werth der Summe $q_1 + q_2 + \cdots + q_i$ gegeben gleich ν, und $\nu = i\gamma + \delta$, wo γ, δ solche ganze Zahlen sind, dass $\gamma \geqq 0$, $i > \delta \geqq 0$. Es sind dann die kleinsten Werthe der Summe der i grössten Summanden:

$$\begin{aligned}
\nu - \delta &= i(\alpha + 1), \text{ wenn } \beta \geqq i,\\
\nu - (\delta + 1) &= i\alpha + i - 1, \text{ wenn } \beta = i - 1,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\nu - (i - 1) &= i\alpha + (\delta + 1), \text{ wenn } \beta = \delta + 1,\\
\nu &= i\alpha + \delta, \text{ wenn } \beta = \delta,\\
\nu - 1 &= i\alpha + (\delta - 1), \text{ wenn } \beta = \delta - 1,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\nu - \delta &= i\alpha, \text{ wenn } \beta = 0.
\end{aligned}$$

In den Fällen, wo $\beta > \delta$, ergiebt sich $\alpha = \frac{\nu - \delta}{i} - 1$, in den übrigen aber $\alpha = \frac{\nu - \delta}{i}$; also führen letztere zu grösseren Θ als erstere, und unter ihnen wieder $\beta = \delta$ zum grössten: dann ist auch ν die kleinste Summe selbst. Dieser grösste Werth von Θ ist

$$\lambda \cdot \frac{\nu - \delta}{i} + \delta = \lambda\gamma + \delta.$$

Also ist das grösste Θ, *welches sich so in* λ *Summanden zerlegen lässt, dass die Summe der* i *grössten Summanden den gegebenen Werth* $\nu = i\gamma + \delta$ *hat,*

$$\lambda\gamma + \delta.$$

Im Falle $\lambda = 5$, $i = 2$ erhalten wir daher, für gegebenen Werth $\nu = 2\gamma$, $2\gamma + 1$ der Summe der beiden grössten Summanden, als grössten Werth von Θ bez. 5γ, $5\gamma + 1$.

7. Das Problem, unter den Zerlegungen von Θ, welche der Bedingung $q_1 + q_2 + \cdots + q_i \leqq \nu$ genügen, diejenige mit der grössten Quadratsumme aufzusuchen (wofern $\nu < \Theta$ nur grösser als die oben angegebene untere Grenze), ist in Nr. 5 auf *die Aufsuchung der Zerlegung mit der grössten Quadratsumme unter denen, welche*

$$q_1 + q_2 + \cdots + q_i = \nu$$

genügen, zurückgeführt worden. Selbst noch in dieser Form scheint es bedeutenden Schwierigkeiten ausgesetzt, ja sogar durch *die Specialisirung auf den vorliegenden Fall:* $\lambda = 5$, $i = 2$ scheint es noch nicht an Einfachheit zu gewinnen. *In diesem speciellen Falle sind zwei Fälle zu unterscheiden, nämlich:* $\Theta < 2\nu$, $\Theta \geqq 2\nu$.

Im letzteren ist es mir gelungen, die Zerlegung mit der grössten Quadratsumme nachzuweisen; im ersteren Falle hingegen schien die Unterscheidung so vieler Unterfälle nöthig, dass es fraglich wurde, ob das Resultat wirklich von Werth sein möchte, ob nicht dann die Beantwortung unserer eigentlichen Frage nach dem Minimum des Geschlechts, in Folge der Discussion aller dieser Fälle, sehr umständlich werden würde, wenigstens umständlicher als die Art und Weise, wie ich sie, mit einer gewissen Umgehung des arithmetischen Problems, doch erledigt habe.

Ich begnüge mich, darzuthun, dass *im ersten Falle die grösste Quadratsumme in drei verschiedenen Formen auftreten kann.*

Denken wir, die beiden ersten Summanden seien fest: $\nu - q_2, q_2$; wir suchen also die Zerlegung mit der grössten Quadratsumme unter den mit $\nu - q_2, q_2$ beginnenden auf. Zunächst folgt aus: $\nu - q_2 \geqq q_2$, dass $q_2 \leqq \frac{\nu}{2}$.

Ferner ist $q_3 + q_4 + q_5 = \Theta - \nu$ und $q_3 \leqq q_2$. Das Maximum der Quadratsumme tritt dann ein, wenn $S' = q_3^2 + q_4^2 + q_5^2$ am grössten ist.

1) Ist nun $\Theta - \nu \leqq q_2$, dann kann q_3 den Werth $\Theta - \nu$ annehmen und das Maximum von S' findet statt, wenn q_3 ihn hat und $q_4 = q_5 = 0$ ist. Also die Zerlegung von Θ mit der grössten Quadratsumme ist:

$$\nu - q_2, q_2, \Theta - \nu, 0, 0,$$

und diese grösste Quadratsumme erreicht dann wieder ihr Maximum, wenn $(\nu - q_2)^2 + q_2^2$ es erreicht, wobei q_2 zwischen $\left[\frac{\nu}{2}\right]$ und $\Theta - \nu$ sich bewegt; also wenn $\nu - q_2$ am grössten, q_2 am kleinsten ist, d. h. wenn $q_2 = \Theta - \nu$, $q_1 = 2\nu - \Theta$, so dass wir es mit der Zerlegung:

$$2\nu - \Theta, \Theta - \nu, \Theta - \nu, 0, 0$$

zu thun haben; diese hat also die grösste Quadratsumme, nämlich:

$$6\nu^2 + 3\Theta^2 - 3\nu\Theta,$$

unter allen mit 0, 0 schliessenden Zerlegungen von Θ, bei denen $q_1 + q_2 = \nu$ ist.

2) Ist $\Theta - \nu > q_2$, aber $\leqq 2q_2$, mithin $\Theta - \nu - q_2 \leqq q_2$; dann haben wir das Maximum von S' bei denjenigen Zerlegungen von $\Theta - \nu$, bei denen q_3 seinen grössten Werth q_2 hat (Nr. 5), aufzusuchen und unter diesen hat diejenige die grösste Quadratsumme, bei welcher $q_4 = \Theta - \nu - q_2$, $q_5 = 0$. Also hat in dem jetzigen Falle unter den mit $\nu - q_2, q_2$ beginnenden Zerlegungen die Zerlegung:

$$\nu - q_2,\ q_2,\ q_2,\ \Theta - \nu - q_2,\ 0$$

die grösste Quadratsumme; und diese ist:

$$\nu^2 + (\Theta - \nu)^2 - 2q_2(\Theta - 2q_2).$$

Beachten wir, dass der Subtrahend $V = 2q_2(\Theta - 2q_2) > 0$, denn $\Theta > \nu$, $q_2 \leqq \frac{\nu}{2}$, aber $q_2 > 0$.

3) Wenn $\Theta - \nu > 2q_2$, also $\Theta - \nu - q_2 > q_2$; dann ist, bei der gesuchten Zerlegung, wie bei 2), $q_3 = q_2$, aber unter den Zerlegungen von $\Theta - \nu - q_2$ in q_4, q_5 hat, da $q_4 \leq q_2$ und also $\Theta - \nu - q_2$ nicht erreichen kann, $q_4 = q_2$, $q_5 = \Theta - \nu - 2q_2$ den grössten Werth von $q_4^2 + q_5^2$; mithin erhalten wir als Zerlegung mit der grössten Quadratsumme:

$$\nu - q_2,\ q_2,\ q_2,\ q_2,\ \Theta - \nu - 2q_2;$$

und diese Summe selbst ist:

$$\nu^2 + (\Theta - \nu)^2 - 2q_2(2\Theta - \nu - 4q_2).$$

Auch hier ist der Subtrahend $V = 2q_2(2\Theta - \nu - 4q_2) > 0$; denn, wenn $\Theta - \nu > 2q_2$, so ist:

$$2\Theta - 2\nu > 4q_2,$$

also:

$$2\Theta - \nu > 4q_2.$$

Nun müssten wir in 2) und (3) je die grösste Quadratsumme ermitteln, wenn q_2 die zulässigen Werthe durchläuft, und dann die drei Maxima bei 1), 2), 3) vergleichen. Wie gesagt, ein einfaches Resultat scheint sich nicht zu ergeben. Für unsern Zweck genügt es, die drei Formen der grössten Quadratsumme gewonnen zu haben.

8. *Im zweiten Fall hingegen:* $\Theta \geqq 2\nu$ *lässt sich die Zerlegung mit der grössten Quadratsumme in einfacher Weise ermitteln. Ist zunächst* $\nu = 2\gamma$, *dann fanden wir* (Ende von Nr. 6) $\Theta \leqq 5\gamma$. *Wir setzen also:* $\Theta = 4\gamma + \delta$, *so dass* $\gamma \geqq \delta \geqq 0$. *Die grösste Quadratsumme ergiebt sich bei der Zerlegung:*

$$\gamma,\ \gamma,\ \gamma,\ \gamma,\ \delta.$$

Denn, es sei q_1, q_2, q_3, q_4, q_5 eine andere Zerlegung, bei welcher $q_1 + q_2 = 2\gamma$, so ist $q_1 = \gamma + x_1$, $q_2 = \gamma - x_1$, wobei $x_1 \geqq 0$, weil

$q_1 \geqq q_2$; ferner $q_3 = \gamma - y_3$, $q_4 = \gamma - y_4$, wo $y_4 \geqq y_3 \geqq x_1$, weil $q_4 \leqq q_3 \leqq q_2$; endlich $q_5 = \delta + x_5$, wo $x_5 = y_3 + y_4$, da ja $q_3 + q_4 + q_5 = 2\gamma + \delta$. $x_5 = 0$ zöge $y_3 = y_4 = x_1 = 0$ nach sich und die neue Zerlegung wäre von der ersten nicht verschieden; also $x_5 > 0$. Da aber $q_5 \leqq q_4$, so ist

$$\delta + x_5 \leqq \gamma - y_4,$$

oder

$$x_5 + y_4 \leqq \gamma - \delta.^*)$$

Multipliciren wir mit der positiven Zahl $2x_5 = 2(y_3 + y_4)$, so ergiebt sich:

$$(\alpha) \qquad 2x_5^2 + 2y_3y_4 + 2y_4^2 \leqq 2(\gamma - \delta)x_5.$$

Der Ueberschuss der neuen Quadratsumme über die frühere ist:

$$2x_1^2 + y_3^2 + y_4^2 + x_5^2 - 2\gamma(y_3 + y_4) + 2\delta x_5$$
$$= 2x_1^2 + y_3^2 + y_4^2 + x_5^2 - 2x_5(\gamma - \delta).$$

Aus: $x_1 \leqq y_3 \leqq y_4$ folgt:

$$2x_1^2 + y_3^2 + y_4^2 \leqq 2y_3y_4 + 2y_4^2,$$

also auch:

$$2x_1^2 + y_3^2 + y_4^2 + x_5^2 < 2y_3y_4 + 2y_4^2 + 2x_5^2, \text{ da } x_5 > 0,$$

und um so mehr

$$< 2(\gamma - \delta)x_5$$

wegen (α).

Demnach ist der Ueberschuss negativ.

Ist aber $\nu = 2\gamma + 1$, *so ist* $\Theta \leqq 5\gamma + 1$; *wir setzen dann:* $\Theta = 2(2\gamma + 1) + \delta$, *so dass* $\gamma - 1 \geqq \delta \geqq 0$.

Die Zerlegung mit der grössten Quadratsumme ist:

$$\gamma + 1,\ \gamma,\ \gamma,\ \gamma,\ \delta + 1.$$

Bei einer andern Zerlegung, bei welcher $q_1 + q_2 = 2\gamma + 1$, sei $q_1 = \gamma + 1 + x_1$, $q_2 = \gamma - x_1$; mithin $1 + x_1 \geqq -x_1$; also, da x_1 ganz sein muss, $x_1 \geqq 0$. Wenn ferner $q_3 = \gamma - y_3$, $q_4 = \gamma - y_4$, $q_5 = \delta + 1 + x_5$, so ergiebt sich, wie vorhin, $x_5 = y_3 + y_4 > 0$, $y_4 \geqq y_3 \geqq x_1$. Und aus

$$\delta + 1 + x_5 \leqq \gamma - y_4\ ^{**})$$

folgt:

$$(\alpha') \qquad 2x_5^2 + 2y_3y_4 + 2y_4^2 \leqq 2x_5(\gamma - \delta - 1).$$

Der Ueberschuss der neuen Quadratsumme über die alte ist:

$$2x_1^2 + y_3^2 + y_4^2 + x_5^2 + 2x_1 - 2x_5(\gamma - \delta - 1).$$

---

*) Ist $\delta = \gamma$, also $\Theta = 5\gamma$, so ist $\gamma, \gamma, \gamma, \gamma, \gamma$ die einzige Zerlegung, bei der $q_1 + q_2 = 2\gamma$.

**) Bei $\delta = \gamma - 1$, also $\Theta = 5\gamma + 1$, ist die obige Zerlegung die einzige, bei welcher $q_1 + q_2 = 2\gamma + 1$.

Da $x_1 \leqq y_3 \leqq y_4$, so ist, wie vorhin:

$$2x_1^2 + y_3^2 + y_4^2 \leqq 2(y_3^2 + y_4^2) \leqq 2y_4(y_3 + y_4);$$

ferner:

$$2x_1 \leqq y_3 + y_4 \leqq x_5 \leqq x_5^2;$$

also:

$$2x_1^2 + y_3^2 + y_4^2 + x_5^2 + 2x_1 \leqq 2x_5^2 + 2y_4(y_3 + y_4),$$

demnach umsomehr $< 2x_5(\gamma - \delta - 1)$ wegen (α').

Das Gleichheitszeichen ist unterdrückt; damit es gälte, wäre nothwendig:

$$x_1 = y_3 = y_4, \quad x_5 = 1 \text{ (weil } = x_5^2);$$

aber

$$y_3 = y_4, \quad x_5 = 1, \quad y_3 + y_4 = x_5$$

sind für ganze Werthe von y_3, y_4 nicht vereinbar.

Also ist der Ueberschuss negativ.

III.

Obere und untere Grenze des Geschlechts der Curven n^{ter} Ordnung auf F^3

9. Wir fanden in Nr. 1 F. (2):

$$p = \frac{1}{2}\{2\nu\nu' - (n-2) - \Sigma q_i^2\}.$$

Ist nun $\nu + \nu' = \zeta$ gegeben, so erreicht p sein Maximum, wenn $\nu\nu'$ am grössten und Σq_i^2 am kleinsten ist. Jenachdem nun $\zeta = 2\varrho$ oder $= 2\varrho + 1$ ist, ist das Maximum von $2\nu\nu'$ bez. $2\varrho^2$ oder $2\varrho(\varrho+1)$ und wird, wenn ζ um 1 wächst, übergehen in $2\varrho(\varrho+1)$, bez. $2(\varrho+1)^2$; der Zuwachs beträgt mithin 2ϱ, bez. $2(\varrho+1)$, oder ζ, bez. $\zeta + 1$.

$\Theta = 2\zeta - n = \Sigma q_i = 5\alpha + \beta$ nimmt bei derselben Veränderung von ζ zu um 2 und geht also über in $5\alpha + (\beta+2)$, bez. $5(\alpha+1) + (\beta-3)$, jenachdem $\beta <$ oder $\geqq 3$ ist. Die Minimal-Quadratsumme war vorher nach Nr. 4:

$$\beta(\alpha+1)^2 + (5-\beta)\alpha^2,$$

und ist jetzt:

$$(\beta+2)(\alpha+1)^2 + (5-\beta-2)\alpha^2,$$

bez.

$$(\beta-3)(\alpha+2)^2 + (5-\beta+3)(\alpha+1)^2.$$

Die Zunahme beträgt im ersten Falle $4\alpha + 2$, im zweiten $4\alpha + 2\beta - 4$, also $4\alpha + 2$ oder $4\alpha + 4$, jenachdem $\beta = 3$ oder 4 ist; mithin in beiden Fällen $4\alpha + 2$, wenn $\beta < 4$, und $4\alpha + 4$, wenn $\beta = 4$.

Beweisen wir nun, dass der Zuwachs des Maximums von $2\nu\nu'$ nicht kleiner ist, als der des Minimums von Σq_i^2.

Es ergab sich in Nr. 3 F. (6):

$$\zeta \leqq \frac{4}{3}n;$$

da wir aber hier noch von ζ zu $\zeta + 1$ steigen wollen, brauchen wir blos:

$$\zeta < \tfrac{4}{3} n,$$

also

$$n > \tfrac{3}{4} \zeta.$$

Folglich ist $\Theta = 2\zeta - n < \frac{5}{4} \zeta$. Nun ist $\alpha \leqq \frac{1}{5} \Theta$, also $4\alpha < \zeta$; demnach, im Falle $\zeta = 2\varrho$, $\zeta - 2$ oder $4\alpha \leqq 2\varrho - 2$, also $4\alpha + 2 \leqq 2\varrho$, im Falle aber $\zeta = 2\varrho + 1$, $4\alpha \leqq \zeta - 1$ oder $\leqq 2\varrho$, also $4\alpha + 2 \leqq 2(\varrho + 1)$; 2ϱ und $2(\varrho + 1)$ sind aber die Zuwächse des Maximums von $2\nu\nu'$, wenn ζ von 1 wächst. Mithin ist die Sache für $\Theta = 5\alpha + \beta$, $\beta < 4$ schon erledigt. Wenn aber $\Theta = 5\alpha + 4$, dann ergab sich der Zuwachs von Σq_i^2 gleich $4\alpha + 4$; nun ist aber $\alpha = \frac{1}{5} \Theta - \frac{4}{5}$, also $4\alpha + 4 = \frac{4}{5} \Theta + \frac{4}{5} < \zeta + \frac{4}{5}$, demnach jedenfalls $< \zeta + 1$, aber im Falle $\zeta = 2\varrho$, muss $4\alpha + 4$ als gerade Zahl $\leqq \zeta$ oder 2ϱ sein.

Demnach kann, wenn ζ wächst, der Maximalwerth von p nicht abnehmen, und wir erhalten den grössten Werth von p bei dem grössten Werthe von ζ, d. i. bei

$$\zeta^{(0)} = \left[\tfrac{4}{3} n\right].$$

10. Um ihn zu ermitteln, müssen wir die 3 Fälle unterscheiden:

$$n = 3\gamma, \quad n = 3\gamma + 1, \quad n = 3\gamma + 2.$$

1) Wenn $n = 3\gamma$, so ist $\zeta^{(0)} = 4\gamma$; das zugehörige $\Theta = 5\gamma$; die Minimalzerlegung $\gamma, \gamma, \gamma, \gamma, \gamma$; Maximum von $2\nu\nu'$ gleich $2(2\gamma)^2$, demnach höchster Werth von p

$$p = \tfrac{1}{2} \{8\gamma^2 - 3\gamma + 2 - 5\gamma^2\}$$
$$= \tfrac{3}{2} \gamma(\gamma - 1) + 1.$$

2) $n = 3\gamma + 1$; $\zeta^{(0)} = 4\gamma + 1$; Maximum von $2\nu\nu'$ ist $2 \cdot 2\gamma(2\gamma + 1)$; $\Theta = 5\gamma + 1$, Minimalzerlegung $\gamma + 1, \gamma, \gamma, \gamma, \gamma$; demnach höchster Werth von p

$$p = \tfrac{1}{2} \{4\gamma(2\gamma + 1) - 3\gamma - 1 + 2 - (\gamma + 1)^2 - 4\gamma^2\}$$
$$= \tfrac{1}{2} \gamma(3\gamma - 1).$$

Freilich ist hier die Bedingung $q_1 + q_2 < \nu$ nicht eingehalten ($q_1 = \gamma + 1$, $q_2 = \gamma$, $\nu = 2\gamma$); doch wird man leicht erkennen, dass für die vorliegende Betrachtung dies nicht nothwendig ist: man hat nur dann die Curve nicht dem meistgetroffenen Dupel zugewiesen

und eine gleichartige beim betrachteten Dupel schon erhalten. Bei der Aufsuchung der Maximal- und Minimalwerthe sind ja Wiederholungen unbedenklich: man kann bei den Beweisen die oben besprochenen Beschränkungen verwerthen, wie es ja hier in dem vorhergehenden Artikel geschehen, braucht es aber nicht. Sie sind hier ein Vortheil, aber nicht nothwendig.

Wenn man aber will, kann man die beschränkenden Bedingungen einhalten. Blieben wir bei $\zeta^{(0)} = 4\gamma + 1$, so bliebe noch der Werth von Θ, und jede andere Zerlegung genügt ebenso wenig oder noch weniger der Bedingung $q_1 + q_2 \leq \nu$, da nach Nr. 6 $q_1 + q_2$ bei der Minimalzerlegung am kleinsten ist; andere Zerlegungen aber von $\zeta = 4\gamma + 1$ als in $\nu = 2\gamma$, $\nu' = 2\gamma + 1$ liefern wegen $\nu \leq \nu'$ noch kleineres ν.

Also $\zeta^{(0)} = 4\gamma$; dann $\nu = \nu' = 2\gamma$; $\Theta = 5\gamma - 1$; Minimalzerlegung $\gamma, \gamma, \gamma, \gamma, \gamma - 1$; mithin grösster Werth von p

$$p = \tfrac{1}{2}\{2 \cdot 4\gamma^2 - 3\gamma - 1 + 2 - 4\gamma^2 - (\gamma-1)^2\} = \tfrac{1}{2}\gamma(3\gamma - 1),$$

wie oben.

3) $n = 3\gamma + 2$; $\zeta^{(0)} = 4\gamma + 2$; $\nu = \nu' = 2\gamma + 1$, $\Theta = 5\gamma + 2$; Minimalzerlegung: $\gamma + 1, \gamma + 1, \gamma, \gamma, \gamma$; also grösster Werth von p

$$p = \tfrac{1}{2}\{2(2\gamma+1)^2 - 3\gamma - 2 + 2 - 2(\gamma+1)^2 - 3\gamma^2\}$$
$$= \tfrac{1}{2}\gamma(3\gamma+1);$$

oder, da hier eine ähnliche Bemerkung gilt:

$\zeta^{(0)} = 4\gamma + 1$; $\nu = 2\gamma$, $\nu' = 2\gamma + 1$; $\Theta = 5\gamma$; Minimalzerlegung $\gamma, \gamma, \gamma, \gamma, \gamma$; grösster Werth von p

$$p = \tfrac{1}{2}\{4\gamma(2\gamma+1) - 3\gamma - 5\gamma^2\} = \tfrac{1}{2}\gamma(3\gamma+1).$$

Führen wir wieder n ein, so erhalten wir folgenden Satz:

Das Maximum des Geschlechts für eine Curve n^{ter} Ordnung auf einer cubischen Fläche ist:

$$p^{(3)} = \tfrac{1}{6}\{(n-1)(n-2) + 4\} \quad \textit{oder} \quad = \tfrac{1}{6}(n-1)(n-2),$$

jenachdem n durch 3 theilbar ist oder nicht; oder, für beide Fälle:

$$p^{(3)} = \left[\frac{(n-1)(n-2)+4}{6}\right] = \left[\frac{n(n-3)}{6} + 1\right].$$

Das absolute Maximum $\left[\frac{1}{4}(n-2)^2\right]$ für Raumcurven n^{ter} Ordnung (denn das sind ja, sobald $n > 3$, alle Curven auf F^3) wird demnach im Allgemeinen nicht erreicht.

Rechnet man das Resultat für *die Anzahl der scheinbaren Doppelpunkte* um, *so ergiebt sich als deren Minimum in den* 3 *Fällen* 1), 2), 3) *bez.* $3\gamma(\gamma-1)$, $\gamma(3\gamma-1)$, $\gamma(3\gamma+1)$, *also in allen* 3 *Fällen:*

$$h^{(3)} = \left[\frac{1}{3}(n-1)(n-2)\right] \quad \textit{oder} \quad h^{(3)} = \gamma(3\gamma+2\varepsilon-3),$$

wenn $n = 3\gamma + \varepsilon$.*)

11. Wenden wir uns nun zur Ermittelung *der untern Grenze.* Wir denken uns ν gegeben und ein dazu mögliches Θ (Nr. 6). Es ist:

$$2(\nu + \nu') - n = \Theta,$$

also:

$$\nu' = \tfrac{1}{2}(n + \Theta - 2\nu),$$

und weil $\nu' \geq \nu$:

$$n + \Theta - 2\nu \geq 2\nu,$$

oder:

$$n \geq 4\nu - \Theta. \tag{11}$$

Damit haben wir, wenn ν, Θ *gegeben sind, eine untere Grenze für diejenigen* n, *bei welchen diese Combination* ν, Θ *möglich ist.*

Ferner ist nach F. (2) in Nr. 1:

$$p = \tfrac{1}{2}\{2\nu\nu' - n + 2 - \Sigma q_i^2\}$$

$$= \tfrac{1}{2}\{\nu(n+\Theta-2\nu) - n + 2 - \Sigma q_i^2\},$$

$$p = \tfrac{1}{2}\{n(\nu-1) + \nu\Theta - 2\nu^2 + 2 - \Sigma q_i^2\}. \tag{12}$$

Für den Fall: $\nu = 1$ reducirt sich diese Formel auf:

$$p = \tfrac{1}{2}(\Theta - \Sigma q_i^2).$$

*) Halphen, Comptes rendus, Bd. 70 (1870) S. 380, ohne Beweis; H. Valentiner, Bidrag til Rumcurvernes Theori, Diss. Kopenhagen Dec. 1881, S. 43, mit allgemeinerem auf beliebige Flächen bezüglichen Beweise. Mein obiger Beweis stammt aus dem October 1881. — Herr Halphen hat a. a. O., ebenfalls ohne Beweis, den Satz mitgetheilt, dass das höchste Geschlecht für Raumcurven n^{ter} Ordnung (im engern Sinn) nicht

$$\tfrac{1}{2}(n-1)(n-2), \quad \text{sondern} \quad \tfrac{1}{2}(n-1)(n-2) - \left[\left(\tfrac{n-1}{2}\right)^2\right] = \left[\left(\tfrac{n-2}{2}\right)^2\right]$$

ist, d. i. dasselbe, welches auf einer F^2 möglich ist. Einen Beweis hierfür oder vielmehr für die entsprechende Minimalzahl $\left[\left(\frac{n-1}{2}\right)^2\right]$ der scheinbaren Doppelpunkte gab Herr G. Kohn (Sitzungsber. der Wiener Akademie Oct. 1880) in einem im Uebrigen nicht fehlerfreien Aufsatze; sodann Herr Valentiner a. a. O. Noch bevor ich Kohn's Aufsatz kennen lernte, auf den mich Herr Reye aufmerksam machte, habe ich (Dec. 1880) selbstständig einen Beweis gefunden, den ich vielleicht bei anderer Gelegenheit mittheile; cf. Report of the British Association held at York Aug., Sept. 1881, S. 440.

Nach Nr. 6 ist aber $\Theta \leqq 1$, wenn $\nu = 1$; für die beiden möglichen Werthe $\Theta = 0, 1$ ist $\Sigma q_i^2 = 0, 1$; also:

$$p = 0.$$

Folglich ist für $\nu = 1$ *das Geschlecht stets* 0, wie dies ja auch geometrisch einleuchtet, da g dann eine $(n-1)$-mal treffende Secante ist.

Aus:

$$2(\nu + \nu') = \Theta + n$$

folgt weiter, *dass* Θ *immer gleichzeitig mit* n *gerade und ungerade ist;* mithin haben wir, je nachdem n gerade oder ungerade ist, nur $\Theta = 0$ oder nur $\Theta = 1$.

Also giebt es von jeder Ordnung nur eine Curvenart $\nu = 1$, *d. i. die ihrer höchst getroffenen Geraden in* $n - 1$ *Punkten begegnet.*

Die einzige Zerlegung von $\Theta = 0, 1$ ist 0, 0, 0, 0, 0, bez. 1, 0, 0, 0, 0; und nach Nr. 3 finden wir, dass, *wenn* n *gerade ist, die Curve von* 1 *Geraden in* $n - 1$, *von* 1 *in* $\frac{n}{2} + 1$, *von* 10 *in* $\frac{n}{2}$ *und von je* 5 *in* $\frac{n}{2} - 1$, 1, 0 *Punkten getroffen wird; wenn aber* n *ungerade ist, es eine Gerade mit* $n - 1$, 5 *Gerade mit* $\frac{n+1}{2}$, 10 *mit* $\frac{n-1}{2}$, 1 *mit* $\frac{n-3}{2}$ *und je* 5 *mit* 1, 0 *Schnitten giebt.* Doch tritt dieses Gesetz erst bei $n > 5$ deutlich hervor, indem vorher diese 6 Schnittzahlen theilweise gleich werden.

Von diesem Falle $\nu = 1$ können wir künftighin absehen und demnach $\nu > 1$ voraussetzen.

12. Ist $\Theta \leqq \nu$, dann ist nach Nr. 5 Anf. Θ^2 der grösste Werth von Σq_i^2; also ergiebt sich, wenn n, ν, $\Theta \leqq \nu$ gegeben sind, als kleinstes p

$$p' = \tfrac{1}{2}\{n(\nu - 1) - 2\nu^2 + 2 + \Theta(\nu - \Theta)\}. \tag{13}$$

Der letzte Summand $\Theta(\nu - \Theta)$ ist $\geqq 0$, $=$ nur dann, wenn $\Theta = 0$ oder $\Theta = \nu$ ist; demnach, wenn n, ν beide gerade sind, in beiden Fällen; wenn n gerade, ν ungerade, nur im ersten Falle; wenn beide ungerade sind, nur im zweiten. Ist endlich n ungerade, ν gerade, so sind beide Fälle unmöglich und der kleinste Werth von $\Theta(\nu - \Theta)$ ergiebt sich bei $\Theta = 1$ oder $\Theta = \nu - 1$, nämlich $\nu - 1$.

Wenn demnach n, ν fest sind, $\Theta \leqq \nu$ ist, so ist das Minimum des Geschlechts:

$$p'' = \tfrac{1}{2}\{n(\nu - 1) - 2\nu^2 + 2\}; \tag{14}$$

ausser, wenn n ungerade, ν gerade ist, wo es dann ist:

$$p_1'' = \tfrac{1}{2}\{n(\nu - 1) - 2\nu^2 + 2 + \nu - 1\}. \tag{14 I}$$

Freilich ist dabei nothwendig, dass die Bedingung: $\Theta > 4\nu - n$ $\Theta \leqq \nu$ zulässt und mindestens derjenige der beiden obersten Werthe ν, $\nu - 1$ von Θ möglich ist, der mit n gleichartig ist. Dann erst wird das niedrigste Geschlecht p'', p_1'' möglich.

p_1'' ist die grössere dieser beiden Zahlen. Wir wollen nun nachweisen, dass alle p, die sich bei denselben n, ν und bei $\Theta > \nu$ ergeben, grösser als p_1'' sind, und um so mehr als p''.

Wir unterscheiden die beiden Fälle: $\Theta > \nu$, $< 2\nu$ und $\Theta \geqq 2\nu$.

Im ersten Falle haben wir (Nr. 7) 3 Formen der grössten Quadratsumme gefunden.

1) Wenn $\Theta - \nu \leqq q_2$, dann ergab sich für alle derartigen Zerlegungen als grösste Quadratsumme $6\nu^2 + 3\Theta^2 - 8\Theta\nu$; setzen wir dies für Σq_i^2 in (12) ein oder in:

$$X = p - p_1'' = \tfrac{1}{2}\{\nu\Theta - \Sigma q_i^2 - (\nu - 1)\},$$

so erhalten wir:

$$X \geqq \tfrac{1}{2}\{9\nu\Theta - 6\nu^2 - 3\Theta^2 - (\nu - 1)\}.$$

Nun ist aber $\Theta = \nu + \mu$, wo $\nu > \mu > 0$; also ist:

$$X \geqq \tfrac{1}{2}\{3\mu(\nu - \mu) - (\nu - 1)\};$$

der kleinste Werth von $\mu(\nu - \mu)$ ist aber $\nu - 1$, wenn $\mu = 1$ oder $= \nu - 1$; demnach ist $X > 0$.

2) Wenn $\Theta - \nu > q_2$, $\leqq 2q_2$, so ergab sich als zweite Form $\nu^2 + (\Theta - \nu)^2 - 2q_2(\Theta - 2q_2)$. Es ist in Nr. 7 bewiesen, dass $V = 2q_2(\Theta - 2q_2)$ stets > 0 ist; sei V_1 der kleinste Werth von V, der sich ergiebt, wenn q_2 die zulässigen Werthe durchläuft, sodass $\nu^2 + (\Theta - \nu)^2 - V_1$ die grösste Quadratsumme in diesem Falle ist; wir setzen dieselbe wieder in X ein und erhalten:

$$X \geqq \tfrac{1}{2}\{\nu\Theta - \nu^2 - (\Theta - \nu)^2 + V_1 - (\nu - 1)\}$$

$$\geqq \tfrac{1}{2}\{\mu(\nu - \mu) + V_1 - (\nu - 1)\};$$

da aber, wie eben bemerkt, $\mu(\nu - \mu) > \nu - 1$ und $V_1 > 0$, so ist $X > 0$.

3) Ist $\Theta - \nu > 2q_2$, so ergab sich als dritte Form der grössten Quadratsumme $\nu^2 + (\Theta - \nu)^2 - 2q_2(2\Theta - \nu - 4q_2)$. Wir fanden ebenfalls, dass der Subtrahend > 0 ist; nennen wir wiederum V_1 seinen kleinsten Werth, so erhalten wir genau ebenso wie in 2): $X > 0$.

Im zweiten Falle: $\Theta \geqq 2\nu$ hatten wir in Nr. 8 gefunden:

Ist $\nu = 2\gamma$ und $\Theta = 4\gamma + \delta$, so hat die Zerlegung γ, γ, γ, γ, δ die grösste Quadratsumme von denen, welche der Bedingung: $q_1 + q_2 \leqq \nu$

genügen; ist hingegen $\nu = 2\gamma + 1$ und $\Theta = 4\gamma + 2 + \delta$, so hat die Zerlegung $\gamma + 1, \gamma, \gamma, \gamma, \delta + 1$ die grösste Quadratsumme. Setzen wir diese Quadratsumme wieder für Σq_i^2 in X ein, so erhalten wir, wenn $\nu = 2\gamma$:

$$X \geqq \tfrac{1}{2}\{2\gamma(4\gamma + \delta) - 4\gamma^2 - \delta^2 - (2\gamma - 1)\}$$
$$\geqq \tfrac{1}{2}\{2\gamma(2\gamma - 1) + 1 + \delta(2\gamma - \delta)\},$$

wenn aber $\nu = 2\gamma + 1$ ist:

$$X \geqq \tfrac{1}{2}\{(2\gamma+1)(4\gamma+2+\delta) - (\gamma+1)^2 - 3\gamma^2 - (\delta+1)^2 - 2\gamma)\}$$
$$\geqq \tfrac{1}{2}\{4\gamma(\gamma + 1) + \delta(2\gamma - \delta - 1\};$$

beide Klammern aber sind > 0, da $\nu > 1$ und $0 \leqq \delta \leqq \gamma$, bez. $0 \leqq \delta \leqq \gamma - 1$. Also ist beidemal $X > 0$, und somit in allen Fällen $\Theta > \nu$: $p > p_1''$, und umsomehr $> p''$.

Demnach ergiebt sich folgender Satz:

Wenn n und ν (> 1) gegeben ist, also wenn wir uns auf die Betrachtung der Curven n^{ter} Ordnung auf F^3 beschränken, welche ihre höchstgetroffene Grade in $n - \nu$ Punkten schneiden, so haben wir als untere Grenze des Geschlechts

$$p'' = \tfrac{1}{2}\{(\nu - 1)(n - 2\nu - 2)\};$$

Diese untere Grenze ist selbstverständlich werthlos für solche ν, bei denen $n - 2\nu - 2 < 0$.

Aber auch dann, wenn $p'' \geqq 0$, wird sie nicht erreicht, sobald die beiden Bedingungen, dass $\Theta \geqq 4\nu - n$ und dass Θ mit n gleichartig sein muss, Θ ganz aus dem Spielraum: $\Theta \leqq \nu$ ausschliessen, oder wenigstens die Werthe $\Theta = 0$, $\Theta = \nu$ nicht zulassen. Ist mindestens $\Theta = \nu$ möglich, dann ergiebt sich p'' als erreichte untere Grenze; ist weder $\Theta = 0$, noch $\Theta = \nu$ möglich, wohl aber $\Theta = \nu - 1$ oder $\Theta = 1$, dann wird blos $p_1'' = \frac{1}{2}(\nu - 1)(n - 2\nu - 1)$ erreicht. Sonst ist $p > p_1''$. So ist, wenn $n = 20$, wo $\nu \leqq 12$ ist, in den Fällen $\nu = 2, 3, 4, 5, 6$ die wirklich erreichte untere Grenze des Geschlechts 7, 13, 15, 18, 15; in den Fällen $\nu = 7, 8, 9$ die nicht erreichte untere Grenze 15, 10, 4. Für $\nu = 10, 11, 12$ wird der Satz werthlos.

13. Fassen wir zunächst $\nu = 2$ in's Auge. Für gerade n, welche $\geqq 8$ sind, wird: $\Theta \geqq 4\nu - n$ von selbst erfüllt: $\Theta = 0$ und $\Theta = \nu = 2$ sind möglich, bei $n = 6$ wenigstens $\Theta = 2$. Also wird $p'' = \frac{1}{2}n - 3$

erreicht. Für ungerade n, welche ≥ 7 sind, ist $\Theta = 1 = \nu - 1$ möglich; also wird $p_1'' = \frac{1}{2}(n-5)$ erreicht.

Mithin erhält man bei den Curven von höherer als fünfter Ordnung, welche der höchstgetroffenen Geraden in $n-2$ Punkten begegnen, als kleinstes Geschlecht $\left[\frac{n-5}{2}\right]$.

Beachten wir, dass $\left[\frac{n-5}{2}\right] = 0$, wenn $n = 6$; dass also bei der 6. Ordnung auch noch der Fall $\nu = 2$ eine Curve vom Geschlecht 0 liefert, und nur eine, weil $\Theta = 0$ nicht möglich ist.

Vergleichen wir nun dieses Geschlecht $\left[\frac{n-5}{2}\right]$ mit solchen p'' oder p_1'', die sich bei ν ergeben, welche > 2, aber immerhin noch so beschaffen sind, dass sie Werthe $\Theta \leq \nu$ ermöglichen, bei denen p'', p_1'' sich ergeben.

Wir bilden also die Differenz:

$$Y = p'' - \left[\frac{n-5}{2}\right], \quad \text{bez.} \quad Y_1 = p_1'' - \left[\frac{n-5}{2}\right].$$

1) Wenn n, ν beide gerade sind, dann kann $\Theta = \nu$ sein; damit dies möglich sei, muss $4\nu - n \leq \nu$ sein, oder $n \geq 3\nu$. Wir haben dann, den Werth von p'' einsetzend:

$$Y = \tfrac{1}{2}\{n(\nu-2) - 2(\nu^2-1) + 6\};$$

oder wenn wir n durch seinen kleinsten Werth 3ν ersetzen:

$$Y \geq \tfrac{1}{2}\{(\nu-3)^2 - 1\};$$

d. i., da ν jetzt > 3 ist,

$$Y \geq 0.$$

2) n gerade, ν ungerade; Θ kann nicht ν sein; damit $\nu - 1$ erreicht werde, muss $n \geq 3\nu + 1$ sein. Wir erhalten:

$$Y_1 = \tfrac{1}{2}\{n(\nu-2) - (\nu-1)(2\nu+1) + 6\} \geq \tfrac{1}{2}\{(\nu-2)^2 + 1\} > 0.$$

Ist aber $n > 4\nu$, so wird $\Theta = 0$ erreicht; dann haben wir:

$$Y = \tfrac{1}{2}\{n(\nu-2) - 2(\nu^2-1) + 6\},$$

wie in 1); aber nun kann n durch 4ν ersetzt werden; also:

$$Y \geq (\nu-2)^2 > 0.$$

3) n ungerade, ν gerade; damit $\nu - 1$ erreicht werde, muss $n \geq 3\nu + 1$ sein.

$$Y_1 = \tfrac{1}{2}\{n(\nu-2) - (\nu-1)(2\nu+1) + 5\} \geq \tfrac{1}{2}(\nu-2)^2 > 0.$$

4) n ungerade, ν ungerade; damit $\Theta = \nu$ sei, muss $n \geq 3\nu$ sein.

$$Y = \tfrac{1}{2}\{n(\nu-2) - 2(\nu^2-1) + 5\} \geq \tfrac{1}{2}\{(\nu-3)^2 - 2\} > 0,$$

wenn $\nu \geq 5$.

Bei $\nu = 3$ ist $\frac{1}{2}\{\nu-3)^2 - 2\} = -1$; damit nun $Y = -1$, ist nothwendig: $n = 3\nu = 9$, ferner $\Theta = \nu = 3$ und dass die Maximalzerlegung 3, 0,.0, 0, 0 von 3 gewählt wird. Da bei $n = 9$, $\nu = 3$ $\Theta = 0$ ausgeschlossen ist und sonst $p > p''$, also

$$p - \left[\frac{n-5}{2}\right] = p - 2 > Y,$$

also > -1, oder ≥ 0 ist, für $n > 3\nu$ aber $Y \geq 0$ wird, so ist $n = 9$, $\nu = 3$, $\Theta = 3$, $q_1 = 3$, $q_2 = q_3 = q_4 = q_5 = 0$ der einzige Fall, wo $p'' < \left[\frac{n-5}{2}\right]$.

Abgesehen von dieser einen Art einer Raumcurve 9^{ter} Ordnung ist in allen Fällen, wo $\nu(>1)$ mit n gleichartige Werthe von Θ zulässt, welche $\leq \nu$ sind, das Geschlecht $\geq \left[\frac{n-5}{2}\right]$.

14. Dasselbe wollen wir nun beweisen für alle Werthe von $\nu(>2)$*); nur müssen wir dann p direct mit $\left[\frac{n-5}{2}\right]$ vergleichen, während im Vorhergehenden zwei Stufen gemacht worden sind, indem zunächst $p \geq p''$ oder p_1'', und dann p'' oder $p_1'' \geq \left[\frac{n-5}{2}\right]$ nachgewiesen wurde.

Ist $\Theta \leq \nu$, also je nach der Art von n mindestens $\Theta = \nu$ oder $\Theta = \nu - 1$ möglich, dann ist ja mindestens eins der beiden Geschlechter p'', p_1'' möglich. Mithin brauchen wir im Folgenden nur $\Theta > \nu$ anzunehmen. Es genügt die Vergleichung mit der grössern der beiden Zahlen $\frac{n-5}{2}$, $\frac{n}{2} - 3$; wir setzen also:

$$Z = p - \tfrac{n}{2} + \tfrac{5}{2} = \tfrac{1}{2}\{n(\nu-2) + \nu\Theta - 2\nu^2 + 7 - \Sigma q_i^2\}.$$

Wir unterscheiden wieder die beiden Fälle $\Theta > \nu$, $< 2\nu$ und $\Theta \geq 2\nu$.

Im ersten Falle hatten wir (Nr. 7) 3 Formen der grössten Quadratsumme Σq_i^2.

*) Für diesen Beweis sind, weil er *alle* Werthe von ν zulässt, die auf $\Theta > \nu$ bezüglichen Betrachtungen in Nr. 12 nicht nothwendig; doch haben sie ihren Werth gehabt für die Erlangung des Satzes über die untere Grenze des Geschlechts *bei gegebenem* ν.

1) $\Theta - \nu < q_2$; daraus folgt, da $q_2 \leq \frac{\nu}{2}$, $\Theta < \frac{3\nu}{2}$ und $n \leq \frac{5\nu}{2}$. Die grösste Quadratsumme war: $6\nu^2 + 3\Theta^2 - 8\Theta\nu$; wir setzen sie für Σq_i^2 ein und erhalten:

$$Z \geq \tfrac{1}{2} n(\nu - 2) - 4\nu^2 + \tfrac{3}{2}\Theta(3\nu - \Theta) + \tfrac{7}{2}.$$

In dem Intervalle von $\Theta = \nu + 1$ bis $\Theta = \left[\frac{3\nu}{2}\right]$ hat $\frac{3}{2}\Theta(3\nu - \Theta)$ seinen kleinsten Werth bei $\Theta = \nu + 1$; er ist $3\nu^2 + \frac{3}{2}(\nu - 1)$. Ersetzen wir es dadurch und zugleich n durch seinen kleinsten Werth $\frac{5\nu}{2}$, so ergiebt sich:

$$Z \geq \tfrac{1}{4}(\nu - 2)^2 + 1 > 0.$$

2) $\Theta - \nu > q_2$, $\leq 2q_2$. Daraus folgt: $\Theta - 2q_2 > \nu - q_2$, $\Theta \leq 2q_2 + \nu$; also $n \geq 3\nu - 2q_2$.

Aus $\Theta - \nu > 0$ folgt $q_3 > 0$, also auch $q_2 > 0$; da nun aber sogar $\Theta - \nu > q_2$, so muss $\Theta > \nu + 1$ sein.

Die Form der grössten Quadratsumme ist jetzt:

$$\nu^2 + (\Theta - \nu)^2 - 2q_2(\Theta - 2q_2);$$

dies setzen wir in Z ein und erhalten:

$$Z' = \tfrac{n}{2}(\nu - 2) - 2\nu^2 + \tfrac{1}{2}\Theta(3\nu - \Theta) + q_2(\Theta - 2q_2) + \tfrac{7}{2}.$$

Sei, während q_2 die zulässigen Werthe durchläuft, Z_0' das kleinste der Z', das also der grössten Quadratsumme entspricht, die bei den den obigen Bedingungen genügenden Zerlegungen vorkommt; so ist $Z \geq Z_0'$. Können wir nun für jeden *beliebigen* Werth von q_2 beweisen, dass $Z' > 0$, dann ist auch $Z_0' > 0$, $Z > 0$.

In dem Intervalle von $\Theta = \nu + 2$ bis zu $\Theta = 2\nu - 1$ nimmt $\frac{1}{2}\Theta(3\nu - \Theta)$ seinen kleinsten Werth bei $\Theta = 2\nu - 1$ an, nämlich $\frac{1}{2}(2\nu - 1)(\nu + 1)$. Hierdurch ersetzen wir es, ferner n durch seinen kleinsten Werth $3\nu - 2q_2$ und $\Theta - 2q_2$ durch die kleinere Grösse $\nu - q_2$; es ergiebt sich:

$$Z' > \tfrac{1}{2}(\nu - 2)(\nu - 3) - q_2(q_2 - 2).$$

Ist $q_2 = 1$, dann ist die rechte Seite positiv; ist aber $q_2 > 1$ und also $q_2(q_2 - 2) \geq 0$, dann ersetze man q_2 durch seinen grössten Werth $\frac{\nu}{2}$ und erhält:

$$Z' > \tfrac{1}{4}(\nu - 3)^2 + \tfrac{3}{4} > 0.$$

3) $\Theta - \nu > 2q_2$. Dann ist: $2\Theta - \nu - 4q_2 > \nu$. Ferner ist $\Theta - \nu = q_3 + q_4 + q_5 \leq 3q_2$; also $\Theta \leq 3q_2 + \nu$ und $n \geq 3\nu - 3q_2$. Die Form der grössten Quadratsumme ist hier:

$$\nu^2 + (\Theta - \nu)^2 - 2q_2(2\Theta - \nu - 4q_2);$$

also:

$$Z' = \tfrac{n}{2}(\nu - 2) - 2\nu^2 + \tfrac{1}{2}\Theta(3\nu - \Theta) + q_2(2\Theta - \nu - 4q_2) + \tfrac{7}{2}.$$

Wir substituiren $\frac{1}{2}(2\nu - 1)(\nu + 1)$ für $\frac{1}{2}\Theta(3\nu - \Theta)$, wie in 2), sodann $3\nu - 3q_2$ für n und ν für $2\Theta - \nu - 4q_2$ und haben:

$$Z' > \tfrac{1}{2}(\nu - 2)(\nu - 3) - \tfrac{1}{2}q_2(\nu - 6).$$

Ist $\nu > 6$, dann setzen wir $\frac{\nu}{2}$ für q_2 und erhalten:

$$Z' > \tfrac{1}{2}(\nu - 1)^2 + \tfrac{5}{2} > 0.$$

Im zweiten Falle: $\Theta \geq 2\nu$ kennen wir nach Nr. 8 die grösste Quadratsumme. Wir erhalten also, wenn wir Σq_i^2 durch dieselbe ersetzen, in den beiden Fällen $\nu = 2\gamma$, $2\gamma + 1$:

1) $\nu = 2\gamma$, $\Theta = 4\gamma + \delta$, grösste Quadratsumme $4\gamma^2 + \delta^2$; also:

$$Z' = n(\gamma - 1) + \gamma\delta - 2\gamma^2 - \tfrac{1}{2}\delta^2 + \tfrac{7}{2}.$$

Wir setzen für n seinen kleinsten Werth $4\gamma - \delta$ und haben:

$$Z' \geq 2\gamma(\gamma - 2) - \tfrac{1}{2}\delta(\delta - 2) + \tfrac{7}{2} > 0, \quad \text{da } \delta \leq \gamma.$$

2) $\nu = 2\gamma + 1$; $\Theta = 4\gamma + 2 + \delta$; grösste Quadratsumme $(\gamma + 1)^2 + 3\gamma^2 + (\delta + 1)^2$; $n \geq 4\gamma + 2 - \delta$.

$$Z' = \tfrac{1}{2}n(2\gamma - 1) + \tfrac{1}{2}(2\gamma + 1)\delta - 2\gamma^2 - \gamma - \tfrac{1}{2}\delta^2 - \delta + \tfrac{5}{2},$$

$$Z' \geq 2\gamma^2 - \gamma - \tfrac{1}{2}\delta^2 + \tfrac{3}{2} > 0, \quad \text{da } \delta \leq \gamma - 1.$$

Demnach ist bei den Curven auf F^3 von der Ordnung $n > 5$, welche ihrer meistgetroffenen Geraden höchstens in $n - 2$ Punkten begegnen, das niedrigste Geschlecht $\left[\frac{n-5}{2}\right]$. *Eine Ausnahme bildet nur eine Curve 9. Ordnung, welche die beiden Geraden des meistgetroffenen Dupels in je 6, eine der 5 Schneidenden in 3 Punkten, die übrigen gar nicht trifft; bei ihr ist das Geschlecht* $\left[\frac{n-5}{2}\right] - 1 = 1$.

$\left[\frac{n-5}{2}\right] = 0$ für $n = 6$ und nur für $n = 6$. *Bei der 6ten Ordnung giebt es noch eine zweite Curve vom Geschlechte 0 und bei ihr allein.*

Für $n = 7, 8$ ist $\left[\frac{n-5}{2}\right] = 1$; also erst *von* $n = 10$ *ab entsteht eine Lücke hinter dem Geschlechte* 0 *bis* $\left[\frac{n-5}{2}\right]$. *Diese ist kleiner als die Lücke von* 0 *bis* $n - 3$ *auf* F^2. *Das Geschlecht* 1 *ist von der* 10. *Ordnung ab, das Geschlecht* $p > 1$ *von der Ordnung* $2p + 7$ *ab nicht mehr vorhanden.*

Haben wir nun für alle Combinationen (n, ν, ν', q_i), die sich durch das in Nr. 3 beschriebene Verfahren ergeben, $p \leqq 0$ gefunden, so folgt, wegen F. (3) in Nr. 2, $t_3 > 0$, und damit, dass *alle nach Nr.* 3 *construirten Curven möglich sind* (vergl. Nr. 3 gegen Ende).

IV.

Anzahl der Arten der Curven n^{ter} Ordnung auf F^{13}.

15. *Als verschiedene Curven sehe ich im Folgenden solche Curven* n^{ter} *Ordnung an, welche, wenn sie auch in* p *(oder* h*) übereinstimmen, sich verschiedenartig gegen die* 27 *Geraden der Fläche verhalten.*

Es läuft also die Frage darauf hinaus, *zu einem gegebenen* n *die möglichen* ν, *dann zu jedem* ν *die möglichen* Θ *zu bestimmen (oder umgekehrt) und für jede Combination* ν, Θ *die Zahl der Zerlegungen von* Θ *in* 5 *Summanden zu ermitteln, welche der Bedingung* $q_1 + q_2 \leqq \nu$ *genügen.* Jetzt ist diese Bedingung unerlässlich, weil unbedingt Wiederholungen zu vermeiden sind.

Dass man zu einer allgemeinen Formel gelange, ist nicht zu erwarten; ich will wenigstens ein Verfahren angeben, durch das man, wenn n nicht zu hoch ist, durch eine mässige Rechnung die Anzahl erhält.

Wir verstehen unter $\varphi(\Theta)$ *die Anzahl der Zerlegungen der (positiven ganzen) Zahl* Θ *in* 5 *ganze Summanden* q_1, q_2, q_3, q_4, q_5 *überhaupt, welche* $\geqq 0$ *sind, hingegen unter* $\varphi(\Theta, \nu)$ *die Zahl derjenigen Zerlegungen, bei denen die Summe der beiden grössten Summanden* $q_1 + q_2 \leqq \nu$ *ist.* Ist $\Theta \leqq \nu$, dann ist offenbar $\varphi(\Theta, \nu) = \varphi(\Theta)$.

Wenn nun die Ordnung n *gegeben ist, so bestimme man für jeden Werth von* ν *von* $\nu = 1$ *bis* $\nu = \left[\frac{2}{3}n\right]$ (wegen F. (8) in Nr. 3), *je nachdem* n *gerade oder ungerade ist, die geraden (inclus.* 0*) oder ungeraden Werthe von* Θ, *welche den Bedingungen genügen:*

$$\Theta \geqq 4\nu - n,$$

und:

$$\Theta \leqq 5\gamma \text{ für } \nu = 2\gamma,$$

bez.

$$\Theta \leqq 5\gamma + 1 \text{ für } \nu = 2\gamma + 1$$

(Nr. 6 und F. (11) in Nr. 11), *suche dann für jede solche Combination von ν und Θ die Zahl $\varphi(\Theta, \nu)$ und addire alle diese $\varphi(\Theta, \nu)$; so hat man die Zahl der verschiedenen Arten von Curven n^{ter} Ordnung auf F^3. Addirt man blos diejenigen für denselben Werth von ν, so hat man die Zahl der Arten von Curven n^{ter} Ordnung, die ihrer meistgetroffenen Geraden in $n - \nu$ Punkten begegnen.*

Als einfaches Beispiel, bei dem sich die $\varphi(\Theta, \nu)$ leicht berechnen lassen, sei

$$n = 8$$

gewählt.

ν	Θ	$\varphi(\Theta, \nu)$	Summe
1	0	1	1
2	0, 2, 4	1, 2, 1	4
3	4, 6	2, 1	3
4	8, 10	2, 1	3
			11;

zu $\nu = 5$, das noch $< \left[\frac{2}{3} \cdot 8\right]$, giebt es kein den obigen Bedingungen genügendes zugehöriges Θ.

Es giebt demnach 11 verschiedene Arten von Curven 8^{ter} Ordnung auf F^3 und davon schneiden 1, 4, 3, 3 die höchstgetroffene Gerade in 7, 6, 5, 4 Punkten. Ausführlicheres über diese Ordnung folgt im nächsten Abschnitte.

Sobald, bei gegebenem ν, $n \geq 4\nu - 1$ wird, wird die Bedingung: $\Theta \geq 4\nu - n$ von selbst erfüllt: man bemerke, dass für $n = 4\nu - 1$ als ungerades n ja Θ nicht 0 sein kann. Also sind dann sämmtliche zu dem ν gehörigen Θ zulässig, und zwar die geraden oder ungeraden, je nachdem n ist. Daraus folgt:

Die Anzahl der Arten von Curven gerader Ordnung n auf F^3, welche ihre höchstgetroffene Gerade in $n - \nu$ Punkten schneiden, ist von n unabhängig, sobald $n \geq 4\nu - 1$; und dasselbe gilt für die Curven ungerader Ordnung.

So haben wir, wie schon früher gefunden, für $\nu = 1$ (von $n = 3$ ab) nur eine Curvenart; für $\nu = 2$ von $n = 7$ ab 3 Arten von Curven bei jeder ungeraden und 4 Arten bei jeder geraden Ordnung; für $\nu = 3$ von $n = 11$ ab in beiden Fällen 6 Curvenarten; für $\nu = 4$ von $n = 15$ ab bei ungerader Ordnung 12, bei gerader 15 Arten; für $\nu = 5$ von $n = 19$ ab in beiden Fällen 21 Arten. Für $\nu = 4$ z. B. sind die beiden Zahlen $\varphi(1) + \varphi(3) + \varphi(5, 4) + \varphi(7, 4) + \varphi(9, 4) = 1 + 3 + 4 + 3 + 1 = 12$, bez. $\varphi(0) + \varphi(2) + \varphi(4) + \varphi(6, 4 + \varphi(8, 4) + \varphi(10, 4) = 1 + 2 + 5 + 4 + 2 + 1 = 15$.

Ob wirklich durchweg, bei ungeradem ν, die beiden Zahlen für

gerade und ungerade Ordnung einander gleich sind, d. h. ob durchweg, wenn $\nu = 2\gamma + 1$,

$$\varphi(0,\nu)+\varphi(2,\nu)+\cdots+\varphi(\Theta',\nu) = \varphi(1,\nu)+\varphi(3,\nu)+\cdots+\varphi(\Theta'',\nu)$$

ist, wo Θ', Θ'' die höchste gerade, ungerade Zahl ist, welche $\leq 5\gamma+1$, mag noch dahingestellt bleiben. —

Betrachten wir die 3 Fälle $n = 3\gamma,\ 3\gamma+1,\ 3\gamma+2$, so sind die höchsten Werthe $\left[\frac{2}{3}n\right]$ von ν bez. $2\gamma,\ 2\gamma,\ 2\gamma+1$; mithin liefern die beiden obigen Bedingungen für Θ:

$$\begin{aligned} \Theta &\geq 5\gamma,\ 5\gamma-1,\ 5\gamma+2, \\ \Theta &\leq 5\gamma,\ 5\gamma,\ \ 5\gamma+1; \end{aligned}$$

wenn also $n = 3\gamma+2$, so ist der höchste Werth $\left[\frac{2}{3}n\right] = 2\gamma+1$ von ν unbrauchbar, wie schon sich oben bei $n = 8$ zeigte. In den beiden andern Fällen $n = 3\gamma,\ 3\gamma+1$ liefert der höchste Werth 2γ von ν, da ja zudem Θ mit n zugleich gerade und ungerade sein muss und nur $5\gamma-1$ mit $3\gamma+1$ gleichartig ist, als einziges zugehöriges Θ 5γ, bez. $5\gamma-1$.

Der nächstniedrige Werth von ν giebt:

$$\begin{aligned} \nu\quad & 2\gamma-1,\ 2\gamma-1,\ 2\gamma, \\ \Theta &\geq 5\gamma-4,\ 5\gamma-5,\ 5\gamma-2, \\ \Theta &\leq 5\gamma-4,\ 5\gamma-5,\ 5\gamma; \end{aligned}$$

also in den beiden ersten Fällen wieder nur je einen Werth von Θ, $5\gamma-4$, bez. $5\gamma-5$, im letzten aber zwei $5\gamma-2$, 5γ, denn $5\gamma-1$ ist nicht mit $3\gamma+2$ gleichartig. In diesem Falle erniedrigen wir ν nochmals um 1, also zu $2\gamma-1$, um auch hier die beiden höchsten ν zu betrachten, und erhalten als zugehörige Θ $5\gamma-6$, $5\gamma-4$. Mithin haben wir in allen 3 Fällen zu den beiden höchsten ν die zugehörigen Θ:

n	3γ		$3\gamma+1$		$3\gamma+2$	
ν	$2\gamma-1$,	2γ	$2\gamma-1$,	2γ	$2\gamma-1$	2γ
Θ	$5\gamma-4$,	5γ	$5\gamma-5$,	$5\gamma-1$	$5\gamma-6$, $5\gamma-4$	$5\gamma-2$, 5γ.

Bemerken wir also zunächst, dass *in den 3 Fällen* $n = 3\gamma,\ 3\gamma+1,\ 3\gamma+2$ *die höchsten Werthe von* Θ *sind* $5\gamma,\ 5\gamma-1,\ 5\gamma$, *der von* ν *aber durchweg* 2γ *ist;* beobachten wir auch das Ausfallen von $5\gamma-2,\ 5\gamma-3$ in den beiden ersten Fällen.

Ferner sind für die beiden höchsten ν in den 3 Fällen die Artenanzahlen leicht zu finden. Wir haben, für $\nu = 2\gamma-1$,

$$\varphi(5\gamma-4, 2\gamma-1),\ \varphi(5\gamma-5, 2\gamma-1),\ \varphi(5\gamma-6, 2\gamma-1)+\varphi(5\gamma-4, 2\gamma-1),$$

oder, wenn wir lieber γ durch $\gamma' + 1$ ersetzen:

$$\varphi(5\gamma' + 1,\ 2\gamma' + 1),\quad \varphi(5\gamma',\ 2\gamma' + 1),$$
$$\varphi(5\gamma' - 1,\ 2\gamma' + 1) + \varphi(5\gamma' + 1,\ 2\gamma' + 1),$$

d. i., wie man bei diesen einfachen Beispielen leicht direct findet,

$$1,\ 2,\ 3 + 1 = 4.$$

Ebenso für den höchsten Werth $\nu = 2\gamma$:

$$\varphi(5\gamma,\ 2\gamma),\quad \varphi(5\gamma - 1,\ 2\gamma),\quad \varphi(5\gamma - 2,\ 2\gamma) + \varphi(5\gamma,\ 2\gamma),$$

d. i.

$$1,\ 1,\ 2 + 1 = 3.$$

Demnach giebt es in den 3 *Fällen* $n = 3\gamma,\ 3\gamma + 1,\ 3\gamma + 2$ *stets* 1, 2, 4 *Curvenarten, bei denen die höchst getroffene Gerade* $n - 2\gamma + 1$ *Schnitte hat, und* 1, 1, 3 *Curvenarten, bei denen die Zahl dieser Schnitte* $n - 2\gamma$ *ist. Weniger Schnitte kann keine Curve mit ihrer höchstgetroffenen Geraden haben.* —

Soll nach Θ angeordnet werden, so hat man für gerades n alle geraden, für ungerades n alle ungeraden Werthe von Θ von $\Theta = 0$ bis $\Theta = 5\gamma,\ 5\gamma - 1,\ 5\gamma$, je nachdem $n = 3\gamma,\ 3\gamma + 1,\ 3\gamma + 2$ ist, zu nehmen, jedem dann diejenigen ν von $\nu = 1$ ab zuzuordnen, welche den Bedingungen genügen:

$$\nu \geq \nu_\Theta,\quad \nu \geq \frac{\Theta + n}{4},$$

wo ν_Θ der kleinste zu einem $\Theta = 5\alpha + \beta$ gehörige Werth von ν ist, d. i. nach Nr. 6 $2\alpha + 2,\ 2\alpha + 1,\ 2\alpha$, je nachdem $\beta \geq 2,\ = 1,\ = 0$. Durch die jetzige obere Grenze von ν, in Verbindung mit der von Θ, wird bewirkt, dass ν niemals $\left[\frac{2}{3}n\right]$ überschreitet. Für jede Combination von Θ, ν ist $\varphi(\Theta, \nu)$ zu ermitteln und alle diese $\varphi(\Theta, \nu)$ sind zu summiren.

16. Die Functionen $\varphi(\Theta, \nu)$ und $\varphi(\Theta)$ führen wir auf andere Functionen zurück. Während bei $\varphi(\Theta, \nu)$ nur verlangt wurde: $q_1 + q_2 \leq \nu$, *sei* $\psi(\Theta, \nu)$ *die Zahl der Zerlegungen von* Θ *in* 5 *Summanden, bei denen* $q_1 + q_2 = \nu$; so dass, wenn $\nu > \Theta$, $\psi(\Theta, \nu) = 0$ ist. Ersichtlich ist:

a) $$\varphi(\Theta, \nu) = \sum_{\nu = \nu_\Theta}^{\nu = \nu} \psi(\Theta, \nu) \quad \text{in allen Fällen;}$$

b) $$\varphi(\Theta) = \varphi(\Theta, \Theta) = \sum_{\nu = \nu_\Theta}^{\nu = \Theta} \psi(\Theta, \nu);\quad \varphi(\Theta, \nu) = \varphi(\Theta), \quad \text{wenn } \nu \geq \Theta.$$

Wir verstehen unter $|x|$, je nachdem x eine ganze Zahl ist oder nicht, x selbst oder die nächst höhere ganze Zahl, also $[x] + 1$.

Ist nun q_1, q_2, q_3, q_4, q_5 eine Zerlegung von Θ, bei welcher $q_1 + q_2 = \nu$; so ist $q_3 + q_4 + q_5 = \Theta - \nu$. Nothwendig ist:

c) $$q_3 \geq \left| \frac{\Theta - \nu}{3} \right|,$$

und da $q_2 \geq q_3$, auch:

d) $$q_2 \geq \left| \frac{\Theta - \nu}{3} \right|;$$

so dass wir für diese beiden Zahlen dieselbe untere Grenze haben: $\left| \frac{\Theta - \nu}{3} \right|$. Die obere Grenze für q_2 ergiebt sich offenbar:

e) $$q_2 \leq \left[\frac{\nu}{2} \right].$$

Sei nun (q_2) die Anzahl der möglichen Werthe von q_2 zwischen den beiden Grenzen, also $(q_2) = \left[\frac{\nu}{2} \right] - \left| \frac{\Theta - \nu}{3} \right| + 1$.

Bei q_3 hingegen ist die obere Grenze nicht so einfach. Einerseits ist $q_3 \leq q_2$, andererseits $q_3 \leq \Theta - \nu$. So lange demnach $q_2 \leq \Theta - \nu$, ist q_2 obere Grenze von q_3; wird $q_2 \geq \Theta - \nu$, dann wird $\Theta - \nu$ obere Grenze. Ist aber $\Theta - \nu > \left[\frac{\nu}{2} \right]$, dann kann letzteres nicht geschehen, und obere Grenze ist immer q_2 und oberste wird $\left[\frac{\nu}{2} \right]$. Was also die ober*ste* Grenze anlangt, so ist:

f) $$q_3 \leq \Theta - \nu, \quad \text{oder} \leq \left[\frac{\nu}{2} \right],$$

je nachdem $\Theta - \nu$ oder $\left[\frac{\nu}{2} \right]$ die kleinere Zahl ist, und die Anzahl (q_3) der möglichen q_3 ist in dem einen Falle $\Theta - \nu - \left| \frac{\Theta - \nu}{3} \right| + 1$ d. i. $\left[\frac{2}{3} (\Theta - \nu) \right] + 1$, im andern (q_2).

Für jedes der möglichen q_2 aber ergiebt sich je als obere Grenze von q_3 die kleinere der beiden Zahlen q_2, $\Theta - \nu$.

Bedeutet weiter $\chi(\Theta - \nu, q_2)$ die Anzahl der Zerlegungen von $\Theta - \nu$ in drei Summanden, deren grösster $\leq q_2$, so ist, wenn $\left[\frac{\nu}{2} \right] > \Theta - \nu$, für alle q_2, welche $\geq \Theta - \nu$ sind,

g) $$\chi(\Theta - \nu, q_2) = \chi(\Theta - \nu, \Theta - \nu).$$

Ferner ist:

h) $$\psi(\Theta, \nu) = \sum_{q_2 = \left| \frac{\Theta - \nu}{3} \right|}^{q_2 = \left[\frac{\nu}{2} \right]} \chi(\Theta - \nu, q_2).$$

Endlich seien noch die Grundfunctionen eingeführt:

$\omega(\sigma)$ *sei die Anzahl der Zerlegungen von* σ *in zwei Summanden* (*immer* 0 *eingeschlossen*) *und* $\omega(\sigma, \tau)$ *die Anzahl derjenigen unter ihnen, bei denen der grössere* $\leqq \tau$ *ist;* so dass wiederum, für $\tau \geqq \sigma$,

$$\omega(\sigma, \tau) = \omega(\sigma).$$

Man findet ohne Schwierigkeit:

(i) $$\omega(\sigma) = \left[\frac{\sigma}{2}\right] + 1,$$

(k) $$\omega(\sigma, \tau) = \left[\frac{\sigma}{2}\right] + 1 - (\sigma - \tau),$$

wenn

$$\tau \leqq \sigma.$$

Ist $\Theta - \nu \geqq \left[\frac{\nu}{2}\right]$, so gilt für alle möglichen q_2, wenn aber $\Theta - \nu < \left[\frac{\nu}{2}\right]$, nur für die q_2, welche $\leqq \Theta - \nu$:

(l) $$\chi(\Theta - \nu, q_2) = \sum_{q_3 = \left|\frac{\Theta - \nu}{3}\right|}^{q_3 = q_2} \omega(\Theta - \nu - q_3, q_3);$$

im letzteren Falle: $\Theta - \nu < \left[\frac{\nu}{2}\right]$ ist für die über $\Theta - \nu$ befindlichen q_2 wegen (g):

$$\chi(\Theta - \nu, q_2) = \chi(\Theta - \nu, \Theta - \nu) = \sum_{q_3 = \left|\frac{\Theta - \nu}{3}\right|}^{q_3 = \Theta - \nu} \omega(\Theta - \nu - q_3, q_3);$$

setzt man aber fest, dass $\omega(\sigma, \tau)$ Null ist, sobald σ negativ wird, dann kann man auch für diesen Fall die Formel (l) benutzen. Mit jeder Einheit, um welche q_2 wächst, nimmt die Summe in (l) um ein Glied zu (das, nach der eben gemachten Festsetzung, auch Null sein kann). Setzt man nun die Ausdrücke für die χ aus (l) in (h) ein, dessen Summe (q_2) Glieder hat, so findet man, dass das dem untersten Werthe $q_3 = \left|\frac{\Theta - \nu}{3}\right|$ entsprechende Glied $\omega\left(\left[\frac{2}{3}(\Theta - \nu)\right], \left|\frac{\Theta - \nu}{3}\right|\right)$ (q_2)-mal, das nächste $\omega\left(\left[\frac{2}{3}(\Theta - \nu)\right] - 1, \left|\frac{\Theta - \nu}{3}\right| + 1\right)$ $\{(q_2) - 1\}$-mal auftritt, und so fort, und *es ergiebt sich für* $\psi(\Theta, \nu)$ *folgende Formel:*

(m) $$\psi(\Theta, \nu) = \Sigma \eta \cdot \omega(\sigma, \tau),$$

worin $\sigma + \tau = \Theta - \nu$ *ist,* η *und* σ *im ersten Gliede den Werth*

$$(q_2) = \left[\frac{\nu}{2}\right] - \left|\frac{\Theta - \nu}{3}\right| + 1, \text{ bez. } \left[\frac{2}{3}(\Theta - \nu)\right]$$

haben und mit jedem folgenden Gliede um 1 *abnehmen: die Reihe bricht dann ab, wenn entweder* η *Null oder* σ *negativ wird.*

So ist z. B.

$$\psi(31,19) = 6\omega(8,4) + 5\omega(7,5) + 4\omega(6) + 3\omega(5) + 2\omega(4) + \omega(3)$$
$$= 6 + 10 + 16 + 9 + 6 + 2 = 49;$$
$$\psi(31,26) = 12\omega(3,2) + 11\omega(2) + 10\omega(1) + 9\omega(0)$$
$$= 12 + 22 + 10 + 9 = 53.$$

Für die dem Θ nächsten ν findet man aus (m) sehr schnell:

$$\psi(\Theta,\Theta) = \left(\left[\frac{\Theta}{2}\right] + 1\right) . \omega(0) = \left[\frac{\Theta}{2}\right] + 1 = \omega(\Theta),$$

wie man auch direct einsieht;

$$\psi(\Theta,\Theta-1) = \left[\frac{\Theta-1}{2}\right]\omega(0) = \left[\frac{\Theta-1}{2}\right],$$

$$\psi(\Theta,\Theta-2) = \left[\frac{\Theta-2}{2}\right]\omega(1) + \left(\left[\frac{\Theta-2}{2}\right] - 1\right)\omega(0)$$
$$= 2\left[\frac{\Theta-2}{2}\right] - 1, \quad \text{wofern } \left[\frac{\Theta-2}{2}\right] \geq 1,$$

$$\psi(\Theta,\Theta-3) = 3\left[\frac{\Theta-3}{2}\right] - 3, \quad \text{wenn } \left[\frac{\Theta-3}{2}\right] \geq 2,$$

$$\psi(\Theta,\Theta-4) = 4\left[\frac{\Theta-4}{2}\right] - 7, \quad \text{wenn } \left[\frac{\Theta-4}{2}\right] \geq 3, \text{ u. s. w.}$$

Wenn die Bedingungen nicht erfüllt werden, wird nämlich η schon früher 0.

Doch wichtiger für unsern Zweck sind der unterste Werth ν_Θ von ν und die Nachbarwerthe. Z. B. für die Berechnung der Arten-Anzahlen der Curven bis zur 20. Ordnung genügen, mit sehr wenigen Ausnahmen, die Werthe $\psi(\Theta, \nu_\Theta)$, $\psi(\Theta, \nu_\Theta + 1)$, $\psi(\Theta, \nu_\Theta + 2)$.

Wir haben zunächst:

Θ	5α,	$5\alpha+1$,	$5\alpha+2$,	$5\alpha+3$,	$5\alpha+4$,
ν_Θ	2α,	$2\alpha+1$,	$2\alpha+2$,	$2\alpha+2$,	$2\alpha+2$,
$\Theta - \nu_\Theta$	3α,	3α,	3α,	$3\alpha+1$,	$3\alpha+2$,
$\left\|\frac{\Theta-\nu_\Theta}{3}\right\|$	α,	α,	α,	$\alpha+1$,	$\alpha+1$,
$\left[\frac{\nu_\Theta}{2}\right]$	α,	α,	$\alpha+1$,	$\alpha+1$,	$\alpha+1$,

Ausser, wenn $\Theta = 5\alpha + 2$, hat demnach q_2 nur einen Werth bez. α, α, $\alpha+1$, $\alpha+1$; $(q_2) = 1$; mithin ist in diesen 4 Fällen nach Formel (m):

$$\psi(\Theta, \nu_\Theta) = \omega(2\alpha, \alpha), \ \omega(2\alpha, \alpha), \ \omega(2\alpha, \alpha+1), \ \omega(2\alpha+1, \alpha+1)$$
$$= 1, 1, 2, 1;$$

nur im dritten Falle auch 1, wenn $\alpha = 0$, weil dann $2\alpha < \alpha + 1$.

Ist aber $\Theta = 5\alpha + 2$, dann erhält man zwei mögliche Werthe von q_2, nämlich α, $\alpha + 1$; also ist $(q_2) = 2$ und:

$\psi(\Theta, \nu_\Theta) = 2 \cdot \omega(2\alpha, \alpha) + \omega(2\alpha - 1, \alpha + 1) = 2 \cdot 1 + 2 = 4$;

ausgenommen $\alpha = 1$, wo $\omega(2\alpha - 1, \alpha + 1) = 1$, und $\alpha = 0$, wo es $= 0$ ist.

Demnach ist:

$\Theta =$	5α,	$5\alpha+1$,	$5\alpha+2$,	$5\alpha+3$,	$5\alpha+4$	
$\psi(\Theta,\nu_\Theta) =$	1,	1,	4,	2,	1,	wenn $\alpha > 1$,
$=$	1,	1,	3,	2,	1,	wenn $\alpha = 1$,
$=$		1,	2,	1,	1,	wenn $\alpha = 0$.

Ebenso findet man:

$\Theta =$	5α,	$5\alpha+1$,	$5\alpha+2$,	$5\alpha+3$,	$5\alpha+4$	
$\psi(\Theta,\nu_\Theta+1) =$	1,	5,	5,	4,	2,	wenn $\alpha > 2$,
$=$	1,	4,	4,	4,	2,	wenn $\alpha = 2$,
$=$	1,	3,	3,	3,	2,	wenn $\alpha = 1$,
$=$				2,	1,	wenn $\alpha = 0$;

bei den drei fehlenden würde $\nu_\Theta + 1 > \Theta$ sein. Und endlich:

$\Theta =$	5α,	$5\alpha+1$,	$5\alpha+2$,	$5\alpha+3$,	$5\alpha+4$	
$\psi(\Theta,\nu_\Theta+2) =$	7,	7,	17,	13,	11,	wenn $\alpha > 5$,
$=$	7,	7,	16,	13,	11,	wenn $\alpha = 5$,
$=$	7,	7,	15,	12,	11,	wenn $\alpha = 4$,
$=$	6,	6,	12,	11,	10,	wenn $\alpha = 3$,
$=$	5,	5,	9,	8,	9,	wenn $\alpha = 2$,
$=$	2,	2,	3,	5,	6,	wenn $\alpha = 1$,
$=$					3,	wenn $\alpha = 0$.

Sind nun die $\psi(\Theta, \nu)$ berechnet, so erhalten wir vermittels der Formel (a) die $\varphi(\Theta, \nu)$; alle $\varphi(\Theta, \nu)$, bei denen $\nu > \Theta$, sind, wie gesagt, gleich $\varphi(\Theta, \Theta) = \varphi(\Theta)$. Hat man z. B. gefunden: $\psi(5, 2)$, $\psi(5, 3)$, $\psi(5, 4)$, $\psi(5, 5)$ bez. gleich 1, 1, 2, 3, so giebt das erste allein, die Summe der 2, 3 ersten, aller 4 bez. $\varphi(5, 2)$, $\varphi(5, 3)$, $\varphi(5, 4)$, $\varphi(5, 5) = \varphi(5)$; $\varphi(5, 6)$, $\varphi(5, 7)$, ... sind alle $\varphi(5)$; wir erhalten 1, 2, 4, 7, 7, 7, ...

17. Wir geben z. B. die eingehendere Behandlung von

$n = 15$.

Θ	ν	ψ	φ	Summe	ν	Θ	φ	Summe
1	1,2,3,4	1	1,1,1,1	4	1	1	1	1
3	2,3,4	1,2	1,3,3	7	2	1,3,5	1,1,1	3

Θ	ν	ψ	φ	Summe	ν	Θ	φ	Summe
5	2,3,4,5	1,1,2,3	1,2,4,7	14	3	1,3,5	1,3,2	6
7	4,5	3,3	3,6	9	4	1,3,5,7,9	1,3,4,3,1	12
9	4,5,6	1,2,6	1,3,9	13	5	5,7,9,11	7,6,3,1	17
11	5,6	1,4	1,5	6	6	9,11,13,15	9,5,2,1	17
13	6,7	2,4	2,6	8	7	13,15	6,2	8
15	6,7	1,1	1,2	3	8	17,19	4,1	5
17	8	4	4	4	9	21	1	1
19	8	1	1	1	10	25	1	1
21	9	1	1	1				71.
25	10	1	1	1				
				71				

Ferner, indem wir die ausführlichere Besprechung der Curven bis zur 10ten Ordnung dem nächsten Abschnitte vorbehalten, geben wir in der folgenden Tabelle *die Zahlen der Arten der Curven auf F^3 für die* 11te *bis* 20ste *Ordnung und zwar sowohl die Zahlen der Arten der Curven* n^{ter} *Ordnung, welche der höchstgetroffenen Geraden in* $n - \nu$ *Punkten begegnen, als auch die Gesammtzahlen.*

	n									
ν	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	3	4	3	4	3	4	3	4	3	4
3	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
4	8	12	11	14	12	15	12	15	12	15
5	4	7	10	13	17	18	20	20	21	21
6	3	5	8	12	17	22	26	32	33	37
7		1	2	4	8	12	18	25	32	38
8		1	1	3	5	9	13	23	27	38
9					1	2	4	8	13	20
10					1	1	3	5	9	14
11								1	2	4
12								1	1	3
Gesammtzahl	25	37	42	57	71	90	106	139	160	201.

Es giebt demnach z. B. 106 Arten von Curven 17ter Ordnung und bez. 1, 3, 6, 12, 20, 26, 18, 13, 4, 3 Arten von solchen unter ihnen, die

der höchstgetroffenen Geraden in 16, 15, 14, 13, 12, 11, 10, 9, 8, 7 Punkten begegnen.

Die in Nr. 15 ausgesprochenen Gesetzmässigkeiten kann man in dieser Tabelle erkennen.

V.

Genauere Beschreibung der Curven auf F^3 bis zur 10^{ten} Ordnung.

18. Am interessantesten sind jedenfalls die niedrigsten Ordnungen, und *bis* $n = 10$ *habe ich die verschiedenen Curvenarten, in Bezug auf ihr Verhalten gegen die Geraden der Fläche, ihr Geschlecht* p *oder Zahl* h *der scheinbaren Doppelpunkte, ihre Mächtigkeit* t_3 *auf der Fläche und ihre Mächtigkeit* u_3 *im Raume untersucht* und theile die Resultate in den folgenden Tabellen mit. Unter dem u_3 einer Curve (n, p) ist nicht die Mächtigkeit der allgemeinen Curve n^{ter} Ordnung vom Geschlechte p, sondern *der auf einer cubischen Fläche befindlichen* gemeint.

Jene Mächtigkeit würde ich mit u bezeichnen*); sie ist im Allgemeinen $> u_3$ sobald $n > 6$. Verstehen wir, wie a. unten a. O., unter f_3 die Anzahl der Punkte einer auf einer cubischen Fläche möglichen Curve, durch welche eine F^3 gelegt werden muss, um die ganze Curve zu enthalten, unter v die Mächtigkeit der durch die Curve zu legenden F^3, so ist $v = 19 - f_3$.

$v > 0$ nur für die Curven, welche ganz oder theilweise den Schnitt zweier F^3 bilden, und für diese – ausser $(6,0)'$ und $(7,3)'$ — ist f_3 in Nr. 73 meiner „Flächen 3. O." oder a. eben a. O. zu finden; sonst ist $v = 0$ (d. h. es geht nur eine F^3 durch die Curve) und dann im Folgenden nicht angegeben.

Ferner ist: $u_3 = t_3 + 19 - v$.

Die Curven sind als (n, p) nach Ordnung und Geschlecht bezeichnet und, solche, die in n und p (und dann auch in h, t_3) übereinstimmen, durch Accente unterschieden. Dieser Bezeichnung folgt in den Tabellen das Verhalten gegen das meistgetroffene Dupel: vor dem Semicolon stehen die Zahlen $n - \nu$, $n - \nu'$ der Schnitte mit den Geraden des Dupels selbst, hinter ihm die q_i der Schnitte mit den 5 Schneidenden. Nach Nr. 3. sind dann leicht die Schnittzahlen mit den 20 übrigen zu ermitteln: die Colonne g_i giebt die Zahl der i-mal getroffenen Geraden. Die letzten Colonnen geben h, t_3, u_3 (ev. v).

$n = 3$.

		meistgetr. Dupel	g_2	g_1	g_0	h	t_3	v	u_3
1)	(3,0)	2,2; 1,0,0,0,0	6	15	6	1	2	9	12
2)	(3,1)	1,1; 1,1,1,1,1		27		0	3	10	12.

*) Was ich in Borchardt's Journal Bd. 88, S. 234, 235 mit u bezeichnet habe, ist das jetzige u_3.

$n = 4$.

		meistgetr.Dupel	g_3	g_2	g_1	g_0	h	t_3	v	u_3
1)	(4,0)	3,3; 0,0,0,0,0	2	10	10	5	3	3	6	16
2)	(4,1)	2,2; 1,1,1,1,0		10	16	1	2	4	7	16.

$n = 5$.

		meistgetr.Dupel	g_4	g_3	g_2	g_1	g_0	h	t_3	v	u_3
1)	(5,0)	4,3; 1,0,0,0,0	1	5	10	6	5	6	4	3	20
2)	(5,1)	3,3; 1,1,1,0,0		5	10	10	2	5	5	4	20
3)	(5,2)	3,2; 1,1,1,1,1		1	10	16		4	6	5	20.

$n = 6$.

		meistgetr.Dupel	g_5	g_4	g_3	g_2	g_1	g_0	h	t_3	v	u_3
1)	(6, 0)′	5,4; 0,0,0,0,0	1	1	10	5	5	5	10	5	1	23
2)	(6, 0)″	4,4; 2,0,0,0,0		6		15		6	10	5		24
3)	(6, 1)	4,4; 1,1,0,0,0		3	6	9	6	3	9	6	1	24
4)	(6, 2)	4,3; 1,1,1,1,0		1	8	9	8	1	8	7	2	24
5)	(6, 3)	3,3; 2,1,1,1,1			6	15	6		7	8	3	24
6)	(6, 4)	2,2; 2,2,2,2,2				27			6	9	4	24.

$n = 7$.

		meistgetr.Dupel	g_6	g_5	g_4	g_3	g_2	g_1	g_0	h	t_3	u_3
1)	(7,0)	6,4; 1,0,0,0,0	1		5	10	1	5	5	15	6	25
2)	(7,1)	5,5; 1,0,0,0,0		2	4	6	8	3	4	14	7	26
3)	(7,2)	5,4; 1,1,1,0,0		1	4	8	6	6	2	13	8	27
4)	(7,3)′	5,3; 1,1,1,1,1		1		16		10		12	9	27
5)	(7,3)″	4,4; 2,1,1,1,0			5	6	10	5	1	12	9	28
6)	(7,4)	4,4; 1,1,1,1,1			2	10	10	5		11	10	28
7)	(7,5)	3,3; 2,2,2,2,1				10	16	1		10	11	28.

Bei 4), 6), 7) ist $v = 1, 1, 2$.

$n = 8$.

	meistgetr. Dupel	g_7	g_6	g_5	g_4	g_3	g_2	g_1	g_0	h	t_3	u_3
1) (8, 0)	7,5; 0,0,0,0,0	1		1	10	5		5	5	21	7	26
2) (8, 1)′	6,6; 0,0,0,0,0		2		10		10		5	20	8	27
3) (8, 1)″	6,5; 2,0,0,0,0		1	5		10	5	1	5	20	8	27
4) (8, 2)	6,5; 1,1,0,0,0		1	2	6	6	5	4	3	19	9	28
5) (8, 3)′	6,4; 1,1,1,1,0		1		8	8	1	8	1	18	10	29
6) (8, 3)″	5,5; 2,1,1,0,0			4	3	8	6	4	2	18	10	29
7) (8, 4)	5,5; 1,1,1,1,0			2	6	6	8	4	1	17	11	30
8) (8, 5)′	5,4; 2,1,1,1,1			1	5	10	6	5		16	12	31
9) (8, 5)″	4,4; 2,2,2,2,0				10		16		1	16	12	31
10) (8, 6)	4,4; 2,2,2,1,1				5	10	10	2		15	13	32
11) (8, 7)	4,3; 2,2,2,2,2				1	16	10			14	14	32.

Bei 11) ist $v = 1$.

$n = 9$.

	meistgetr. Dupel	g_8	g_7	g_6	g_5	g_4	g_3	g_2	g_1	g_0	h	t_3	u_3
1) (9,0)	8,5; 1,0,0,0,0	1			5	10	1		5	5	28	8	27
2) (9,1)	6,6; 3,0,0,0,0			6			15			6	27	9	28
3) (9,2)	7,6; 1,0,0,0,0		1	1	4	6	4	5	2	4	26	10	29
4) (9,3)′	7,5; 1,1,1,0,0		1		4	8	4	2	6	2	25	11	30
5) (9,3)″	6,6; 2,1,0,0,0			3	3	3	9	3	3	3	25	11	30
6) (9,4)′	7,4; 1,1,1,1,1		1			16			10		24	12	31
7) (9,4)″	6,6; 1,1,1,0,0			2	3	6	5	6	3	2	24	12	31
8) (9,5)	6,5; 2,1,1,1,0			1	4	5	7	5	4	1	23	13	32
9) (9,6)′	6,5; 1,1,1,1,1			1	1	10	5	5	5		22	14	33
10) (9,6)″	5,5; 3,1,1,1,1				6		15		6		22	14	33
11) (9,6)‴	5,5; 2,2,2,1,0				5	5	5	10	1	1	22	14	33
12) (9,7)	5,5; 2,2,1,1,1				3	6	9	6	3		21	15	34.
13) (9,8)	5,4; 2,2,2,2,1				1	8	9	8	1		20	16	35
14) (9,9)	4,4; 3,2,2,2,2					6	15	6			19	17	36
15)*) (9,10)	3,3; 3,3,3,3,3						27				18	18	36.

Nur bei 15) ist $v = 1$.

*) Im Report of the British Association for 1881 habe ich irrthümlich nur von 14 Arten von Curven 9. Ordnung gesprochen.

$n = 10$.

	meist getr. Dupel	g_9	g_8	g_7	g_6	g_5	g_4	g_3	g_2	g_1	g_0	h	t_3	u_3
1 (10,0)	9,6; 0,0,0,0,0	1			1	10	5			5	5	36	9	28
2)(10,2)′	8,7; 0,0,0,0,0		1	1		10		5	5		5	34	11	30
3)(10,2)″	8,6; 2,0,0,0,0		1		5		10		6	1	4	34	11	30
4)(10,3)′	8,6; 1,1,0,0,0		1		2	6	6	2	3	4	3	33	12	31
5)(10,3)″	7,7; 2,0,0,0,0			2	4		6	8	1	2	4	33	12	31
6)(10,4)′	8,5; 1,1,1,1,0		1			8	8		1	8	1	32	13	32
7)(10,4)″	7,7; 1,1,0,0,0			2	1	6	3	6	4	2	3	32	13	32
8)(10,5)	7,6; 2,1,1,0,0			1	5	7	7	2	1	2	2	31	14	33
9)(10,6)′	7,6; 1,1,1,1,0			1	1	6	5	5	8		1	30	15	34
10)(10,6)″	6,6; 3,1,1,1,0				5	1	5	10		5	1	30	15	34
11)(10,6)‴	6,6; 2,2,2,0,0				5		10		10		2	30	15	34
12)(10,7)′	7,5; 2,1,1,1,1			1		5	10	1	5	5		29	16	35
13)(10,7)″	6,6; 2,2,1,1,0				3	4	5	6	6	2	1	29	16	35
14)(10,8)′	6 6; 2,1,1,1,1				2	4	6	8	3	4		28	17	36
15)(10,8)″	6,5; 2,2,2,2,0				1	8	1	8	8		1	28	17	36
16)(10,9)	6,5; 2,2,2,1,1				1	4	8	6	6	2		27	18	37
17)(10,10)′	6,4; 2,2,2,2,2				1		16		10			26	19	38
18)(10,10)″	5,5; 3,2,2,2,1					5	6	10	5	1		26	19	38
19)(10,11)	5,5; 2,2,2,2,2					2	10	10	5			25	20	39
20)(10,12)	4,4; 3,3,3,3,2						10	16	1			24	21	40.

Zwischen 1) und 2) haben wir die Lücke: das Geschlecht 1 fehlt.

19. Wir verweisen hier auf die zweite Curve 6. Ordnung und die zweite Curve 9. Ordnung als die beiden, die im Abschnitte III eine gewisse Ausnahmestellung einnahmen. —

Dass *diejenigen Curven aus den vorhergehenden Tabellen, deren* $v > 0$ *ist, wirklich die beim Schnitte zweier* F^3 *vorkommenden Curven**) *sind*, ergiebt sich einfach. Zunächst giebt die Vergleichung des im Kap. V meines Buches Gesagten mit den Tabellen die Uebereinstimmung der Werthe g_i, h, und zwar so, dass die Curven 3. O. 1) und 2) der cubischen Raumcurve und der ebenen Curve 3. Ordnung; die Curven 4. Ordnung 1), 2) den Raumcurven 4. Ordnung zweiter und

*) Vergl. Kap. V meines Buchs über die Flächen 3. Ordnung (und Borchardt's Journal Bd. 88, S. 213 Abschn. V). Cf. auch Herrn Cremona's Abhandlung über die cubischen Flächen (Borchardt's Journal B. 68, S. 1) Kap. VIII.

erster Species; die 3 Curven 5. Ordnung 1), 2), 3) den Curven, welche zum vollen Schnitte zweier F^3 durch eine cubische Raumcurve und eine sie nicht schneidende Gerade, durch eine Raumcurve 4. Ordnung zweiter Species, eine solche der ersten Species ergänzt werden; die Curven 6. Ordnung 3), 4), 5), 6) den Curven, welche 3 windschiefe Gerade, einen Kegelschnitt und eine ihn nicht treffende Gerade, eine cubische Raumcurve, eine ebene Curve 3. Ordnung zu ihrer Ergänzung haben; die Curven 7. Ordnung 6), 7), die Curve 8. Ordnung 11) den Curven entsprechen, welche durch zwei windschiefe Gerade, einen Kegelschnitt, eine Gerade vervollständigt werden, und endlich die Curve 9. Ordnung 15) dem vollen Schnitte selbst.

Aber das genannte Kap. V bietet auch hinreichend Material, um für diese Schnittcurven ein meistgetroffenes Dupel und die Schnittzahlen der Geraden desselben und der Schneidenden zu ermitteln und die Uebereinstimmung zu constatiren.

Daraus folgt, dass unsere jetzigen Curven die Schnittcurven umfassen (denn die jetzige Ableitung ist die allgemeinere); da unsere Curven aber auch mit den Schnittcurven in der Mächtigkeit t_3 auf der Fläche übereinstimmen, wie die Vergleichung mit Borchardt's Journal Bd. 88, S. 234—235 zeigt, und, für ein bestimmtes Dupel als meistgetroffenes, von den jetzigen Curven durch t_3 Punkte der Fläche nur eine geht, wie in Nr. 3 am Schlusse bemerkt wurde, so müssen die aufgezählten Curven mit den Schnittcurven identisch sein.

$v > 0$ haben aber auch *die beiden Curven* $(6, 0)'$ *und* $(7, 3)'$; *diese Curven gehören auch zu den Schnittcurven zweier* F^3; ich habe sie in der That an beiden erwähnten Orten übersehen*) und muss hier noch den Beweis nachholen.

Wenn zwei F^3 *sich längs einer Geraden* g *berühren*, so haben sie ausserdem eine Curve 7. Ordnung R^7 gemein; da die von jeder Ebene durch g aus beiden Flächen ausgeschnittenen Kegelschnitte die g in den nämlichen Punkten treffen, so wird R^7 von der Ebene ausserhalb g nur in den beiden weiteren Schnittpunkten der Kegelschnitte getroffen und hat mit g selbst 5 Punkte gemein. Die 10 Geraden auf einer der beiden Flächen, welche g begegnen, berühren die andere dort und haben demnach mit R^7 nur einen Punkt gemein; die 16 übrigen Geraden aber ersichtlich 3 Punkte; also hat R^7 dieselbe g_i-Reihe, wie $(7, 3)'$.

Haben beide Flächen noch eine weitere Gerade g' gemein, die gegen g windschief ist, so zerfällt R^7 in diese Gerade und eine Raum-

*) Erst durch die vor kurzem im Journal für Math. erschienene Abhandlung des Herrn Nöther (Bd. 93, S. 271, insbes. § 15) bin ich darauf aufmerksam geworden. Febr. 1883.

curve 6. Ordnung R^6, welche g, eben so wie R^7, fünfmal, g' hingegen, wie bekannt, viermal trifft und von der man leicht findet, dass sie mit $(6, 0)'$ in der g_6-Reihe übereinstimmt. Berührung beider Flächen längs g, und Schnitt längs g', g'' würde bewirken, dass auch die drei g, g', g'' treffenden Geraden der einen Fläche auf der andern lägen. Ich unterdrücke den Nachweis, dass die beiden so erhaltenen Curven R^7 und R^6 auch dasselbe p haben wie $(7, 3)'$, $(6, 0)'$.

Beweisen wir nun, dass sie auch in der Mächtigkeit t_3 auf gegebener Fläche F^3 mit ihnen übereinstimmen; dann folgt aus den für die andern Schnittcurven eben angeführten Gründen die Identität.

Eine gegebene cubische Fläche F_0^3 längs einer Geraden g derselben zu tangiren, ist für eine andere F^3 eine neunfache Bedingung. Denn, wenn wir uns auch F^3 durch den Ebenenbüschel um g und einen projectiven Flächenbüschel 2. Ordnung erzeugt denken, so muss letzterer in g dieselbe Involution einschneiden, wie bei F_0^3, und je den beiden Flächen der erzeugenden Büschel von F_0^3 und F^3, welche dasselbe Punktepaar einschneiden, muss die nämliche Ebene im Büschel g entsprechen. Dass aber F^3 durch g geht, sind 4 Bedingungen; dass der Flächenbüschel die gegebene Involution einschneidet, sind 2 Bedingungen: nämlich im Ganzen giebt es ja ∞^{16} Flächenbüschel 2. Ordnung; legen wir aber durch zwei Paare der Involution je die ∞^7 Flächen 2. Ordnung, so constituiren diese ∞^{14} Büschel. Ist nun ein Büschel, welcher dieser doppelten Bedingung genügt, gewählt, so ist durch die obige Vorschrift über das Entsprechen der Ebenen und Flächen die Projectivität festgelegt, was also wiederum 3 Bedingungen macht; also haben wir im Ganzen 9.

Man kann auch so sagen: Man legt F^3 durch 4 Punkte von g und durch 5 Punkte der F_0^3, welche unendlich nahe an g liegen; beide Flächen müssen sich dann in 5 Punkten von g berühren, also längs der ganzen Geraden, da bei einfachem Schnitte nur 4 Berührungen möglich sind.

Die ∞^{10} Flächen F^3, welche also F_0^3 längs g tangiren, schneiden demnach ∞^9 der obigen Curven R^7 ein, da durch jede ∞^1 Flächen gehen, und die ∞^6 F^3, welche längs g berühren und längs g' schneiden, ∞^5 Curven R^6. Also ergeben sich dieselben Mächtigkeitsgrade für R^7, R^6 auf F^3, wie für $(7, 3)'$ und $(6, 0)'$.

Dass durch $(6, 0)'$ ∞^1 Flächen 3. Ordnung gehen, zeigt sich auch so: Jede F^3, gelegt durch je 4 Punkte der fünfmal und der viermal treffenden Geraden der $(6, 0)'$ und durch 10 Punkte der Curve selbst, enthält von letzterer 19 Punkte, also die ganze Curve. —

Da die Curve $(6, 0)'$ diejenige vom Geschlechte 0 ist, welche ihre analoge bei jeder andern Ordnung hat, so ist sie gewissermassen die regelmässige. Sie scheint aber die weniger bekannte zu sein; meistens wird nur

die andere Curve 6. Ordnung vom Geschlechte 0 erwähnt*), welche ein Sextupel viermal schneidender Geraden besitzt. Ihre Existenz ist von Herrn Nöther**) nachgewiesen, der a. a. O. zeigt, dass es je ∞^{3n+5} Raumcurven n^{ter} Ordnung giebt, welche eine $(n-1)$-punktige Sehne haben. In dem Aufsatze im Journale für Math. bezeichnet er $(6, 0)'$ als Specialfall von $(6, 0)''$; auf der F^3 kommt dies freilich nicht zur Erscheinung, da beide in gleicher Mächtigkeit auf ihr vorhanden sind. —

Bedeutet g die Anzahl der Geraden einer solchen Gruppe auf F^3, wie sie von mir in Nr. 21, 22 meiner „Flächen 3. Ordnung" untersucht worden sind, und g_i die Zahl derjenigen unter den $27-g$ übrigen Geraden der Fläche, welche i Gerade der Gruppe schneiden, so fand sich dort folgendes, indem wir hier noch den Complex aus einem Kegelschnitt und einer ihn nicht treffenden Geraden der Fläche hinzunehmen.

	g	g_0	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5
Eine Gerade	1	16	10				
Dupel	2	10	10	5			
Tripel	3	6	9	6	3		
Quadrupel	4	3	8	6	4	2	
Quintupel I	5	1	5	10		5	1
Quintupel II	5			10	10		2
Sextupel	6			15			6
Kegelschnitt mit Gerade	1	8	9	8	1		

Die Zahlen beim Quintupel II, d. h. mit zwei alle fünf Geraden schneidenden Geraden, sind dieselben wie beim Dupel, weil eben dasselbe stets mit einem Dupel und umgekehrt jedes Dupel mit einem Quintupel II verbunden ist. Auch die Symmetrie der Zahlen beim Tripel und beim letzten Gebilde ist leicht einzusehen.

Man wird bemerken, dass diese Zahlenreihen, wenn auch nicht in derselben Reihenfolge, in den Reihen der g_i unserer Curven auftreten. Es wird sich daraus eine Beziehung zwischen der betreffenden

*) Cremona, im eben erw. Aufs. Nr. 130; Em. Weyr über rationale Raumcurven. Sitzungsber. der k. böhm. Ges. der Wiss. April 1882. Bei der Cremona'schen Abbildung entsteht die Curve $(6,0)'$ aus einer Curve 3. Ordnung der Abbildungsebene, welche durch einen der sechs Fundamentalpunkte zweimal, durch einen zweiten einmal, durch die übrigen nicht geht.

**) Math. Ann. Bd. III, S. 161, § 4.

Curve und Gruppe ergeben, so wie auch zwischen Curven, bei denen dieselbe Zahlenreihe auftritt. —

Ein Ebenenbüschel und ein Flächenbüschel 2. Ordnung erzeugen in projectiver Beziehung die F^3. Die Mächtigkeit der Geraden und der Raumcurve 4. Ordnung erster Species im Raume ist 4, 16 (letzteres aus der Theorie der F^2 bekannt), auf gegebener F^3 hingegen 0, 4, (was oben ohne die Constantenzahl 19 der F^3 gefunden ist); die projective Beziehung involvirt auch 3 Constante; *also ist die Constantenzahl der* F^3

$$4 + 16 + 3 - (0 + 4) = 19.$$

20. Das eindeutige Entsprechen der Punkte auf Ebene und cubischer Fläche bei der schiefen Projection gestattet die Zahl der Begegnungspunkte zweier Curven auf F^3 anzugeben: man hat ja nur die ausserhalb der Spuren von g, g', l_i befindlichen Schnitte der entsprechenden Curven in der Ebene abzuzählen. *Ist also das Verhalten einer zweiten Curve von der Ordnung* n_1 *gegen das nämliche Dupel* — das dann freilich im Allgemeinen nicht für beide meist getroffenes sein wird — *durch* $\nu_1, \nu_1', q_{1,1}, \ldots, q_{5,1}$ *charakterisirt, so ist die Zahl* z *der Begegnungspunkte beider Curven:*

$$z = \nu\nu_1' + \nu'\nu_1 - \Sigma q_i q_{i,1}. \tag{1}$$

Bilden beide Curven zusammen einen vollständigen Schnitt der F^3 *mit einer* F^m, so ist:

$$\nu_1 = 2m - \nu, \quad \nu_1' = 2m - \nu', \quad q_{i,1} = m - q_i;$$

also ist, wenn F. (1) in Nr. 1 benutzt wird;

$$z = mn - 2\nu\nu' + \Sigma q_i^2; \tag{2}$$

verwerthet man aber nun noch F. (2) in Nr. 1, so ergiebt sich:

$$z = n(m-1) - 2(p-1); \tag{3}$$

aber natürlich auch:

$$z = n_1(m-1) - 2(p_1 - 1);$$

und daraus folgt:

$$p_1 - p = \tfrac{1}{2}(n_1 - n)(m-1). \tag{4}$$

Diese Formel aber lässt sich, da $n + n_1 = 3m$, auch aus der allgemein für einen vollen Schnitt (F^m, F^{m_1}) aus zwei Curven geltenden bekannten Formel:

$$2(h_1 - h) = (n_1 - n)(m-1)(m_1 - 1)^*)$$

ableiten.

*) Salmon-Fiedler's Raumgeometrie Bd. II, Nr. 108 der 3. Aufl.

Man sieht, dass gleiche Ordnung beider Curven gleiches p und h, grössere Ordnung grösseres h und p nach sich zieht.

Vermöge der Formel:

$$r = 2p + 2(n - 1)$$

hat man noch:

$$r_1 - r = (n_1 - n)(m + 1) \tag{5}$$

und

$$t_{3,1} - t_3 = \tfrac{1}{2}(n_1 - n)(m + 1). \tag{6}$$

Die Reihe der g_i muss offenbar bei der einen zweier solchen Ergänzungscurven stets die umgekehrte sein, als bei der andern; und wenn beide Curven gleichartig sind, so muss sie in sich symmetrisch sein. Die Beziehung zu einer Geradengruppe pflanzt sich von einer Curve zur andern über, so z. B. die Beziehung zu einem Sextupel (oder zu einer Doppelsechs) von (3, 0) zu (6, 3) und von dieser zu (9, 9), mit der sie einen vollen Schnitt (F^3, F^5) bildet.

Für zwei solche Ergänzungscurven hat man noch:

$$p + p_1 + z = \tfrac{3}{2} m(m - 1) + 2, \tag{7}$$

$$t_3 + t_{3,1} + z = \tfrac{3}{2} m(m + 1); \tag{8}$$

die letztere aber ist, weil der Mächtigkeitsgrad stets die Hälfte vom Range ist (Nr. 1), mit der bekannten Formel identisch:

$$r + r_1 + 2z = 3m(m + 1),$$

in der die rechte Seite der Rang der nicht zerfallenden Curve (F^3, F^m) ist.

Im Folgenden geben wir Tabellen von einen vollständigen Schnitt (F^3, F^4), (F^3, F^5), (F^3, F^6) bildenden Curven: die unter zwei zusammengehörigen Curven stehende Zahl ist die ihrer Begegnungspunkte.

(F^3, F^4).

(2,0)	(3,0)	(3,1)	(4,0)	(4,1)	(5,0)	(5,1)	(5,2)
(10, 12)	(9,9)	(9,10)	(8,6)	(8,7)	(7,3)″	(7,4)	(7,5)
8	11	9	14	12	17	15	13

(6,0)″	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)
(6,0)″	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)
20	18	16	14	12.

(F^3, F^5).

(5,0)	(5,1)	(5,2)	(6,0)′	(6,0)″	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)
(10,10)″	(10,11)	(10,13)	(9,6)‴	(9,6)″	(9,7)	(9,8)	(9,9)	(9,10)
22	20	18	26	26	24	22	20	18

(7,1)	(7,2)	(7,3)′	(7,3)″	(7,4)	(7,5)
(8,3)″	(8,4)	(8,5)″	(8,5)′	(8,6)	(8,7)
28	26	24	24	22	20.

(F^3, F^6)

(8,1)′	(8,1)″	(8,2)	(8,3)′	(8,3)″	(8,4)	(8,5)′	(8,5)″	(8,6)	(8,7)
(10,6)‴	(10,6)″	(10,7)	(10,8)″	(10,8)′	(10,9)	(10,10)″	(10,10)′	(10,11)	(10,12)
40	40	38	36	36	34	32	32	30	28

(9,1)	(9,3)″	(9,4)″	(9,5)	(9,6)″	(9,7)	(9,8)	(9,9)	(9,10)
(9,1)	(9,3)″	(9,4)″	(9,5)	(9,6)″	(9,7)	(9,8)	(9,9)	(9,10)
45	41	39	37	35	33	31	29	27.*)

Wir führen noch mehrere Beispiele von vollständigen Schnitten an, die aus 3 oder mehr Bestandtheilen bestehen, darunter Geraden:

Eine Curve (F^3, F^4) bildet: (6, 0)′ mit ihrer $g^{(5)}$ (wenn wir so die fünfmal getroffene Gerade nennen) und einer (5,0); (7,1) mit ihren zwei $g^{(5)}$ und einer (3, 0); (7, 2), (7, 3) mit je der $g^{(5)}$ und bez. (4, 0), (4, 1); (8, 3)″ mit den vier $g^{(5)}$, (8, 4) mit den zwei $g^{(5)}$ und einem Kegelschnitt, (8,5)′ mit ihrer $g^{(5)}$ und einer (3,0).

Eine (F^3, F^5) entsteht durch (7,0), ihre $g^{(6)}$ und (7, 3)″; durch (8,1)′, ihre zwei $g^{(6)}$ und (5,1); durch (8,1)″, (8,2), (8,3)′, je ihre eine $g^{(6)}$ und bez. (6,0)″, (6,1), (6,2); durch (9,1) und ihre sechs $g^{(6)}$, welche ein Sextupel bilden; durch (9,3)″, die drei $g^{(6)}$ und (3,0); durch (9,4)″, die zwei $g^{(6)}$ und (4,0); durch (9,5), (9,6)′, je die eine $g^{(6)}$ und bez. (5,0), (5,1); durch (10,6)″ und (10,6)‴ mit je den fünf $g^{(6)}$, die im ersten Falle ein Quintupel mit einer Schneidenden, der einzigen $g^{(0)}$, im zweiten ein Quintupel mit zwei Schneidenden, den beiden $g^{(0)}$, bilden; durch (10,7)″, die drei $g^{(6)}$ und (2,0); durch (10,8)′, die beiden $g^{(6)}$ und (3,0); durch (10,8)″, (10,9), (10,10)′, je die eine $g^{(6)}$ und bez. zwei sich nicht begegnende (also durch dieselbe Gerade von F^3 ergänzte) Kegelschnitte, eine (4,0), eine (4,1).

Endlich eine (F^3, F^6) entsteht durch (8,0), die $g^{(7)}$ und (9,6)‴; durch (9,2), (9,3), (9,4)′, je die eine $g^{(7)}$ und bez. (8,3)″, (8,4), (8,5)″; durch (10,3)″, (10,4)″, je die beiden $g^{(7)}$ und bez. (6,0)″, (6,1); durch (10,5), (10,6)′, (10,7)′, je die eine $g^{(7)}$ und bez. (7,1), (7,2), (7,3)″. U. s. w.

*) Herr Cremona erwähnt (a. a. O. Nr. 131) von diesen 9 Fällen zweier einen vollen Schnitt (F^3, F^6) bildenden Curven 9. Ordnung den ersten.

Zu diesen Resultaten gelangt man durch folgende Ueberlegungen.

Wenn eine Gerade zum vollständigen Schnitte zweier Flächen F^m, F^{m_1} gehört, auf welchen sie einfach ist, so begegnet sie dem übrigen Bestandtheil des Schnittes im $m + m_1 - 2$ Punkten; denn durch diejenigen Punkte der Geraden, in denen je dieselbe Ebene beide Flächen berührt, entsteht eine Correspondenz $(m - 1, m_1 - 1)$. Im Falle (F^m, F^3) ist diese Zahl demnach $m + 1$.

Wird nun durch eine Curve (n, p, r) auf F^3, welche e Gerade $g^{(m+1)}$ hat, eine F^m gelegt, so enthält dieselbe diese e Geraden und da jede von ihnen schon der gegebenen Curve in $m+1$ Punkten begegnet, so hat sie mit dem Restschnitte und mit den andern Geraden keinen Punkt mehr gemein. Sei (n_1, p_1, r_1) die Ergänzungscurve von (n, p, r), und (n_2, p_2, r_2) der nach Abscheidung der e Geraden übrig bleibende Theil derselben. Weil die Bestandtheile von (n_1, p_1, r_1) keine Begegnungspunkte haben und alle, ausser (n_2, p_2, r_2), Gerade sind, also vom Range 0, so ist $r_2 = r_1$; denn der Rang einer Curve zerlegt sich, wenn sie zerfällt, in die Rangzahlen der Bestandtheile und die doppelte Zahl der Begegnungspunkte. Nun ist wegen F. 5):

$$r_2 = r_1 = r + (n_1 - n)(m + 1) = r + (3m - 2n)(m + 1);$$

führt man nun wieder:

$$r = 2(n - 1 + p),$$
$$r_2 = 2(n_2 - 1 + p_2) = 2(3m - n - e - 1 + p_2)$$

ein, so ergiebt sich:

$$p_2 = p + \tfrac{1}{2}(m - 1)(3m - 2n) + e. \tag{9}$$

Giebt es blos eine Curve $(3m - n - e)^{\text{ter}}$ Ordnung von diesem Geschlechte p_2, so ist die Sache erledigt; nicht so im andern Falle. Bisweilen macht es sich einfach, wie z. B. dass zu $(10, 7)'$ und ihrer $g^{(7)}$ als Ergänzung zu (F^3, F^6) $(7, 3)''$ und nicht $(7, 3)'$ gehört, ist sofort zu erkennen, da für diese Ergänzung die $g^{(7)}$ von $(10, 7)'$ eine $g^{(0)}$ sein muss und $(7,3)'$ keine Gerade $g^{(0)}$ hat.

Legen wir beispielsweise klar, dass $(9,2)$ mit ihrer $g^{(7)}$ zu (F^3, F^6) durch $(8,3)''$ ergänzt wird. Von den 10 Geraden der F^3, welche $g^{(7)}$ treffen, sind, wie man nach Nr. 3 leicht findet, 4 Gerade $g^{(2)}$, 2 Gerade $g^{(1)}$ und 4 Gerade $g^{(0)}$ für $(9,2)$; dadurch aber, dass sie $g^{(7)}$ schneiden, werden sie für $[(9,2), g^{(7)}]$ Gerade $g^{(3)}$, $g^{(2)}$, $g^{(1)}$ und für diesen Complex haben wir also: 1 Gerade $g^{(7)}$, 1 $g^{(6)}$, 4 $g^{(5)}$, 6 $g^{(4)}$, 8 $g^{(3)}$, 3 $g^{(2)}$, 4 $g^{(1)}$, keine $g^{(0)}$; für die Ergänzungscurve wird $g^{(7)}$ eine $g^{(0)}$ und die $g^{(6)}, g^{(5)}, \ldots$, gehen über in $g^{(0)}, g^{(1)}, \ldots, g^{(6)}$; mithin hat sie 2 $g^{(0)}$, 4 $g^{(1)}$, 6 $g^{(2)}$, 8 $g^{(3)}$, 3 $g^{(4)}$, 4 $g^{(5)}$, und diese Zahlenreihe kommt $(8,3)''$ zu, nicht $(8,3)'$. — Mithin bildet $(9,2)$ mit ihrer $g^{(7)}$ eine Ausartung von $(10,8)'$.

Bei der Ergänzung von $(10,8)''$ und ihrer $g^{(6)}$ zu einer (F^3, F^5) ergiebt sich aus (9) eine Curve 4. Ordnung vom Geschlecht -1, mithin eine zerfallende, und da sich für diese Ergänzung eine $g^{(4)}$, 16 $g^{(2)}$, 10 $g^{(0)}$ finden, so muss auf zwei Kegelschnitte, welche dieselbe gerade Ergänzung haben, geschlossen werden.

Zu bemerken ist noch, dass durch eine Curve 9. und 10. Ordnung im Allgemeinen nicht eine Fläche 4. Ordnung, wohl aber Flächen 5. und 6. Ordnung zu legen sind. Es ist aber jedenfalls zu vermuthen, dass F^4 möglich sind durch die letzten vier Curven 9. Ordnung, und der Restschnitt besteht, wenn wir von der letzten heraufgehen, bez. aus einer ebenen Curve 3. Ordnung, einer cubischen Raumcurve, aus der Geraden $g^{(5)}$ und einem Kegelschnitte, aus den 3 Geraden $g^{(5)}$, und analog werden $(10,12)$ und $(10,11)$ zu einer (F^3, F^4) durch einen Kegelschnitt, bez. die beiden Geraden $g^{(5)}$ ergänzt. Die Zahlenreihen der g_i bei diesen Curven machen dies fast zweifellos.

Dass aber durch $(9,6)'''$ z. B. keine F^4 mehr geht, ist ersichtlich, denn diese würde ja noch die 5 Geraden $g^{(5)}$ enthalten, was nicht möglich ist.

VI.

Eine andere eindeutige Abbildung der F^3 auf eine Ebene.

21. *Wir denken eine der cubischen Raumcurven r^3 der F^3 festgelegt. Ihr ist bekanntlich*) ein Sextupel von Geraden $l_1, l_2, l_3, l_4, l_5, l_6$ zugeordnet, die sie zweimal treffen;* die Geraden des conjugirten Sextupels treffen sie gar nicht, und die 15 übrigen Geraden begegnen ihr einmal. *Eine beliebige Curve R^n der F^3 begegne der r^3 in $2n-\nu$ Punkten;* denn da durch r^3 Flächen 2. Grades möglich sind, so kann die Zahl der Schnittpunkte nicht $> 2n$ sein; *die l_i treffe R^n in q_i Punkten.*

Gleitet an R^n eine die r^3 stets zweimal treffende Gerade hin, so entsteht eine Regelfläche vom Grade 2ν, auf welcher die r^3 eine ν-fache Leitcurve ist und die l_i bez. q_i-fache Erzeugende sind. Der Schnitt beider Flächen führt zu *der Relation:*

$$3\nu = n + \Sigma q_i; \tag{1}$$

so dass:

$$\nu > \frac{n}{3}.$$

Folglich kann keine Curve R^n auf F^3 irgend einer cubischen Raumcurve derselben in mehr als $\left[\frac{5n}{3}\right]$ Punkten begegnen.

---

*) Cf. z. B. meine „Flächen 3. Ordnung" Nr. 58.

Das Geschlecht der Curve R^n ergiebt sich:

$$2p = \nu^2 - (n-2) - \Sigma q_i^2; \tag{2}$$

die Zahl der Schnittpunkte zweier Curven ist:

$$s = \nu\nu_1 - \Sigma q_i q_{i,1}. \tag{3}$$

Wir wollen wieder jeder Curve R^n *eine meistgetroffene cubische Raumcurve* r^3 zuweisen. Dazu aber müssen wir die verschiedenartigen cubischen Raumcurven auf F^3 in ihrem Verhalten gegen r^3 zunächst betrachten.

Es ist bekannt,*) dass zwei cubische Raumcurven, welche gar keinen, resp. 1, 2, 3, 4, 5 Begegnungspunkte haben, 10, 6, 3, 1, 0, 0 gemeinsame Bisecanten besitzen, die sie in 4 getrennten Punkten treffen. Liegen nun beide Curven auf derselben F^3, so gehören dieser auch die gemeinsamen Bisecanten an; aber von den Geraden einer F^3 treffen nur 6 eine auf derselben liegende cubische Raumcurve; mithin ist der erste Fall auf einer cubischen Fläche nicht möglich.

Also haben wir fünferlei Verhalten der übrigen cubischen Raumcurven zu r^3*: die Zahl der Schnitte ist* 1, 2, 3, 4, 5 *und das zugehörige Sextupel der zweimal treffenden Geraden hat mit dem von* r^3 *alle Geraden,* 3, 1, 0, 0 *Gerade gemein.*

Es ist demnach bez. $\nu = 5,4,3,2,1$, also $\Theta = \Sigma q_i = 3\nu - n = 3\nu - 3$ resp. 12, 9, 6, 3, 0 und da wir die Zahl der Summanden 2 unter den q_i kennen, so *haben wir die* 5 *Fälle:*

$$2,2,2,2,2,2;\quad 2,2,2,1,1,1;\quad 2,1,1,1,1,0^{**});\quad 1,1,1,0,0,0;\quad 0,0,0,0,0,0.$$

Die Curven der letzten Art haben gerade das conjugirte Sextupel zu ihrem zugeordneten; nennen wir sie zu r^3 und überhaupt zu denen der ersten Art conjugirt: je zwei conjugirte (mit 5 Schnittpunkten) liegen bekanntlich auf einer F^2.

Wir finden sofort, wenn r^3 die meistgetroffene cubische Raumcurve für R^n ist, eine obere Grenze für ν:

$$\nu \leqq n; \tag{4}$$

denn, wenn $\nu > n$ wäre, also auch $> 2n - \nu$, dann würde jede der r^3 conjugirte Curve, weil sie in ν Punkten getroffen wird, in mehr Punkten getroffen als r^3.

Ferner haben wir nun auch als untere Grenze für die Zahl der Schnittpunkte einer R^n *mit einer cubischen Raumcurve:*

$$2n - \left[\frac{5n}{3}\right] = \left|\frac{n}{3}\right|.$$

*) Cremona, Borchardt's Journal Bd. 60, S. 188; Sturm, Annali di Matematica ser. II, Bd. 3, S. 28.

**) 1, 1, 1, 1, 1, 1 im dritten Falle führt zur ebenen Curve 3. Ordnung.

Die Zahl der Begegnungspunkte der R^n mit einer cubischen Raumcurve der ersten Art ist, nach der obigen Formel (3):

$$s = 5\nu - 2\Sigma q_i = 5\nu - 2(3\nu - n) = 2n - \nu,$$

also, wie zu erwarten, dieselbe wie mit r^3; so dass man r^3 durch jede Curve der ersten Art ersetzen kann, da ja auch das Sextupel dasselbe bleibt.

Was die Schnitte von R^n mit den cubischen Raumcurven der zweiten Art anlangt, so sind auf alle möglichen Weisen die 6 Grössen $q_1, \ldots, q_6$ mit 2, 2, 2, 1, 1, 1 bez. zu paaren und die Producte der gepaarten zu addiren. Setzt man wieder voraus, dass $q_1 \geqq q_2 \geqq q_3 \ldots$, so erhält man offenbar als die kleinste Productensumme

$$2(q_4 + q_5 + q_6) + q_1 + q_2 + q_3,$$

und demnach als grösste Schnittzahl:

$$4\nu - 2(q_4 + q_5 + q_6) - (q_1 + q_2 + q_3) = 4\nu - 2\Sigma q_i + q_1 + q_2 + q_3$$
$$= 2n - 2\nu + q_1 + q_2 + q_3.$$

Soll dies $\leqq 2n - \nu$ sein, so muss sein:

$$q_1 + q_2 + q_3 \leqq \nu. \tag{5}$$

Als grösste Schnittzahl von R^n mit einer cubischen Raumcurve der dritten Art ergiebt sich:

$$3\nu - 2q_6 - (q_2 + q_3 + q_4 + q_5) = 3\nu - 2\Sigma q_i + (2q_1 + q_2 + q_3 + q_4 + q_5)$$
$$= 2n - 3\nu + (2q_1 + q_2 + q_3 + q_4 + q_5);$$

soll dies $\leqq 2n - \nu$ sein, so muss sein:

$$2q_1 + q_2 + q_3 + q_4 + q_5 \leqq 2\nu,$$

was aber schon mit:

$$q_1 + q_2 + q_3 \leqq \nu$$

erfüllt wird, da

$$q_4 + q_5 \leqq q_2 + q_3.$$

Als grösste Schnittzahl der R^n mit einer Curve der vierten Art ergiebt sich:

$$2\nu - (q_4 + q_5 + q_6) = n - \nu + q_1 + q_2 + q_3;$$

wir kommen zu:

$$q_1 + q_2 + q_3 \leqq n,$$

was aber aus (4) und (5) folgt.

Bei den Curven der fünften Art findet man auch mit unserer Formel als ständige Schnittzahl die schon oben genannte ν.

Die Curve r^3 wird also zur meistgetroffenen für R^n, wenn die beiden Beziehungen (4) *und* (5):

$$\nu \leqq n, \quad q_1 + q_2 + q_3 \leqq \nu$$

eingehalten werden.

Entwickelt man beispielsweise die Curven der 6. Ordnung, so findet man bei $\nu = 2$ die Curve $(6,0)''$ nach der obigen Bezeichnung, bei $\nu = 3$ die Curven $(6,0)'$, $(6,1)$, bei $\nu = 4$ die Curven $(6,2)$, $(6,3)$, bei $\nu = 5$ keine, bei $\nu = 6$ die Curve $(6,4)$, und damit noch *einen charakteristischen Unterschied der beiden Curven 6. Ordnung vom Geschlechte* 0: während $(6,0)''$ in der Zahl der Schnitte mit den cubischen Raumcurven der F^3 bis 10 steigen kann, kann $(6,0)'$ nur 9 erreichen.

Ferner giebt es keine Curve 6. Ordnung auf F^3, welche eine ihrer meistgetroffenen cubischen Raumcurven in 7 Punkten schneidet. —

Die Ermittelung der grössten Werthe für das Geschlecht ist hier ebenso einfach als oben; die Aufsuchung aber der unteren Grenze und der Zahl der Arten dürfte hier doch durch den Umstand, dass es sich um 6 Summanden handelt und die Bedingung (5) sich auf die 3 grössten bezieht, umständlicher sein als oben; während freilich andererseits eine Vereinfachung dadurch eintritt, dass man es hier nicht mit ν und ν', sondern nur mit ν zu thun hat und zu jedem ν nur ein Θ gehört.

Wir wollen dies aber nicht weiter verfolgen, sondern in einem Anhange die wichtigsten analogen Resultate für zwei bekannte specielle Flächen 4. Ordnung mittheilen.

VII.

Anhang: Die Flächen 4. Ordnung mit einem doppelten Kegelschnitte, bez. einer doppelten Geraden.

22. *Auf der Fläche* 4. *Ordnung mit einem doppelten Kegelschnitte* d^2*) giebt es bekanntlich 16 Gerade, welche alle den d^2 treffen und von denen jede von 5 andern gegen einander windschiefen geschnitten wird. Jede zwei dieser Schneidenden haben, ausser der erst genannten Geraden, noch eine zweite beide treffende, die vierte Gerade eines windschiefen Vierseits auf der Fläche, und die 10 Combinationen liefern in diesen zweiten Geraden die 10 noch übrigen Geraden der Fläche.

Wir greifen eine bestimmte aus den 16 *Geraden heraus: g, die* 5 *sie schneidenden seien l_1, l_2, l_3, l_4, l_5.*

Eine Raumcurve R^n auf der Fläche trifft immer d^2 in n Punkten; sie *treffe g in $n - \nu$ Punkten und l_i in q_i Punkten; die Schnittzahlen mit den* 10 *übrigen Geraden erhält man durch Subtraction der* 10 *Summen von je zwei q_i von ν,* indem jedes der obigen windschiefen Vierseite mit d^2 den vollen Schnitt einer F^2 bildet.

*) Kummer, Borchardt's Journal Bd. 64, S. 66; Clebsch, ebenda Bd. 69, S. 142; Geiser, ebenda Bd. 70; Cremona, Rendiconti dell' Istituto Lombardo 9. und 23. März 1871; Sturm, Math. Ann. Bd. IV, S. 249 (Nr. 22ff.); H. G. Zeuthen, om Flader of fjerde Orden med Doppeltkeglesnit, Festschrift zum 400 jährigen Jubiläum der Universität Kopenhagen 1879.

Wir lassen an R^n, d^2, g eine Gerade hingleiten; die entstehende Regelfläche vom Grade 2ν mit d^2 und g als ν-fachen Leitlinien, den l_i als q_i-fachen Erzeugenden giebt *die Beziehung:*

(1) $$3\nu - n = \Sigma q_i;$$

also:

$$\nu \geqq \frac{n}{3}.$$

Ferner:

(2) $$p = \frac{1}{2}\{\nu^2 - (n-2) - \Sigma q_i^2\};$$

(3) $$t_4 = \frac{1}{2}(\nu^2 + n - \Sigma q_i^2) = p + n - 1,$$

wie auf F^3.

Soll g die meist getroffene Gerade sein, so erfordert dies:

(4) $$\nu \leqq \frac{3}{4} n,$$

und

(5) $$q_1 + q_2 + q_3 \leqq \nu,$$

wenn die $q_1, q_2, \ldots$ wieder nach der Grössenfolge geordnet sind.

Wir erhalten durch ähnliche Ueberlegungen, wie bei F^3, dass *der höchste Werth des Geschlechts einer R^n auf unserer Fläche ist:*

$$\left[\frac{1}{8} n(n-4) + 1\right].$$

Hier ist eine Combination von ν, q_i möglich, bei welcher p negativ wird; nämlich, wenn n gerade ist und $\nu = \frac{n}{2}$, $q_1 = \frac{n}{2}$, $q_2 = q_3 = q_4 = q_5 = 0$. *Diesen Fall müssen wir ausschliessen. Sonst liefert jede* (den Bedingungen (4), (5) genügende) *Combination eine Curvenart, und wir erhalten, ganz analog wie auf der F^3, von jeder Ordnung n nur eine Curve vom Geschlechte* 0, und zwar, wenn n gerade oder ungerade ist, bei

$$\nu = \frac{n}{2}, \quad q_1 = \frac{n}{2} - 1, \quad q_2 = 1, \quad q_3 = q_4 = q_5 = 0,$$

bez.

$$\nu = \frac{n-1}{2}, \quad q_1 = \frac{n-3}{2}, \quad q_2 = q_3 = q_4 = q_5 = 0.$$

Eine Ausnahme bildet wiederum die 6. Ordnung, bei welcher sich das Geschlecht 0 *zweimal,* nämlich noch bei

$$\nu = 2, \; q_1 = q_2 = q_3 = q_4 = q_5 = 0$$

ergiebt.

Wir erhalten ferner auch hier, dass *das nächste Geschlecht hinter* 0 *ist* $\left[\frac{n-5}{2}\right]$, *mit Ausnahme von* $n = 3, 4, 5, 9$, wie bei der F^3.

Diese Analogie hängt natürlich mit der eindeutigen Punktverwandtschaft zwischen beiden Flächen zusammen, auf welche Herr

Geiser a. a. O. aufmerksam gemacht hat. Durch dieselbe geht jede Curve (n, p) auf der Fläche 4. Ordnung in eine Curve (n, p) auf der Fläche 3. Ordnung über; aber nicht nothwendig umgekehrt, weil eine R^n auf F^3 einem Kegelschnitte dieser Fläche nicht in n Punkten zu begegnen braucht.

Daher die grössere obere Grenze für p auf F^3 und die grössere Zahl von Curvenarten.

Ich schliesse mit einer Tabellirung der Curven von der 3. bis zur 10. Ordnung. Die sechs Zahlen hinter dem Namen sind die Schnittzahlen mit der meistgetroffenen Geraden und ihren fünf Schneidenden.

$n = 3.$

		meistgetr. Gerade	g_2	g_1	g_0
1)	(3, 0)	2; 0, 0, 0, 0, 0	1	10	5.

$n = 4.$

		meistgetr. Gerade	g_2	g_1	g_0
1)	(4, 0)	2; 1, 1, 0, 0, 0	4	8	4
2)	(4, 1)	1; 1, 1, 1, 1, 1		16	

$n = 5.$

		meistgetr. Gerade	g_3	g_2	g_1	g_0
1)	(5, 0)	3; 1, 0, 0, 0, 0	1	6	5	4
2)	(5, 1)	2; 1, 1, 1, 1, 0		5	10	1.

$n = 6.$

		meistgetr. Gerade	g_4	g_3	g_2	g_1	g_0
1)	(6, 0)′	4; 0, 0, 0, 0, 0	1		10		5
2)	(6, 0)″	3; 2, 1, 0, 0, 0		4	4	4	4
3)	(6, 1)	3; 1, 1, 1, 0, 0		2	6	6	2
4)	(6, 2)	2; 2, 1, 1, 1, 1			8	8	

$n = 7$.

		meistgetr. Gerade	g_4	g_3	g_2	g_1	g_0
1)	(7, 0)	4; 2, 0, 0, 0, 0	1	6	1	4	4
2)	(7, 1)	4; 1, 1, 0, 0, 0	1	3	6	3	3
3)	(7, 2)	3; 2, 1, 1, 1, 0		4	5	6	1
4)	(7, 3)	3; 1, 1, 1, 1, 1		1	10	5	

$n = 8$.

		meistgetr. Gerade	g_5	g_4	g_3	g_2	g_1	g_0
1)	(8, 0)	4; 3, 1, 0, 0, 0		4	4		4	4
2)	(8, 1)′	5; 1, 0, 0, 0, 0	1		6	4	1	4
3)	(8, 1)″	4; 2, 2, 0, 0, 0		4		8		4
4)	(8, 2)	4; 2, 1, 1, 0, 0		2	4	4	4	2
5)	(8, 3)	4; 1, 1, 1, 1, 1		1	4	6	4	1
6)	(8, 4)	3; 2, 2, 1, 1, 1			4	8	4	
7)	(8, 5)	2; 2, 2, 2, 2, 2				16		

$n = 9$.

		meistgetr. Gerade	g_6	g_5	g_4	g_3	g_2	g_1	g_0
1)	(9, 0)	5; 3, 0, 0, 0, 0		1	6	1		4	4
2)	(9, 1)	6; 0, 0, 0, 0, 0	1			10			5
3)	(9, 2)	5; 2, 1, 0, 0, 0		1	3	3	4	2	3
4)	(9, 3)	5; 1, 1, 1, 0, 0		1	1	6	3	3	2
5)	(9, 4)	4; 2, 2, 1, 1, 0			3	3	6	3	1
6)	(9, 5)	4; 2, 1, 1, 1, 1			1	6	5	4	
7)	(9, 6)	3; 2, 2, 2, 2, 1				5	10	1	

$n = 10$.

		meistgetr. Gerade	g_6	g_5	g_4	g_3	g_2	g_1	g_0
1)	(10,0)	5; 4, 1, 0, 0, 0		4	4			4	4
2)	(10,2)′	6; 2, 0, 0, 0, 0	1		6		5		4

	meistgetr. Gerade	g_6	g_5	g_4	g_3	g_2	g_1	g_0
3) (10,2)″	5; 3, 2, 0, 0, 0		4		4	4		4
4) (10,3)′	6; 1, 1, 0, 0, 0	1		3	6	1	2	3
5) (10,3)″	5; 3, 1, 1, 0, 0		2	4	2	2	4	2
6) (10,4)′	5; 2, 2, 1, 0, 0		2	2	4	4	2	2
7) (10,4)″	4; 4, 1, 1, 1, 1			8			8	
8) (10,5)	5; 2, 1, 1, 1, 0		1	3	4	4	3	1
9) (10,6)′	5; 1, 1, 1, 1, 1		1		10			5
10) (10,6)″	4; 3, 2, 1, 1, 1			4	4	4	4	
11) (10,6)‴	4; 2, 2, 2, 2, 0			5		10		1
12) (10,7)	4; 2, 2, 2, 1, 1			2	6	6	2	
13) (10,8)	3; 3, 2, 2, 2, 2				8	8		

Unter den (3,0), (4,1) befinden sich auch die ebenen Curven 3. bez. 4. Ordnung auf der Fläche und unter den (8,5) die vollen Schnitte mit einer F^2. —

Die Berechnung der Anzahl der Arten ist hier noch einfacher als bei der F^3. —

Auf unserer Fläche giebt es bekanntlich einfach unendlich viele Kegelschnitte, welche 10 Reihen bilden, so dass die derselben Reihe angehörigen sich nicht treffen. Seien k, k' zwei Kegelschnitte derselben Reihe, so erzeugen die Flächenbüschel 2. Ordnung (d^2, k), (d^2, k') in projectiver Beziehung die Fläche.

Da nun 3 Kegelschnitte, von denen zwei den dritten zweimal, einander aber nicht schneiden, $8 + 2(8 - 2) = 20$ Constanten, die projective Beziehung 3 Constanten involvirt, aber ∞^2 Paare (k, k') möglich sind, so *ist die Constantenzahl unserer Fläche*

$$20 + 3 - 2 = 21.$$

23. *Auf der Fläche* 4. *Ordnung mit einer doppelten Geraden* d*) giebt es ebenfalls 16 Gerade, welche alle die Gerade d treffen, ferner 128 *einzelne Kegelschnitte* S, welche d einmal treffen und zu je zweien S, S' in einer Ebene liegen. Auf jeden dieser Kegelschnitte stützen sich 8 von den 16 Geraden, auf zwei mit α Begegnungspunkten stützen sich zugleich $8 - 2\alpha$ Gerade.

Es sei nun wieder einer der Kegelschnitte, S_0, ausgezeichnet; S_0'

*) Clebsch, Math. Ann. Bd. I, S. 253, § 3 ff.; Sturm, ebenda Bd. IV, S. 249, Nr. 18 ff.

sei seine Ergänzung; *die auf S_0 sich stützenden* 8 *Geraden seien* $l_1, \ldots, l_8$ und die übrigen l_i' stützen sich auf S_0'.

Eine Raumcurve n^{ter} Ordnung R^n auf der Fläche treffe d in $n-\varrho$ Punkten (wo ϱ nothwendig > 0 ist), *den Kegelschnitt S_0 in $n-\nu$ Punkten* (wo ν auch $= 0$ sein kann) *und die $l_1, \ldots, l_8$ in $q_1, \ldots, q_8$ Punkten.*

Mit Hilfe der Regelfläche, welche durch eine an d, S_0, R^n gleitende Gerade erzeugt wird, erhalten wir *die Relation:*

$$4\varrho + 2\nu - n = \Sigma q_i; \tag{1}$$

also:

$$2\varrho + \nu \geq \frac{n}{2};$$

ferner:

$$p = \tfrac{1}{2}\{\varrho(\varrho + 2\nu + 1) - (n-2) - \Sigma q_i^2\}; \tag{2}$$

$$t_4 = p + n - 1 - \varrho; \tag{3}$$

so dass hier $t_4 = 0$ auch bei $n > 1$ möglich wird; wie dies ja die Kegelschnitte S und die 448 einzelnen cubischen Raumcurven von Clebsch beweisen.

Die Schnittzahl von R^n mit S_0' ist ν; die Schnittzahlen der R^n mit den 28 *Kegelschnitten S, welche S_0 zweimal begegnen, findet man durch Subtraction der* 28 *Summen von je zwei q_i von $\varrho + \nu$, und ergänzt man diese Zahlen zu n, so erhält man die Schnittzahlen von R^n mit den S_0 nicht treffenden Kegelschnitten;* zwei sich zweimal treffende Kegelschnitte S werden nämlich von denselben 8 Geraden getroffen und bilden mit ihnen und mit d den vollen Schnitt einer F^2.

Zieht man dagegen von $2\varrho + \nu$ die 70 *Summen von je vier Zahlen q_i ab, so erhält man die Schnittzahlen von R^n mit den* 70 *Kegelschnitten S, welche S_0 einmal treffen;* denn zwei sich einmal treffende Kegelschnitte S werden zugleich von 4 Geraden der Fläche getroffen und bestimmen mit diesen als Erzeugenden und mit d als doppelter Leitgerade eine cubische Regelfläche, deren vollen Schnitt mit der Fläche 4. Ordnung wir so schon haben.

Soll nun S_0 ein meist getroffener Kegelschnitt für R^n sein, so muss:

$$\nu \leqq \tfrac{1}{2} n \tag{4}$$

und

$$q_1 + q_2 \leqq \varrho \tag{5}$$

sein, wenn auch hier

$$q_1 \geq q_2 > q_3 \ldots$$

ist.

Setzen wir

$$4\varrho + 2\nu - n = \Theta = 8\alpha + \beta,$$

so ergiebt sich als kleinster Werth von Σq_i^2:

$$\beta(\alpha + 1)^2 + (8 - \beta)\alpha^2 = Q.$$

Geht man nun, ϱ festhaltend, mit ν in die Höhe, so nimmt, im Ausdrucke für p, $\varrho(\varrho + 2\nu + 1)$ mehr zu als Q. Nun ist, für gegebenes ϱ, der höchste Werth von Θ, mit dem noch der Bedingung (5) genügt werden kann, 4ϱ, bez. $4\varrho - 3$, je nachdem ϱ gerade oder ungerade ist; und daraus folgt, dass dann bez. $\nu \leqq \frac{n}{2}$, oder $\nu < \frac{n-3}{2}$ ist.

Wir erhalten folglich, für jedes ϱ, das grösste p, wenn wir das grösste ν nehmen, also $\frac{n}{2}$, bez. $\frac{n-3}{2}$, und dann für Σq_i^2 das dem zugehörigen $\Theta = 8\alpha + \beta$ entsprechende $Q = \beta(\alpha + 1)^2 + (8 - \beta)\alpha^2$.

Wir haben demnach 4 Fälle:

n	ϱ	grösstes p
2λ	2σ	$(2\sigma - 1)(\lambda - \sigma) + 1$,
2λ	$2\sigma + 1$	$2\sigma(\lambda - \sigma) - \sigma$,
$2\lambda + 1$	2σ	$(2\sigma - 1)(\lambda - \sigma) + \sigma$,
$2\lambda + 1$	$2\sigma + 1$	$2\sigma(\lambda - \sigma)$.

Sodann unterscheiden wir $n = 4\gamma$, $4\gamma + 1$, $4\gamma + 2$, $4\gamma + 3$.

Ist $n = 4\gamma$, also $\lambda = 2\gamma$, so wird, wenn $\varrho = 2\sigma$, $(2\sigma - 1)(2\gamma - \sigma) + 1$ am grössten, sobald $\sigma = \gamma$, und zwar $2\gamma^2 - \gamma + 1$; ist $\varrho = 2\sigma + 1$, dann wird $2\sigma(2\gamma - \sigma) - \sigma$ am grössten, wenn $\sigma = \gamma$, und zwar $2\gamma^2 - \gamma$; also ist das grössere Maximum bei $\varrho = 2\gamma$:

$$2\gamma^2 - \gamma + 1;$$

ebenso ergiebt sich in den drei andern Fällen:

$$2\gamma^2,$$
$$2\gamma^2 + \gamma + 1,$$
$$2\gamma^2 + 2\gamma + 1.$$

Das Maximum ergiebt sich in allen 4 Fällen bei $\nu = \left[\frac{n}{2}\right]$, in den beiden ersten bei $\varrho = \left[\frac{n}{2}\right]$, in den beiden letzten bei $\varrho = \left[\frac{n}{2}\right] + 1$.

Der höchste Werth, den das Geschlecht einer Curve n^{ter} Ordnung auf einer Fläche 4. Ordnung mit Doppelgeraden erreichen kann, ist

$$\left[\frac{1}{8}n(n-2) + 1\right].$$

Die Untersuchung der untern Grenze für p und der Zahl der Arten wird hier schwieriger, da die Beschränkungen (4) und (5) ein Negativwerden von p nicht verhindern. Die Anzahl der Arten scheint wesentlich grösser als in den vorhergehenden Fällen. —

Es giebt auf der Fläche ∞^1 cubische Raumcurven, welche die Doppelgerade zweimal schneiden; seien R', R'' zwei derselben, so erzeugen die Flächenbüschel 2. Ordnung (d, R'), (d, R'') in projectiver Beziehung die Fläche. Da nun eine Gerade und zwei sie zweimal schneidende cubische Raumcurven $4 + 2(12 - 2) = 24$ Constanten involviren, *so ist die Constantenzahl unserer Fläche*

$$24 + 3 - 2 = 25.$$

Münster i./W., den 2. November 1882.

Ueber einen das System zweier Flächen 2. Grades betreffenden Satz und einen damit verbundenen Strahlencomplex 2. Grades.

Von

Friedrich Schur in Leipzig.

In den folgenden Zeilen will ich auf den nachstehenden Satz*), den ich in meiner Habilitationsschrift bewiesen habe, zurückkommen:

I. *Enthält die erste Erzeugung* $[g]$ *einer Fläche* 2. *Grades* G^2 *ein Tripel einander conjugirter Strahlen in Bezug auf eine Fläche* 2. *Grades* F^2, *so enthält sowohl diese Erzeugung* $[g]$ *als die zweite Erzeugung* $[g']$ *von* G^2 *eine einfach unendliche Schaar solcher Tripel.*

Es soll nämlich zunächst meine Aufgabe sein, die simultane Invariante aufzustellen, deren Verschwinden die in dem Satze ausgesprochene besondere Eigenschaft der beiden Flächen 2. Grades ausdrückt. Da sich dieselbe als rational in den Coefficienten dieser erweist, so wird die Forderung entstehen, die durch das Verschwinden der Invariante ausgedrückte besondere Eigenschaft der beiden Flächen 2. Grades auch in rationaler Form auszusprechen, also auch in einer mit stets reellen Elementen operirenden Form. Dies gelang durch die Untersuchung desjenigen Strahlencomplexes 2. Grades, welcher von den die beiden Flächen in harmonisch getrennten Punktepaaren treffenden Geraden gebildet wird. Dieser Complex lässt sich bekanntlich als Summe der sechs Quadrate der gewöhnlichen Liniencoordinaten darstellen, und seine Singularitätenfläche kann die projective Verallgemeinerung der Fresnel'schen Wellenfläche genannt werden**). Die Strahlen des Complexes treffen aber noch eine einfache Unendlichkeit von je zwei Flächen 2. Grades in harmonisch getrennten Punktepaaren. Die Flächen dieser Schaar gehören nun zweitens auch so zu je zweien zusammen, dass die Tangentialebenenpaare derselben, welche von jedem Strahle des Complexes ausgehen, harmonisch getrennt sind. So gehören also zu jeder Fläche G^2 dieser Schaar zwei andere: die eine F^2

*) S. Math. Ann. Bd. XVIII, p. 9, 10.

**) S. Painvin, Bulletin des sciences math. Bd. 2, p. 368 ff.

wird von jedem Strahle des Complexes in zwei für G^2 conjugirten Punkten geschnitten, und die andere H^2 schickt durch jeden Strahl des Complexes zwei für G^2 conjugirte Tangentialebenen. Sucht man zu dieser H^2 wieder diejenige Fläche der Schaar, welche von jedem Strahle des Complexes in zwei für H^2 conjugirten Punkten geschnitten wird, u. s. f., so frägt es sich, ob dieser Process sich einmal schliessen, ob man also wieder zu F'^2 zurückkommen kann? Es zeigt sich nun, dass für das Flächensystem, welches die im Satze ausgesprochene Eigenschaft besitzt, *dieser Process sich stets nach sechsmaliger Wiederholung schliesst.* Hiermit wäre also die gesuchte rationale Eigenthümlichkeit unseres Flächensystems gefunden; freilich lässt sich dieselbe nicht so kurz ausdrücken wie die im Satz gegebene.

Es ist klar, dass unser Complex die Geraden jeder Fläche unserer Schaar enthalten muss, er also ein Strahlencomplex 2. Grades ist, welcher beide Erzeugungen einer Fläche 2. Grades enthält. Ich stellte mir desshalb die Frage, ob es unter den vierfach unendlich vielen geradlinigen Erzeugungen einer Fläche 2. Grades, welche in einem jeden Strahlencomplexe 2. Grades enthalten sind*), stets zusammengehörige Paare derselben Fläche giebt, und bin zu dem Resultat gekommen, dass *der Ort derjenigen Strahlen, welche zwei Flächen 2. Grades in harmonisch getrennten Punctepaaren schneiden, der einzige Strahlencomplex 2. Grades ist, welcher beide geradlinigen Erzeugungen einer Fläche 2. Grades enthält.* Ausgenommen ist nur der aus zwei in Involution liegenden linearen Complexen, von denen keiner speciell ist, bestehende Complex 2. Grades. Vorausschicken will ich der Vollständigkeit halber den etwas modificirten geometrischen Beweis des Satzes I.

§ 1.

Sind g_1, g_2, g_3 drei einander für die Fläche F^2 conjugirte Geraden der Erzeugung $[g]$ von G^2, so treffen ihre reciproken Polaren c_1, c_2, c_3 die Geraden g_2 und g_3, g_3 und g_1, g_1 und g_2 resp. Nennen wir daher C^2 die reciproke Polare von G^2 und c^4 die gemeinsame Curve von G^2 und C^2, so haben wir ein der c^4 eingeschriebenes Sechseck, dessen Seiten abwechselnd der Erzeugung $[g]$ von G^2 und $[c]$ von C^2 angehören. Daraus folgt aber erstens, dass es eine einfach unendliche Schaar solcher Sechsecke giebt, und zweitens, dass die Verbindungslinien gegenüberliegender Eckpunkte derselben ebenfalls die Erzeugung einer Fläche 2. Grades D^2 bilden**). Ordnet man nun weiter jedem

*) S. meine geom. Unters. über Strahlencomplexe 2. Grades, math. Ann. Bd. XV, p. 453 u. 456.

**) S. meine Abh. über eine bes. Classe von Flächen 4. O. math. Ann. Bd. XX, p. 264, 265.

Punkte von c^4, in welchem sich die Erzeugenden g_i und c_k von $[g]$ und $[c]$ schneiden, den Schnittpunkt ihrer reciproken Polaren c_i und g_k zu, so bilden die Verbindungslinien der so zugeordneten Punkte ebenfalls die Erzeugung einer Fläche 2. Grades. Denn projicirt man die ganze Figur von einem Punkte S der c^4 auf dessen Polarebene σ für F^2, so projiciren sich g_i und c_i, g_k und c_k in zwei Paare für den Kegelschnitt (σ, F^2) conjugirter Strahlen. Hieraus folgt leicht nach dem bekannten Satze von Hesse, dass die Projection jeder Verbindungslinie stets durch den Pol der festen Geraden geht, welche die Schnittpunkte von σ mit den Geraden der andern Erzeugungen g' und c' durch S verbindet. Es schneiden folglich unsere Verbindungslinien sämmtlich eine durch den beliebigen Punkt S von c^4 gehende Gerade, womit unsere Behauptung bewiesen ist. Diese Fläche muss nun mit D^2 identisch sein, da sie mit ihr die Geraden $[(g_1, c_2), (c_1, g_2)]$ $[(c_2, g_3), (g_2, c_3)]$, $[(g_3, c_1), (c_3, g_1)]$ gemein hat. Hieraus folgt, dass je zwei gegenüberliegende Seiten jener Sechsecke reciproke Polaren für F^2 sind, womit der erste Theil unseres Satzes bewiesen ist.

Man zeigt aber zweitens leicht, dass die Geraden der Erzeugung $[g']$ von G^2, welche durch die Punkte (g_1, c_3) (g_2, c_1), (g_3, c_2) gehen, ebenfalls drei einander in Bezug auf F^2 conjugirte Strahlen sind. Denn ist g_1' die Erzeugende durch (g_1, c_3), so muss ihre reciproke Polare c_1' in der Ebene $[c_1, g_3]$ liegen, also die in derselben Ebene liegende Gerade g_2' durch (g_2, c_1) treffen; da ferner g_1' in der Ebene $[c_3, g_2]$ liegt, so geht c_1' durch den Punkt (g_3, c_2), also trifft c_1' auch die g_3' durch (g_3, c_2) u. s. w. Hiermit ist also auch der zweite Theil des Satzes bewiesen.

Da zwei Flächen F^2 und G^2 immer als reciproke Polaren von einander für eine dritte Fläche 2. Grades angesehen werden können, *so enthalten auch beide Erzeugungen von F^2 einfach unendlich viel Tripel von Strahlen, welche einander für G^2 conjugirt sind.*

§ 2.

Um nun die analytische Bedingung dafür zu finden, dass die auf ihr gemeinsames sich selbst conjugirtes Tetraeder bezogenen Flächen 2. Grades:

(A) $$a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2 + a_4 x_4^2 = 0$$

und:

(B) $$b_1 x_1^2 + b_2 x_2^2 + b_3 x_3^2 + b_4 x_4^2 = 0$$

die im Satze ausgesprochene Eigenschaft besitzen, suchen wir zunächst nach einem analytischen Ausdrucke für die Geraden der Fläche (A). Wir erhalten denselben, wenn wir setzen:

$$(1)\quad \begin{cases} p_{12} = \varkappa\sqrt{a_3a_4}, & p_{13} = \lambda\sqrt{a_2a_4}, & p_{16} = \mu\sqrt{a_2a_3}, \\ p_{34} = \pm\varkappa\sqrt{a_1a_2}, & p_{42} = \pm\lambda\sqrt{a_1a_3}, & p_{23} = \pm\mu\sqrt{a_1a_4}, \end{cases}$$

wenn:

$$(2)\qquad \varkappa^2 + \lambda^2 + \mu^2 = 0,$$

wo das obere Zeichen für die Geraden der einen, das untere für die Geraden der anderen Erzeugung gilt. In der That hat die reciproke Polare der Geraden q in Bezug auf die Fläche (A) die Coordinaten:

$$(3)\qquad \varrho\pi_{ik} = a_i a_k q_{ik},$$

sodass die Geraden (1) die die Geraden der Fläche auszeichnende Eigenschaft haben, sich selbst reciprok polar zu sein*). Dass für das obere Zeichen die Geraden der einen Schaar, dagegen für das untere die Geraden der andern Schaar resultiren, folgt leicht daraus, dass für je zwei solche Geraden die Bedingung des Schneidens erfüllt ist.

Sollen nun die Erzeugenden:

$$(p)\ \varkappa,\ \lambda,\ \mu;$$
$$(p')\ \varkappa',\ \lambda',\ \mu';$$
$$(p'')\ \varkappa'',\ \lambda'',\ \mu'';$$

einer Schaar von (A) einander für (B) conjugirt sein, so muss sein:

$$(4)\qquad \sum_{i,k=1}^{4} b_i b_k p_{ik} p'_{ik} = 0, \quad \text{etc.},$$

welches die Bedingungen dafür sind, dass die reciproke Polare von p für (B) die Geraden p' und p'', etc. schneidet. Diese Gleichungen gehen nun durch Substitution der Werthe von p_{ik}, p'_{ik}, p''_{ik} aus (1) über in:

$$(5)\quad \varkappa\varkappa'(a_1a_2b_3b_4 + a_3a_4b_1b_2) + \lambda\lambda'(a_1a_3b_2b_4 + a_2a_4b_1b_3) + \mu\mu'(a_1a_4b_2b_3 + a_2a_3b_1b_4) = 0, \quad \text{etc.}$$

Stellt man diese Bedingung mit der folgenden:

$$\varkappa^2 + \lambda^2 + \mu^2 = 0, \quad \text{etc.}$$

zusammen, so sieht man, dass die Form $\varkappa^2 + \lambda^2 + \mu^2$ zur Form:

$$\varkappa^2(a_1a_2b_3b_4 + a_3a_4b_1b_2) + \lambda^2(a_1a_3b_2b_4 + a_2a_4b_1b_3) + \mu^2(a_1a_4b_2b_3 + a_2a_3b_1b_4)$$

conjugirt ist, d. h. es muss sein:

$$\begin{aligned}&(a_1a_2b_3b_4 + a_3a_4b_1b_2)(a_1a_3b_2b_4 + a_2a_4b_1b_3)\\ &+ (a_1a_2b_3b_4 + a_3a_4b_1b_2)(a_1a_4b_2b_3 + a_2a_3b_1b_4)\\ &+ (a_1a_3b_2b_4 + a_2a_4b_1b_3)(a_1a_4b_2b_3 + a_2a_3b_1b_4) = 0.\end{aligned}$$

*) Bezüglich der Bezeichnung vergl. man etwa Salmon-Fiedler's Raumgeometrie 3. Aufl., I. Bd., Art. 51.

Setzt man:

$$a_1 a_2 a_3 a_4 = \Delta\,,$$
$$b_1 b_2 b_3 b_4 = \Delta',$$
$$a_2 a_3 a_4 b_1 + a_3 a_4 a_1 b_2 + a_4 a_1 a_2 b_3 + a_1 a_2 a_3 b_4 = \Theta\,,$$
$$b_2 b_3 b_4 a_1 + b_3 b_4 b_1 a_2 + b_4 b_1 b_2 a_3 + b_1 b_2 b_3 a_4 = \Theta',$$

welches bekanntlich Coefficienten der Discriminante von $A + \nu B$ sind, so findet man, dass diese Gleichung übergeht in:

(I) $$\Theta\Theta' - 4\Delta\Delta' = 0.$$

Die simultane Invariante, deren Verschwinden die im Satze ausgedrückte Beziehung der Flächen (A) und (B) anzeigt, erscheint also in rationaler Form, d. h. jene Beziehung gilt gleichmässig für beide Erzeugungen der Fläche (A) und zudem auch ebenso für beide Erzeugungen von (B) in Bezug auf (A); denn jene Invariante ist symmetrisch in den Coefficienten beider Flächen. Es entsteht desshalb die Frage nach einer geometrischen Eigenschaft dieser beiden Flächen, welche unabhängig von der Realität jener Erzeugungen ist. Nun führt die symmetrische Form der Invariante sofort auf den Complex derjenigen Geraden, welche die Flächen (A) und (B) in harmonisch getrennten Punktepaaren schneiden. Die Gleichung desselben ist bekanntlich:

(6) $$\sum A_{ik} p_{ik}^2 = 0,$$

wo:

(7) $$A_{ik} = a_i b_k + a_k b_i,$$

und unsere Invariante lässt sich zunächst durch diese A_{ik} ausdrücken. In der That ist:

$$A_{12} A_{34} = a_1 a_3 b_2 b_4 + a_2 a_4 b_1 b_3 + a_1 a_4 b_2 b_3 + a_2 a_3 b_1 b_4,$$
$$A_{13} A_{42} = a_1 a_2 b_3 b_4 + a_3 a_4 b_1 b_2 + a_1 a_4 b_2 b_3 + a_2 a_3 b_1 b_4,$$
$$A_{14} A_{23} = a_1 a_2 b_3 b_4 + a_3 a_4 b_1 b_2 + a_1 a_3 b_2 b_4 + a_2 a_4 b_1 b_3;$$

folglich wird:

$$a_1 a_2 b_3 b_4 + a_3 a_4 b_1 b_2 = \tfrac{1}{2}(-A_{12} A_{34} + A_{13} A_{42} + A_{14} A_{23}),$$
$$a_1 a_3 b_2 b_4 + a_2 a_4 b_1 b_3 = \tfrac{1}{2}(\;\; A_{12} A_{34} - A_{13} A_{42} + A_{14} A_{23}),$$
$$a_1 a_4 b_2 b_3 + a_2 a_3 b_1 b_4 = \tfrac{1}{2}(\;\; A_{12} A_{34} + A_{13} A_{42} - A_{14} A_{23}),$$

also wird:

$$\Theta\Theta' - 4\Delta\Delta' = -\tfrac{1}{4}\{A_{12}^2 A_{34}^2 + A_{13}^2 A_{42}^2 + A_{14}^2 A_{23}^2$$
$$- 2A_{12} A_{34} A_{13} A_{42} - 2A_{12} A_{34} A_{14} A_{23} - 2A_{13} A_{42} A_{14} A_{23}\}.$$

Wir sehen hieraus vor Allem, dass alle Flächenpaare, welche in derselben Weise zu demselben Complexe führen, ebenfalls die im Satze ausgesprochene oder die noch zu findende Eigenthümlichkeit besitzen. Wir wollen daher zunächst alle diese Flächenpaare bestimmen.

§ 3.

Es ist also die Aufgabe zu lösen, alle a_i und b_k zu finden, welche den Gleichungen:

$$a_i b_k + a_k b_i = A_{ik} \tag{1}$$

genügen, wenn die A_{ik} gegeben sind. Nun sieht man zunächst, dass, wenn auch die a_i gegeben, die a_k eindeutig gefunden werden können. Denn wir können dann etwa zuerst b_2, b_3, b_4 aus dem Gleichungssystem:

$$\left\{\begin{aligned} b_2 a_3 + b_3 a_2 &= A_{23}, \\ b_2 a_4 + b_4 a_2 &= A_{42}, \\ b_3 a_4 + b_4 a_3 &= A_{34} \end{aligned}\right. \tag{2}$$

berechnen, dessen Determinante: $-2a_2a_3a_4$ als nicht verschwindend angenommen werde, und erhalten dann b_1 aus einer der übrigen 3 Gleichungen. Verschwindet die Determinante, also etwa a_4, so kann man b_1, b_2, b_3 aus einem analogen Gleichungssystem berechnen, dessen Determinante bei allgemeiner Annahme der A_{ik} nicht wieder verschwinden kann, weil sonst noch etwa a_3, also auch A_{34} verschwinden müsste. Es wird also Alles darauf ankommen, die a_i so zu wählen, dass durch die aus (2) resultirenden Werthe von b_2, b_3, b_4 aus den drei übrigen Gleichungen sich derselbe Werth von b_1 ergebe. Dies unsymmetrische Verfahren zur Bestimmung der a_i ersetzen wir durch folgendes. Offenbar ist:

$$\left\{\begin{aligned} a_1 a_2 A_{34} + a_3 a_4 A_{12} &= \Theta, \quad \text{und} \\ a_1 a_2 \cdot a_3 a_4 &= \Delta, \end{aligned}\right. \tag{3}$$

also:

$$a_1^2 a_2^2 A_{34} - a_1 a_2 \Theta = -A_{12}\Delta,$$

woraus folgt:

$$2a_1a_2 = \frac{\Theta \pm \sqrt{\Theta^2 - 4A_{12}A_{34}\Delta}}{A_{34}}, \tag{4}$$

also:

$$2a_3a_4 = \frac{\Theta \mp \sqrt{\Theta^2 - 4A_{12}A_{34}\Delta}}{A_{12}}. \tag{5}$$

Ganz analoge Ausdrücke erhält man für die 4 übrigen Producte der a_i und durch diese sind ja die Verhältnisse der a_i eindeutig bestimmt. Man sieht, wie zu jedem Werthepaar von Θ und Δ acht

Werthsysteme der a_i gehören. Wir haben also die a_i als Functionen der beiden Parameter Θ und Δ dargestellt. Diese beiden Parameter sind jedoch nur scheinbar zwei. Setzen wir nämlich:

$$\Delta = \Theta^2\sigma^2,$$

so wird:

$$2a_1a_2 = \frac{\Theta}{A_{34}}\left(1 \pm \sqrt{1 - 4\sigma^2 A_{12}A_{34}}\right), \text{ u. s. w.}$$

Es sind folglich die Verhältnisse der a_i durch den einen Parameter σ dargestellt, sodass es *einfach unendlich viel Flächenpaare giebt, die denselben Strahlencomplex als Ort derjenigen Geraden liefern, welche die Flächen jedes Paares in harmonisch getrennten Punktepaaren schneiden.* Dieser Parameter σ oder vielmehr der reciproke Werth desselben hat eine bemerkenswerthe geometrische Bedeutung. Jeder der Tangentialcomplexe einer Geraden q von (A) für den Complex 2. Grades hat nämlich mit demselben ein Strahlensystem 2. Grades gemein, welches einfach unendlich viel Erzeugungen von Flächen 2. Grades durch q schickt, und für je einen dieser Tangentialcomplexe muss auch je eine Erzeugung von (A) unter denselben sein.*) Nun haben alle Tangentialcomplexe von q die Gleichung:

$$(6) \qquad \sum A_{ik}p_{ik}q_{ik} - \frac{1}{2}\tau\sum p_{ik}q_{lm} = 0,$$

wo i, k, l, m irgend eine Permutation der Zahlen 1, 2, 3, 4 ist. Nun ist nach § 2, (1):

$$q_{12} = \lambda_1\sqrt{a_3a_4}, \qquad q_{34} = \lambda_1\sqrt{a_1a_2}, \text{ etc.}$$

Sollen also alle Geraden:

$$p_{12} = \lambda\sqrt{a_3a_4}, \qquad p_{34} = \lambda\sqrt{a_1a_2}, \text{ etc.}$$

in dem Polarcomplexe (6) liegen, so muss sein:

$$\lambda\lambda_1(A_{12}a_3a_4 + A_{34}a_1a_2) + \mu\mu_1(A_{13}a_2a_4 + A_{42}a_1a_3)$$
$$+ \mu\mu_1(A_{14}a_2a_3 + A_{23}a_1a_4) - \tau\sqrt{\Delta}(\lambda\lambda_1 + \mu\mu_1 + \nu\nu_1) = 0,$$

folglich ist nach Gl. (3):

$$\tau = \frac{\Theta}{\sqrt{\Delta}} = \frac{1}{\sigma}.$$

Wir sehen also beiläufig, dass in jedem Systeme zusammengehöriger Grundflächen unseres Complexes 8 Flächen unserer Schaar vorkommen.

Jede dieser Flächen kann aber auch angesehen werden als eine solche, welche mit einer andern der Schaar den Complex als Ort derjenigen Geraden erzeugt, von denen aus zwei harmonisch getrennte Tangentialebenenpaare an jene beiden Flächen gehen. Sind nämlich:

*) Vergl. die Anm. pag. 516.

$$\alpha_1 u_1^2 + \alpha_2 u_2^2 + \alpha_3 u_3^2 + \alpha_4 u_4^2 = 0,$$

und:

$$\gamma_1 u_2^2 + \gamma_2 u_2^2 + \gamma_3 u_3^2 + \gamma_4 u_4^2 = 0$$

die Gleichungen dieser beiden Flächen in Ebenencoordinaten, so ist ja:

$$\alpha_i = \frac{1}{a_i},$$

sodass wir die Gleichungen haben:

$$\frac{\gamma_2}{a_1} + \frac{\gamma_1}{a_2} = A_{34}, \qquad \frac{\gamma_3}{a_4} + \frac{\gamma_4}{a_3} = A_{12}, \text{ etc.}$$

woraus folgt:

$$\frac{A_{34}}{a_3 a_4} + \frac{A_{12}}{a_1 a_2} = \Theta_1,$$

wo:

$$\Theta_1 = \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \gamma_1 + \alpha_3 \alpha_4 \alpha_1 \gamma_2 + \alpha_4 \alpha_1 \alpha_2 \gamma_3 + \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \gamma_4.$$

Setzen wir also:

$$\Theta_1 = \frac{\Theta}{\Delta},$$

so geht diese Gleichung in die erste der Gleichungen (3) über, sodass sich in der That aus diesen und den analogen dieselben Werthe für die a_i ergeben. Dieser Schluss erleidet nur dann eine Ausnahme, wenn Δ verschwindet, wovon man sich auch leicht auf geometrischem Wege überzeugt.

§ 4.

Zu der in der Einleitung erwähnten Eigenschaft unserer Flächenschaar kommen wir nun auf folgendem Wege. Die beiden Flächen (A) und (B) schneiden sich offenbar in einer Curve 4. Ordnung c^4, welche auf der Singularitätenfläche des Complexes liegt. Denn die Tangenten in jedem Schnittpunkte beider Flächen an diese gehören dem Complexe an.

Es schneidet folglich z. B. (A) die Singularitätenfläche noch in einer zweiten Curve 4. Ordnung, welche die Schnittcurve von (A) mit der reciproken Polare von (A) für (B) ist, nämlich mit der Fläche:

$$\frac{b_1^2}{a_1} x_1^2 + \frac{b_2^2}{a_2} x_2^2 + \frac{b_3^2}{a_3} x_3^2 + \frac{b_4^2}{a_4} x_4^2 = 0.$$

In der That schneidet die Polarebene jedes Punktes dieser Curve für (B) die Fläche (A) in zwei geraden Linien, welche mit diesem Punkte verbunden das Ebenenpaar liefern, in welches der Complexkegel degenerirt. Nun geht durch diese Curve, wie wir bereits in § 1 gesehen haben, eine Fläche unserer Schaar, dort D^2 genannt. Sind in der That c_i ihre Coefficienten, so müsste sein:

$$c_i = a_i + \lambda \frac{b_i^2}{a_i}$$

ferner aber:

(1) $A_{12}c_3c_4 + A_{34}c_1c_2 = A_{13}c_2c_4 + A_{42}c_1c_3 = A_{14}c_2c_3 + A_{23}c_1c_4.$

Da nun diese Gleichungen jedenfalls für $\lambda = 0$ befriedigt werden, so sieht man, dass, wenn überhaupt eins, es nur noch *ein* zweites λ geben kann, welches diesen Gleichungen genügt. Man kann sich nun überzeugen, dass:

$$\lambda = \frac{\Theta}{\Theta'}$$

die Gleichung (1) befriedigt. Dann wird nämlich:

$$c_1 = \frac{a_1^2\Theta' + b_1^2\Theta}{a_1\Theta'} = \frac{A_{12}A_{13}A_{14}}{a_1\Theta'}.$$

Folglich wird:

$$A_{12}c_3c_4 + A_{34}c_1c_2 = \frac{A}{\Theta'}\left(\frac{A_{34}}{a_3a_4} + \frac{A_{12}}{a_1a_2}\right),$$

wo:

$$A_{12}A_{13}A_{14}A_{34}A_{42}A_{23} = A$$

gesetzt ist. Es wird folglich:

$$A_{12}c_3c_4 + A_{34}c_1c_2 = \frac{A\cdot\Theta}{\Delta\cdot\Theta'},$$

also sind in der That die Gleichungen (1) erfüllt.

Nun gehört zur Fläche (C) eine Fläche (D), welche mit ihr den Complex erzeugt. Man sieht, dass man den Gleichungen:

$$A_{ik} = c_i d_k + d_i c_k$$

genügt durch:

$$d_1 = \frac{\Theta'}{2A}\cdot\frac{A_{12}A_{13}A_{14}(a_1\Theta - 2b_1\Delta)}{a_1^2}.$$

Denn dann wird z. B.:

$$c_1d_2 + c_2d_1 = \frac{A_{12}}{2A_{34}}\left(\frac{2\Theta}{a_1a_2} - 2\Delta\left(\frac{b_1}{a_1^2a_2} + \frac{b_2}{a_2^2a_1}\right)\right)$$

$$= \frac{A_{12}}{2A_{34}a_1a_2}(\Theta - a_3a_4A_{12}) = A_{12}.$$

Offenbar schneidet diese Fläche wiederum die Singularitätenfläche in einer zweiten Curve 4. Ordnung, durch welche die Fläche (H) der Schaar:

(H) $$\varrho h_i = \frac{a_i^2}{a_i\Theta - 2b_i\Delta}$$

geht, wo ϱ ein Proportionalitätsfactor.

Andrerseits gehört nun auch zur Fläche (B) eine Fläche der Schaar:

(E) $$e_1 = \frac{A_{12}A_{13}A_{14}}{b_1\Theta},$$

welche sie in einer Curve 4. Ordnung schneidet, die auf der Singularitätenfläche liegt, und zu dieser wieder eine Fläche:

$$(F) \qquad f_1 = \frac{\Theta}{2A} \cdot \frac{A_{12} A_{13} A_{14} (b_1\Theta' - 2a_1\Delta')}{b_1^2}$$
$$= \frac{\Theta}{2A} \cdot \frac{(a_1^2\Theta' + b_1^2\Theta)(b_1\Theta' - 2a_1\Delta')}{b_1^2},$$

welche mit (E) den Complex erzeugt. Es zeigt sich nun, dass diese Fläche (F) mit (H) identisch wird, falls $4\Delta\Delta' = \Theta\Theta'$ ist. Dann müsste ja $\frac{f_i}{h_i}$ vom Index i unabhängig sein; und diese Bedingung ist auch hinreichend für das Zusammenfallen. Nun ist:

$$\frac{f_1}{h_1} = \frac{\Theta \cdot \varrho}{2A} \frac{(a_1^2\Theta' + b_1^2\Theta)(a_1\Theta - 2b_1\Delta)(b_1\Theta' - 2a_1\Delta')}{a_1^2 b_1^2}$$
$$= \frac{\Theta \cdot \varrho}{2A} \frac{(a_1^2\Theta' + b_1^2\Theta)(4\Delta\Delta' - \Theta\Theta')}{a_1^2 b_1^2}$$
$$+ \frac{\Theta\varrho}{A} \frac{(a_1^2\Theta' + b_1^2\Theta)}{a_1^2 b_1^2} \{a_1 b_1 \Theta\Theta' - a_1^2\Theta\Delta' - b_1^2\Delta\Theta'\}.$$

Hier geht nun das Product der Klammern über in:

$$\Theta\Theta' \{a_1^3\Theta' + b_1^3\Theta - a_1^4\Delta' - b_1^4\Delta\} - a_1^2 b_1^2 (\Theta^2\Delta' + \Theta'^2\Delta).$$

Da nun aber:

$$a_1^3\Theta' + b_1^3\Theta - a_1^4\Delta' - b_1^4\Delta$$
$$= a_1^2 b_1^2 \{a_1 a_2 b_3 b_4 + a_1 a_3 b_2 b_4 + a_1 a_4 b_2 b_3 + a_3 a_4 b_1 b_2 + a_4 a_2 b_1 b_3 + a_2 a_3 b_1 b_4\}$$
$$= a_1^2 b_1^2 \Phi$$

wird, so wird schliesslich:

$$\frac{f_1}{h_1} = \frac{\Theta\varrho}{2A} \frac{(a_1^2\Theta' + b_1^2\Theta)(4\Delta\Delta' - \Theta\Theta')}{a_1^2 b_1^2} + \frac{\Theta\varrho}{A} \{\Theta\Theta'\Phi - (\Theta^2\Delta' + \Theta'^2\Delta)\}.$$

Dieser Ausdruck wird aber dann und im Allgemeinen nur dann vom Index 1 unabhängig, wenn $4\Delta\Delta' = \Theta\Theta'$ ist, also wenn die Flächen (A) und (B) gerade die Eigenschaft unseres Satzes haben. Wir kommen also zu folgendem Resultate:

Der Complex derjenigen Geraden, welche zwei Flächen 2. Grades in harmonisch getrennten Punktepaaren schneiden, besitzt dieselbe Eigenschaft in Beziehung auf eine einfach unendliche Schaar von anderen Flächenpaaren 2. Grades. Jede Fläche der Schaar wird von der ihr zugehörigen und einer gewissen zweiten Fläche der Schaar in Curven der Singularitätenfläche des Complexes geschnitten; dieser zweiten Fläche gehört wiederum eine dritte Fläche der Schaar zu, welche mit ihr ein Paar bildet; diese dritte Fläche wird wiederum von einer gewissen andern in einer Curve der Singularitätenfläche geschnitten u. s. f. Schliesst sich nun einmal dieser Process so, dass er im Ganzen sechs Flächen der Schaar umfasst, so schliesst er sich stets in derselben Weise, und

die geradlinigen Erzeugungen jeder Fläche der Schaar enthalten Tripel von Geraden, welche einander in Bezug auf die zugehörige Fläche des Paares conjugirt sind. Umgekehrt zieht diese letzte Eigenschaft die erste nach sich.

Um dieselbe nun in diejenige Form zu kleiden, welche wir ihr in der Einleitung gegeben haben, genügt die Bemerkung, dass durch jede Gerade unseres Complexes je zwei harmonisch getrennte Tangentialebenenpaare der beiden Flächen C) und E) gehen. Denn es ist:

$$\frac{1}{c_1 e_2} + \frac{1}{c_2 e_1} = \frac{(a_1 b_2 + b_1 a_2)\,\Theta\Theta'}{A_{12}^2 A_{13} A_{14} A_{42} A_{23}} = \frac{\Theta\Theta' A_{34}}{A}.$$

Es bilden also auch in der sich schliessenden Reihe:

$$B),\ A),\ C),\ D),\ F),\ E).$$

die Flächen B) und D) sowohl als die Flächen A) und F) ein solches Paar. *In der sich schliessenden Reihe:*

$$A),\ B),\ D),\ C),\ E),\ F)$$

werden also je zwei auf einander folgende Flächen ungerader Ordnung von den Geraden des Complexes in zwei harmonisch getrennten Punktepaaren geschnitten, dagegen senden je zwei auf einanderfolgende Flächen gerader Ordnung durch jede Gerade des Complexes zwei harmonisch getrennte Tangentialebenenpaare.

Man sieht übrigens, dass unsere Schlüsse Ausnahmen erleiden, wenn etwa (A) ein Kegel, also $\Delta = 0$ ist; denn dann muss wegen $4\Delta\Delta = \Theta\Theta'$ auch $\Theta' = 0$ sein, doch bietet dieser Fall ja für sich wenig Schwierigkeit.

§ 5.

Offenbar enthält unser Complex die geraden Linien aller Flächen unserer Schaar, d. h. er enthält die Geraden beider Erzeugungen von einfach unendlich vielen Flächen 2. Grades. Wir fragen uns daher, ob dies eine den Complex auszeichnende Eigenschaft ist, d. h. ob überhaupt ein beliebiger Strahlencomplex 2. Grades C^2 beide Erzeugungen $[g]$ und $[g']$ einer Fläche 2. Grades G^2 enthalten kann. Nun schneidet jede Gerade von $[g]$ sowohl als von $[g']$ die Singularitätenfläche F^4 von C^2 in 4 Punkten, und es fragt sich nun, enthält dann jedesmal eine der beiden zugehörigen singulären Ebenen des Complexes beide Erzeugenden von G^2 oder jede derselben nur je eine. Ich werde zeigen, dass gerade immer zweimal das eine und zweimal das andre eintreten muss.

Sei nämlich g eine Gerade von $[g]$, so legen wir durch g und $[g']$ irgend einen linearen Complex C, welcher mit C^2 ein Strahlensystem

2. Grades Σ^2 gemein haben wird. Nun enthält Σ^2 bekanntlich*) 5 Paare von Schaaren von Erzeugungen von Flächen 2. Grades, und alle Flächen derselben Schaar schneiden sich in 8 singulären Punkten von Σ^2. Betrachten wir nunmehr diejenige Schaar, zu welcher auch $[g']$ gehört. Diese schickt ja auch eine $[h]$ durch den Strahl g von Σ^2, durch welchen dann die Flächen G^2 und H^2 gehen, sodass irgend eine dritte Fläche der Schaar auf g zwei singuläre Punkte $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{p}_2$ von Σ^2 und somit auch von C^2 ausschneidet. Weil aber $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{p}_2$ singuläre Punkte von Σ^2 sind, so geht die zugehörige singuläre Ebene, welche ja auch eine von C^2 ist, durch g und die Erzeugende von $[g']$ durch $\mathfrak{p}_1$ resp. $\mathfrak{p}_2$; denn durch diese Geraden ist gerade die zu $\mathfrak{p}_1$ resp. $\mathfrak{p}_2$ gehörige Ebene des linearen Complexes C bestimmt. Wir sehen also, dass jedenfalls auf jeder Erzeugenden von G^2 zwei solche singuläre Punkte von C^2 liegen, deren eine singuläre Ebene beide durch den singulären Punkt gehenden Erzeugenden von G^2 enthält. Ich werde nun zeigen, dass diese Punkte eine Raumcurve 4. Ordnung 1. Species erfüllen.

Der Complex C hat nämlich mit $[g]$ noch eine zweite Gerade g_1 gemein, auf welcher offenbar H^2 ebenfalls ein Paar Punkte der definirten Art ausschneidet. Lassen wir nun H^2 die Schaar des durch $[h]$ gehenden Tangentialcomplexes von g durchlaufen, welcher $[h]$ zugehört, so beschreibt gleichzeitig C ein Büschel von Complexen durch g und $[g']$, welches zu der Schaar der H^2 projectiv ist. Die g_1 werden also aus einer Geraden g' von $[g']$ durch ein derselben Schaar projectives Ebenenbüschel projicirt, welches mit dieser, da sie vom Index 2 ist**), eine Fläche 4. Ordnung erzeugt. Diese hat g und g' zu Doppelgeraden. Von g' ist die evident; von g folgt es so. Der einzige specielle Complex unter den Complexen C, welcher also aus den g treffenden Geraden besteht, hat mit $[g]$ g selbst als zweite Gerade gemein, mit dem Tangentialcomplexe von g aber nothwendig eine aus zwei Ebenen durch g bestehende H^2, da sonst die Geraden von $[h]$ die g, mit welcher sie zur selben Erzeugung gehören, nicht schneiden könnten. Es schneidet folglich unsere Fläche 4. Ordnung die G^2 noch in einer Raumcurve 4. Ordnung 1. Species c^4, welche der Ort der Punkte $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{p}_2$ ist.

Schneide nunmehr die zweite durch $\mathfrak{p}_1$ gehende singuläre Ebene des Complexes C^2 diese c^4 etwa in $\mathfrak{q}$, sodass $\mathfrak{p}_1\mathfrak{q}$ ein Strahl von C^2 ist, so sei F^2 die Fläche 2. Grades durch c^4 und $\mathfrak{p}_1\mathfrak{q}$. Dann ist augenscheinlich der Complex derjenigen Geraden, welche F^2 und G^2 in harmonisch getrennten Punktepaaren schneiden, mit C^2 identisch.

*) S. meine geom. Unters. über Strahlencomplexe 1. u. 2. Grades, Math. Ann. Bd. XV, pag. 441, 442.

**) S. Cremona, ebene Curven, deutsch von Curtze, § 14, Lehrsatz I, pag. 117.

Denn er hat mit C^2 erstens das Strahlensystem 4. Grades gemein, welches von den Tangenten der G^2 in den Punkten von c^4 gebildet wird, und ausserdem den Strahl $\mathfrak{p}_1\,\mathfrak{q}$. Hiermit ist also bewiesen, dass, *sobald ein Strahlencomplex 2. Grades die Geraden beider Erzeugungen einer Fläche 2. Grades enthält, er der Ort derjenigen Geraden ist, welche zwei Flächen 2. Grades in harmonisch getrennten Punktepaaren treffen.*

Unsere Schlüsse erleiden nur dann eine Ausnahme, wenn es keinen linearen Complex giebt, welcher C^2 in einem eigentlichen Strahlensystem 2. Grades schneidet, d. h. wenn C^2 in zwei in Involution liegende lineare Complexe zerfällt; dann giebt es ja auch keine Singularitätenfläche mehr. In diesem Falle kann C^2 dann und nur dann als Ort der Geraden betrachtet werden, welche zwei Flächen 2. Grades in harmonisch getrennten Punktepaaren schneiden, wenn einer der beiden linearen Complexe ein specieller ist, dessen Leitgerade also dem andern angehört. Dann ist die eine beider Flächen irgend ein Ebenenpaar durch die Leitgerade, durch welche auch die andere Fläche gehen muss.

Leipzig, im November 1882.

Ein neues Uebertragungsprincip für binäre Formen, deren Ordnungszahl eine nicht prime ist.

Von

FRANZ MEYER in Tübingen.

1. Das im Folgenden dargelegte Princip in seiner ganzen Allgemeinheit zu formuliren, begegnet einigen Schwierigkeiten, die namentlich sprachlicher Natur sind, und die nach Möglichkeit zu beseitigen, durch einige voraufgeschickte Erklärungen und Sätze versucht ist.

Trotzdem das Princip als solches *rein algebraisch* ist, so fehlt es doch seinem Ausspruch, in algebraischer Sprache abgefasst, an Uebersichtlichkeit, sodass ein mehr geometrischer Ausdruck desselben geradezu geboten zu sein scheint. Denn die Worte, deren sich dieser bedient, sind durchweg Analogiebildungen, sodass ihrem Verständniss durch bekannte Dinge schon wesentlich vorgearbeitet ist.

2. Bekanntlich lassen sich alle binären invariantiven*) Bildungen nach Cayley**) auf die bilineare Invariante zweier Formen gleicher Ordnung zurückführen.

Das gemeinte Princip zeigt nun, dass, wofern die Ordnung n zweier solcher binärer Formen nicht prim, also (mindestens) in zwei ganzzahlige Factoren μ, ν zerfällt (sodass $n = \mu\nu$)

„dass dann die bilineare Invariante der gegebenen beiden binären Formen immer zugleich die bilineare Invariante zweier ganz bestimmten $(\mu + 1)$*-nären Formen von* ν^{ter} *Ordnung, resp. Klasse ist.*

Der reciproke Satz erfolgt durch Vertauschung von μ *und* ν*. Ausserdem sind auch die beiden binären Formen vertauschbar, wodurch Ordnung und Klasse der beiden* $(\mu + 1)$*-nären Formen in einander übergehen.“*

*) Es möge dieser Sylvester'sche Ausdruck hier acceptirt werden, um die Begriffe In- und Covarianten durch einen Ausdruck zu ersetzen.

**) cf. seine bekannten memoirs upon quantics in den Philosophical Transactions (of London).

Daraus ist schon ersichtlich, dass auf diese Weise zunächst wenigstens ein Theil der *binären* Invariantentheorie einen besonderen Theil der folgenden (ternären etc.) bildet, oder was dasselbe ist, sich auf diese übertragen lässt.

Es zeigt sich, dass diese Uebertragung auf Grund einiger relativ einfacher *Apolaritätsverhältnisse* in diesen höheren Gebieten ermöglicht wird. Auf diese beziehen sich daher die nachfolgenden Erklärungen.

Erklärungen, Definitionen und Sätze.

3. α) Was die termini: „Apolarität, Tragen, Stützen, Ruhen" betrifft, vergleiche die Arbeiten von Reye*) selbst resp. die Erklärungen meiner früheren Noten (in diesen Annalen Bd. XXI).

β) Die Ausdrücke *„Ordnung und Classe* einer Fläche, Curve etc. in einem Raume von d Dimensionen verstehen sich in dem üblichen Sinne, dass, um die eine aus der andern hervorgehen zu lassen, resp. um die Ordnungsgleichung eines Gebildes dieses Raumes in die Classengleichung überzuführen und umgekehrt nur die vorhandenen Variabeln in die ihnen contragredienten überzugehen brauchen.

Es ist im Folgenden nur von Gebilden $(d-1)^{ter}$ und erster Ausdehnung die Rede. Diese heissen immer resp. Fläche, Curve.

γ) Daran schliessen sich zwei bekannte Hülfssätze:

γ_1) *„In jedem Raume ist eine Fläche zweiter Ordnung* $(a_x^2 = 0)$ *zugleich eine solche zweiter Classe* $(u_a^2 = 0)$".

γ_2) *„In jedem Raume (von d Dimensionen) ist eine Curve* d^{ter} *Ordnung zugleich eine solche* d^{ter} *Classe.*

*Ferner sind je zwei eigentliche Curven dieser Art in diesem Raume stets durch eine Collineation dieses Raumes in einander überführbar, oder was dasselbe ist, sie besitzen keine absoluten Invarianten".***)

Wir nennen diese Curven die *Grundcurven* des bezüglichen Raumes, und bezeichnen sie mit R_d resp. P_d (im Weiteren auch mit φ).

δ) Man kann das Coordinatenpolyeder stets so annehmen, dass eine solche Curve in der canonischen Gestalt dargestellt ist durch:

$$\varrho x_i = d_i \lambda^i \quad (i = 0, 1, \cdots, d), \tag{1}$$

wo die d die zur Zahl d gehörigen Binomialcoefficienten sind, also:

$$d_n = 1, \quad d_{n-1} = d, \quad d_{n-2} = \frac{d(d-1)}{1 \cdot 2}, \cdots, d_1 = d, \; d_0 = 1.$$

Dann ist die zu (1) *dualistische* Darstellung, wie man sich leicht überzeugt:

$$\sigma u_i = (-1)^i \lambda^{d-i}. \tag{2}$$

*) In den Bänden des Crelle'schen Journals 78, 79, 82.

**) Vgl. z. B. G. Veronese, Behandlung der projectivischen Verhältnisse der Räume von verschiedenen Dimensionen mittelst des Princips des Projicirens und Schneidens. Diese Ann. XIX.

In dieser canonischen Form heissen die Grundcurven *Normcurven* (des bezüglichen Raumes) und seien bezeichnet mit N_d resp. N_d.

ε) Es giebt eine $\delta = \frac{d(d-1)}{2}$ — 1-fach unendliche (∞^δ) lineare Schaar von Flächen zweiter Ordnung $F_2(a_x^2 = 0)$, die alle Punkte einer gegebenen Grundcurve enthalten oder: *„der Curve R_d einbeschrieben sind"*.

Desgleichen eine ebenso mächtige Schaar von Flächen zweiter Classe Φ_2 ($u_\alpha^2 = 0$) die sich zur Curve P_d dualistisch entsprechend verhalten oder: *„der Curve P_d umbeschrieben sind"*.

ζ) Trägt (stützt) eine Fläche zweiter Ordnung F_2 *alle* einer Curve P_d umbeschriebenen Flächen zweiter Classe, so heisse es: *„F_2 trägt (stützt) die Curve P_d"*, (und im dualistischen Falle für eine Φ_2: *„Φ_2 stützt sich (ruht) auf die (der) Curve R_d"*.

η) Eine Fläche n^{ter} Ordnung F_n stützt (ist apolar zu einer) eine Fläche $\varkappa^{\text{ter}}$ Classe $\Phi_\varkappa$, wenn sie mit *jeder* Fläche $(\varkappa - n)^{\text{ter}}$ Ordnung $F_{\varkappa-n}$ zusammen eine die $\Phi_\varkappa$ stützende $F_\varkappa$ bildet ($\varkappa > n$), oder wenn die $\Phi_\varkappa$ mit *jeder* Fläche $(n - \varkappa)^{\text{ter}}$ Classe $\Phi_{n-\varkappa}$ zusammen eine auf der F_n ruhende Φ_n bildet ($n > \varkappa$).

Daran schliesst sich mit Hülfe von (ε) (ζ):

$\varkappa$) *„Eine F_n „stütze" eine Grundcurve P_d, wenn sie alle, P_d umschriebenen Φ_2 stützt"*: *und dualistisch:*

„Eine $\Phi_\varkappa$ ruhe auf einer Grundcurve R_d, wenn sie auf allen, R_d einbeschriebenen F_2 ruht".

λ) Auf irgend einer gegebenen $R_d(\mathsf{P}_d)$ kann man sich, wie (δ) zeigt, eine Parametervertheilung ausgebreitet denken, sodass jedem Punkte der Curve nur ein Werth des Parameters (λ) zugehört und umgekehrt.

Dieser Werth gehört zugleich dem zum Punkte dualistischen Elemente der Curve zu, nämlich der Fläche erster Ordnung ($a_x = 0$), die in ihm mit der Curve P_d d consecutive Punkte gemein hat.

Irgend eine F_n hat mit der R_d nd Punkte gemein

$$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_{nd},$$

die Wurzeln einer binären Form f_λ^{nd} seien.

„Dann sagen wir, die F_n habe mit der R_d die (binäre) Form f_λ^{nd} gemein; und im dualistischen Falle: Eine $\Phi_\varkappa$ habe mit der P_d eine (binäre) Form $\varphi_\lambda^{\varkappa d}$ gemein".

4. Diese Hülfsmittel werden genügen, um das angekündigte Princip deutlich auseinandersetzen zu können, was nunmehr geschehe:

Fundamentalprincip.

„Die bilineare Invariante (n^{te} Ueberschiebung) zweier binären Formen der Ordnung n, wo n nicht prim, also gleich $\mu\nu$ ist,

(3) a_λ^n, b_λ^n, *oder auch* $a_\lambda^{\mu\nu}$, $b_\lambda^{\mu\nu}$,

sei, (wie gewöhnlich)

(4) $(ab)^n$.

Diese ist dann identisch mit der bilinearen Invariante einer Fläche μ^{ter} Ordnung F_μ und einer Fläche μ^{ter} Classe Φ_μ, beide in einem Raume von ν Dimensionen gelegen.

Und zwar stehen beide Flächen in der Beziehung zu einander und zu einer (sonst beliebigen) Grundcurve $R_\nu (= \mathsf{P}_\nu)$, dass

$$\left\{\begin{array}{l} \text{die Fläche } F_\mu \text{ die Curve } \mathsf{P}_\nu \text{ trägt und mit ihr, als } R_\nu, \\ \qquad\qquad \text{die Form } a_\lambda^{\mu\nu} \\ \text{die Fläche } \Phi_\mu \text{ auf der Curve } R_\nu \text{ ruht und mit ihr, als } \mathsf{P}_\nu, \\ \qquad\qquad \text{die Form } b_\lambda^{\mu\nu} \end{array}\right\} \text{gemein hat}“.$$

„Sind daher die beiden binären Formen apolar zu einander (d. h. ist $(ab)^n = 0$) so auch die beiden Flächen, und umgekehrt“.

Es möge vor der Hand genügen, den Beweis für einige (einfachste) Fälle zu erbringen, nämlich:

(5) $$\left\{\begin{array}{ll} \text{I.} & n = 2 \cdot 2, \\ \text{II}^a. & n = 2 \cdot 3, \\ \text{II}^b. & n = 3 \cdot 2. \end{array}\right.$$

Erster Fall. $n = 2 \cdot 2 = 4$.

5. Die Formen sind:

(6) $$\left\{\begin{array}{l} a_\lambda^4 \equiv a_4\lambda^4 + 4a_3\lambda^3 + 6a_2\lambda^2 + 4a_1\lambda + a_0, \\ b_\lambda^4 \equiv b_4\lambda^4 + 4b_3\lambda^3 + 6b_2\lambda^2 + 4b_1\lambda + b_0 \end{array}\right.$$

und ihre bilineare Invariante

(7) $$(ab)^4 \equiv a_4b_0 - 4a_3b_1 + 6a_2b_2 - 4a_1b_3 + a_0b_4.$$

Der „Normkegelschnitt“ der Ebene (cf. 3 (δ)) ist dargestellt durch*):

(8) ϱx_2**) $= \lambda^2$, $\varrho x_1 = 2\lambda$, $\varrho x_0 = 1$, oder $4x_0x_2 - x_1^2 = 0$, (N_2)

und dualistisch durch:

(9) $\sigma u_2 = 1$, $\sigma u_1 = -\lambda$, $\sigma u_0 = \lambda^2$ oder $u_0u_2 - u_1^2 = 0$. (N_2)

Mithin trägt ein Kegelschnitt

(10) $$a_x^2 \equiv \sum\sum a_{i\varkappa} x_i x_\varkappa = 0, \quad (i, \varkappa = 0, 1, 2)$$

---

*) Weshalb gerade diese canonische Form bevorzugt ist, geht aus Nr. 9 hervor.

**) Die $\varrho, \sigma, \tau, r, s$ etc. bedeuten immer, wie evident, nur Proportionalitätsfactoren, was hier für alle Fälle bemerkt sei.

den Normkegelschnitt N_2 unter der Bedingung:

(11) $$a_{02} = a_{11}$$

und desgleichen ruht ein Kegelschnitt

(12) $$u_\beta^2 = \sum\sum u_{i\varkappa}\beta_i\beta_\varkappa, \quad (i, \varkappa = 0, 1, 2)$$

auf dem Normkegelschnitt N_2 unter der Bedingung:

(13) $$4\beta_{02} = \beta_{11}.$$

Diese Bedingungen (11), (13) bringen wir in eine andere Form.

In der That ist die erste ersetzbar durch das System von Beziehungen:

(14) $$a_{i\varkappa} = a_{i+\varkappa}, \quad (i + \varkappa = 0, 1, \cdots, 4)$$

und (10) geht über in:

(15) $$a_x'^2 = a_0 x_0^2 + 2a_1 x_0 x_1 + a_2(2x_0 x_2 + x_1^2) + 2a_3 x_1 x_2 + a_4 x_2^2 = 0.$$

Lässt man nun die Coefficienten a mit denen der ersten Form von (6) identisch sein, so erkennt man sofort, dass der Kegelschnitt (15) den Normkegelschnitt N_2 in dem Punktquadrupel a_λ^4 trifft. Dann heisse (15) der der Form a_λ^4 *„entsprechende"* Kegelschnitt.

Um ein Geringes schwieriger ist die Aufstellung des zweiten, der Form b_λ^4 (aber in dualistischer Weise) entsprechenden Kegelschnitts.

Ersetzt man in (12) gemäss der Bedingung (13) β_{11} durch $4\beta_{02}$, so kann man dann wieder, wie oben, die neuen Grössen $\beta_r (r = 0, 1, \cdots, 4)$ einführen mittelst der Relationen:

(16) $$\beta_{i\varkappa} = \beta_{i+\varkappa}, \quad (i + \varkappa = 0, 1, \cdots, 4).$$

Dann geht (12) über in:

(17) $$u_\beta^3 \equiv u_0^2\beta_0 + 2u_0u_1\beta_1 + 2\beta_2(u_0u^2 + 2u_1^2) + 2u_1u_2\beta_3 + u_2^2\beta_4 = 0.$$

Soll nun das Tangentenquadrupel β_λ^4, das dieser Kegelschnitt mit dem Normkegelschnitt N_2 gemein hat, wie wir wollen, mit der zweiten Form von (6) b_λ^4 identisch sein, so finden folgende Beziehungen statt:

(18) $$\tau\beta_0 = b_4, \quad \tau\beta_1 = -2b_3, \quad \tau\beta_2 = b_2, \quad \tau\beta_3 = -2b_1, \quad \tau\beta_4 = b_0,$$

mittelst deren (17) die Gestalt annimmt:

(19) $$u_b^3 \equiv u_0^2 b_4 - 4u_0u_1b_3 + 2b_2(u_0u_2 + 2u_1^2) - 4u_1u_2b_1 + u_2^2b_0 = 0.$$

Die bilineare Invariante der Kegelschnitte (15) (19) ist aber keine andere, als $(ab)^4$, oder, in der üblichen Schreibweise: es ist

(20) $$(ab)^4 = (a'b')^2.$$

Für den Normkegelschnitt kann man aber evidenter Weise jeden andern (R_2) substituiren, der dasselbe leistet, d. h. einen solchen, der auf (15) ruht, (19) trägt, und mit ihnen die Formen (cf. (6)) a_λ^4 resp. b_λ^4 gemein hat.

Selbstverständlich braucht die Gleichheit dieser Formen mit denen in (6) nur eine invariantive zu sein, da sie ja von der Parameterver-

theilung auf R_2 d. h. von einer linearen Transformation von λ ganz unabhängig ist.

Damit ist das allgemeine Princip für diesen Fall erhärtet.

Zweiter Fall. *Erste Behandlung: im quarternären Gebiet* ($n=2\cdot 3=6$).

6. Die Formen sind jetzt

$$(21)\quad \begin{cases} a_\lambda^6 \equiv a_6\lambda^6 + 6a_5\lambda^5 + 15a_4\lambda^4 + 20a_3\lambda^3 + 15a_2\lambda^2 + 6a_1\lambda + a_0, \\ b_\lambda^6 \equiv b_6\lambda^6 + 6b_5\lambda^5 + 15b_4\lambda^4 + 20b_3\lambda^3 + 15b_2\lambda^2 + 6b_1\lambda + b_0 \end{cases}$$

und

$$(22)\quad (ab)^6 \equiv a_6b_0 - 6a_5b_1 + 15a_4b_2 - 20a_3b_3 + 15a_2b_4 - 6a_1b_5 + a_0b_6.$$

Die Gleichungen der Normcurve*) N_3 resp. N_3 sind jetzt:

$$(23)\quad \varrho x_3 = \lambda^3, \quad \varrho x_2 = 3\lambda^2, \quad \varrho x_1 = 3\lambda, \quad \varrho x_0 = 1, \qquad (N_3)$$

$$(24)\quad \sigma u_3 = 1, \quad \sigma u_2 = -\lambda, \quad \sigma u_1 = \lambda^2, \quad \sigma u_0 = -\lambda^3, \qquad (\mathsf{N}_3)$$

und die Schaar der ihr ein- resp. umbeschriebenen Flächen zweiter Ordnung resp. Classe setzt sich linear zusammen aus den folgenden:

$$(25)\quad 3x_0x_2 - x_1^2 = 0, \quad 9x_0x_3 - x_1x_2 = 0, \quad 3x_1x_3 - x_2^2 = 0, \qquad (N_3),$$

$$(26)\quad u_0u_2 - u_1^2 = 0, \quad u_0u_3 - u_1u_2 = 0, \quad u_1u_3 - u_2^2 = 0, \qquad (\mathsf{N}_3).$$

Demnach trägt eine Fläche zweiter Ordnung

$$(27)\quad a_x^2 \equiv \sum\sum a_{ix}x_ix_x = 0 \quad (i, x = 0, 1, 2, 3)$$

die Curve N_3 unter den Bedingungen**):

$$(28)\quad a_{02} = a_{11}, \quad a_{03} = a_{12}, \quad a_{13} = a_{22}$$

und eine Fläche zweiter Classe:

$$(29)\quad u_\beta^2 \equiv \sum\sum u_{ix}\beta_i\beta_x (i, x = 0, 1, 2, 3) = 0$$

ruht auf der Curve N_3, wenn:

$$(30)\quad \beta_{11} = 3\beta_{02}, \quad \beta_{12} = 9\beta_{03}, \quad \beta_{22} = 3\beta_{13}.$$

Die Bedingungen (28) sind unmittelbar ersetzbar durch die andern:

$$(31)\quad a_{ix} = u_{i+x}, \quad (i + x = 0, 1, \cdots, 6),$$

wodurch aus (27) wird:

$$(32)\quad a_x'^2 \equiv a_0x_0^2 + 2a_1x_0x_1 + a_2(2x_0x_2 + x_1^2) + 2a_3(x_0x_3 + x_1x_2) + a_1(2x_1x_3 + x_2^2) + 2a_5x_2x_3 + a_6x_3^2 = 0.$$

Deren Schnitt mit der Curve N_3 (23) ist durch das Sextupel geliefert:

$$(33)\quad a_\lambda^6 = 0.$$

---

*) Ueber die Wahl gerade dieser Form cf. Nr. 13.

**) cf. meine Note, diese Annalen XXI, pag. 445.

Was die zweite Fläche (29) betrifft, die auf N_3 ruhen soll, so ersetze man zunächst gemäss (30) β_{11}, β_{12}, β_{22} durch resp. $3\beta_{02}$, $9\beta_{03}$, $3\beta_{03}$ in (29) und führe nunmehr die zu (31) analogen Relationen ein:

$$\beta_{i\varkappa} = \beta_{i+\varkappa}, \quad (i+\varkappa = 0, 1, \cdots, 6). \tag{34}$$

Dann wird (29) zu:

$$u_\beta^3 \equiv u_0^2\beta_0 + 2u_0u_1\beta_1 + \beta_2(2u_0u_2 + 3u_1^2) + 2\beta_3(u_0u_3 + 9u_1u_2) + \beta_4(2u_1u_3 + 3u_2^2) + 2u_2u_3\beta_5 + u_3^2\beta_6 = 0, \tag{35}$$

hat also mit der Curve N_3 die Ebenen gemein*):

$$\beta_0\lambda^6 - 2\beta_1\lambda^5 + 5\beta_2\lambda^4 - 20\beta_3\lambda^3 + 5\beta_4\lambda^2 - 2\beta_5\lambda + \beta_6 = 0. \tag{36}$$

Soll dieses Sextupel mit der zweiten Form in (21) b_λ^6 identisch sein, so resultiren die Beziehungen:

$$r\beta_0 = b_6, \; r\beta_1 = -3b_5, \; r\beta_2 = 3b_4, \; r\beta_3 = -b_3, \; r\beta_4 = 3b_2, \; r\beta_5 = -3b_1, \; r\beta_6 = b_0, \tag{37}$$

und (35) geht über in:

$$u_b^3 \equiv u_0^2b_6 - 6u_0u_1b_5 + 3b_4(2u_0u_2 + 3u_1^2) - 2b_3(u_0u_3 + 9u_1u_2) + 3b_2(2u_1u_3 + 3u_2^2) - 6u_2u_3b_1 + u_3^2b_0 = 0. \tag{38}$$

Die bilineare Invariante der linken Seite von (32) (38) ist aber $(ab)^6$, d. h. wir haben:

$$(ab)^6 = (a'b')^2, \quad \text{q. e. d.} \tag{39}$$

Im Uebrigen gilt die entsprechende Bemerkung, wie am Schluss des ersten Falles.

Zweiter Fall. *Zweite Behandlung: im ternären Gebiet* ($n = 3 \cdot 2 = 6$).

7. Die binären Formen sind die obigen (21) mit ihrer Invariante (22). Für die Fläche zweiter Ordnung und Classe in der vorigen Nummer werden aber hier eine Curve dritter Ordnung resp. Classe substituirt, die den Normkegelschnitt trägt resp. auf ihm ruht und die Formen a_λ^6 resp. b_λ^6 mit ihm gemein hat.

Eine Curve dritter Ordnung C_3:

$$a_x^3 = \sum\sum\sum a_{i\varkappa l}x_ix_\varkappa x_l = 0, \quad (i, \varkappa, l = 0, 1, 2) \tag{40}$$

trägt den Normkegelschnitt N_2 unter den Bedingungen:

$$a_{s02} = a_{s11}, \quad (s = 0, 1, 2) \tag{41}$$

und eine Curve dritter Classe K_3

$$u_\beta^3 \equiv \sum\sum\sum \beta_{i\varkappa l}u_iu_\varkappa u_l = 0 \tag{41}$$

*) cf. diese Annalen XXI, p. 443.

ruht auf dem Normkegelschnitt N_2, wenn:

$$4\beta_{s02} = \beta_{s11}, \quad (s = 0, 1, 2). \tag{42}$$

Die Bedingungen (41) für die C_3 sind wieder unmittelbar ersetzbar durch:

$$a_{ixl} = a_{i+x+l}, \quad (i + x + l = 0, 1, \cdots, 6) \tag{43}$$

und (40) wird demnach:

$$\begin{aligned} a_x'^3 \equiv a_0x_0^3 + 3a_1x_0^2x_1 + 3a_2(x_0^2x_2 + x_1^2x_0) + a_3(6x_0x_1x_2 + x_1^3) \\ + 3a_4(x_2^2x_0 + x_1^2x_2) + 3a_5x_2^2x_1 + a_0x_2^3 = 0, \end{aligned} \tag{44}$$

und das Sextupel

$$a_\lambda^6 = 0 \tag{45}$$

stellt somit die C_3 mit N_2 gemeinsamen Punkte dar.

Gehen wir zur Classencurve K_3 (41) mit den Bedingungen (42) über, so ersetzen wir wieder zuerst die β_{s11} mittelst der $4\beta_{s02}$ nach (42) und unterwerfen die nunmehr noch übrigen β den Bezeichnungen:

$$\beta_{ixl} = \beta_{i+x+l}, \quad (i + x + l = 0, 1, \cdots, 6). \tag{46}$$

Dann wird aus (41):

$$\begin{aligned} u_\beta^3 \equiv u_0^3\beta_0 + 3u_0^2u_1\beta_1 + 3\beta_2(u_0^2u_2 + 4u_0u_1^2) + 2\beta_3(3u_0u_1u_2 + 2u_1^3) \\ + 3\beta_4(u_2^2u_0 + 4u_1^2u_2) + 3u_2^2u_1\beta_5 + u_2^3\beta_6 = 0. \end{aligned} \tag{47}$$

Diese Curve hat mit N_2 folgende sechs Tangenten gemein:

$$\lambda^6\beta_0 - 3\lambda^5\beta_1 + 15\beta_2\lambda^4 - 10\beta_3\lambda^3 + 15\beta_4\lambda^2 - 3\lambda\beta_5 + \beta_6 = 0, \tag{48}$$

eine Form, die mit b_λ^6 (21) identisch wird, wenn:

$$\begin{aligned} t\beta_0 = b_6, \quad t\beta_1 = -2b_5, \quad t\beta_2 = +b_4, \quad t\beta_3 = -2b_3, \\ t\beta_4 = +b_2, \quad t\beta_5 = -2b_1, \quad t\beta_6 = b_0. \end{aligned} \tag{49}$$

Damit geht (43) über in:

$$\begin{aligned} u_{b'} \equiv u_0^3b_6 - 6u_0^2u_1b_5 + 3b_4(u_0^2u_2 + 4_0u_1^2) - 4b_3(3u_0u_1u_2 + 2u_1^3) \\ + 3b_2(u_2^2u_0 + 4u_1^2u_2) - 6u_2^2u_1b_1 + u_2^3b_0 = 0. \end{aligned} \tag{50}$$

Endlich ergiebt sich wieder, dass die bilineare Invariante der linken Seiten von (44), (50) nichts Anderes ist, als $(ab)^6$; oder man hat:

$$(ab)^6 = (a'b')^3. \quad \text{q. e. d.} \tag{51}$$

Natürlich gilt desgleichen die Schlussbemerkung von Nummer 5.

Mit leicht verständlicher Erweiterung der Bezeichnungen (20), (39), (51) können wir somit den Sinn unseres allgemeinen Princips (Nr. 4) in den Gleichungen zusammenfassen:

$$(ab)^{\mu\nu} = (a'b')^\mu = (a''b'')^\nu. \tag{52}$$

8. Es mögen jetzt noch einige Consequenzen aus dem Obigen gezogen werden, namentlich insofern sie die Theorie der conjugirten Gruppen binärer (ternärer, etc.) Formen angehen: auch sollen einige wenige Haupteigenschaften*) der den binären Formen „entsprechenden" Flächen, nur soweit sie unser Princip in ein helleres Licht stellen, kurz erörtert werden.

Es wird dabei wieder angemessen sein, die behandelten einfachen Fälle zum Mittelpunkt der Betrachtungen zu machen. Die Formulirung für den allgemeinsten Fall wird dadurch überflüssig.

Erster Fall $n = 4$.

9. Der Normkegelschnitt (8), (9) ist gerade so gewählt, dass, wie man sich leicht überzeugt, die homogenen Coordinaten ϱx_i eines Punktes der Ebene *zusammenfallen* mit den homogenen**) symmetrischen Functionen σ_0, σ_1, σ_2 der beiden Argumente der vom Punkte an N_2 gehenden Tangenten.

Dies einfache Hülfsprincip dient dazu, eine Reihe von Formen, wie sie im Folgenden auftreten, leicht in einander überzuführen.

Wir nehmen jetzt an, die Invariante $(ab)^4$ (7) verschwinde d. h. die beiden Formen (6) a_λ^4, b_λ^4 seien apolar; ferner sei a_λ^4 fest, b_λ^4 beweglich. Sind dann die elementar-symmetrischen Functionen von vier Elementen $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4$ bezeichnet mit $\frac{s_r}{s_0}$ $(r = 1, \cdots, 4)$, so sind diese vier Elemente immer dann die Wurzeln einer zu a_λ^4 apolaren Form b_λ^4, wenn:

$$a_0 s_0 + a_1 s_1 + a_2 s_2 + a_3 s_3 + a_4 s_4 \equiv a_s = 0. \tag{53}$$

Denn die linke Seite dieser Relation ist ja, abgesehen von einem unwesentlichen Factor, $(ab)^4$ selbst.

Oder, nach Rosanes, („Ueber ein Princip der Zuordnung algebraischer Formen", Crelle Bd. 76):

„*Die Gleichung* (53) *stellt die ganze zu* a_λ^4 *conjugirte Gruppe dar*".

*) Vgl. die Bemerkung am Schlusse dieser Mittheilung.

**) Unter den „homogenen symmetrischen" Functionen von n Elementen $s_0, s_1, s_2, \cdots, s_n$ (oder auch $\varrho s_1, \varrho s_2, \cdots, \varrho s_n$) verstehe ich die, deren Verhältnisse $\frac{s_\varkappa}{s_0}$ $(\varkappa = 1, 2, \cdots, n)$ mit den gewöhnlichen elementaren symmetrischen Functionen identisch sind.

***) Andererseits erkennt man leicht, dass alle Formen dieser Gruppe, wenn $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4$ die Wurzeln von $a_\lambda^4 = 0$ sind, in der Schaar:

$$\sum \nu_i (\alpha - \lambda_i)^4, \quad (i = 1, \cdots, 4)$$

enthalten sind (cf. Stephanos, Comptes Rendus 1881).

Im Uebrigen vergleiche bezüglich der verschiedenen Umformungen der Form a_s die Anmerkung meiner Note (diese Annalen XXI, pag. 442).

Führt man des Weiteren noch folgende Bezeichnungen ein:

$$(54)\quad \lambda_1+\lambda_2=\frac{\sigma_1}{\sigma_0},\quad \lambda_1\lambda_2=\frac{\sigma_2}{\sigma_0};\qquad \lambda_3+\lambda_4=\frac{\tau_1}{\tau_0},\quad \lambda_3\lambda_4=\frac{\tau_2}{\tau_0},$$

so kann man der Gleichung (53) auch folgende Gestalt geben:

$$(55)\quad \sigma_0(a_0\tau_0+a_1\tau_1+a_2\tau_2)+\sigma_1(a_1\tau_0+a_2\tau_1+a_3\tau_2)+\sigma_2(a_2\tau_0+a_3\tau_1+a_4\tau_2)=0.$$

Mit Rücksicht auf unser Hülfsprincip ergiebt sich sofort, dass diese Gleichung aussagt, die Punkte $(\sigma_i)(\tau_i)$ sind in Bezug auf den Kegelschnitt (15) $(a_x'^2=0)$ conjugirt, oder da man die vier Werthe $\lambda_1\lambda_2$ $\lambda_3\lambda_4$ auf drei Weisen in zwei Gruppen zu je zweien theilen kann:

„Die Gleichung (53) $a_x=0$ *(wenn man jedes Element* λ *als Argument einer Tangente von* N_2 *auffasst) stellt die (dreifach) unendliche Zahl von* N_2 *umschriebenen Polvierseiten des Kegelschnitts* $a_x'^2=0$ *dar (wo dieser* N_2 *trägt und aus ihm, als* N_2 *— das Punktquadrupel* a_λ^4 *ausschneidet)".*

Jetzt lassen wir unser Hauptprincip in Kraft treten, und erhalten:

„Ein (sonst) beliebiger Kegelschnitt A trage einen (sonst) beliebigen Kegelschnitt φ. *Dann giebt es eine (dreifach) unendliche Zahl von* φ *umschriebenen Polvierseiten von A.*

Jedem dieser Polvierseite ist ein einziger Kegelschnitt B *einbeschrieben, der zugleich auf* φ *(resp. A) ruht.*

Dann ruht B *auch auf A (resp.* φ*).*

Somit giebt es eine dreifach unendliche lineare Schaar von Kegelschnitten B, *die den angegebenen Polvierseiten von A einbeschrieben sind und auf* φ *und A ruhen.*

Oder, mit Rücksicht auf das letzte:

„Gegeben seien zwei apolare Kegelschnitte φ *und A (so dass A* φ *trägt).*

Dann construire man die dreifach unendliche lineare Schaar von (Klassen)-Kegelschnitten B, *die auf* φ *und A ruhen.*

Die mit φ *gemeinsamen Tangentenvierseite der Schaar* B *sind Polvierseite*) von A (und zwar alle* φ *umschriebenen).*

---

*) Man kann drei Seiten eines solchen Polvierseits, wie aus (53) folgt, (als Tangenten von φ) beliebig annehmen. Dann giebt es einen einzigen Kegelschnitt B, der diese drei Seiten berührt und auf φ und A ruht. Die vierte Tangente, die B mit φ gemein hat, liefert die vierte Seite des durch die drei ersten bestimmten Polvierseits. Eine ähnliche Bestimmung gilt für die Poldreiseite.

Von diesen kann man eine Seite (als Tangente von φ) stets beliebig annehmen: dann existirt zunächst ein Gewebe von (Klassen)-Kegelschnitten, die diese Seite berühren und auf φ und A ruhen.

Dieses Gewebe enthält stets eine Schaar, die mit φ noch zwei weitere *feste* Tangenten gemein hat. Diese beiden Tangenten bilden dann mit der ersten ein Poldreiseit von A, das φ umschrieben ist.

Dualistisch construire man die dreifach unendliche lineare Schaar von (Ordnungs)-Kegelschnitten B, die φ und A tragen.

Die mit A gemeinsamen Punktviercke der Schaar B sind Polvierecke von φ (und zwar alle A einbeschriebenen)."

10. Ein Polvierseit eines Kegelschnitts A wird zum Poldreiseit, wenn die vierte Seite des ersteren unbestimmt wird.

Bezeichnet man daher die symmetrischen Funktionen von $\lambda_1\ \lambda_2\ \lambda_3$ mit $\frac{S_\varkappa}{S_0}(\varkappa = 1, 2, 3)$, so kann man (53) auch in der andern Form schreiben:

$$(56)\quad (a_0S_0 + a_1S_1 + a_2S_2 + a_3S_3) + \lambda_1(a_1S_0 + a_2S_1 + a_3S_2 + a_4S_3) \equiv A_1 + \lambda_1 A_2 = 0;$$

dann stellen die Gleichungen:

$$(57)\qquad A_1 = 0, \qquad A_2 = 0$$

die einfach unendlich vielen Hesse'schen $N_2 (= \varphi)$ umschriebenen Polvierseite*) von A dar.

Daraus folgt als specieller Fall des letzten Satzes:

„*Wenn ein Kegelschnitt A einen andern φ trägt, so kann man jedem der φ umschriebenen (einfach unendlich vielen) Poldreiseite von A (einfach) unendlich viele Kegelschnitte* B *einbeschreiben, die zugleich auf φ und A ruhen.*"

11. Wir gehen jetzt von zwei festen Formen aus:

$$(58)\qquad a_\lambda^4 \equiv f, \qquad a_{1\lambda}^4 \equiv f_1$$

und betrachten die zu f, f_1 conjugirte Gruppe und den dieser entsprechenden Kegelschnitt B.

Die Wurzeln irgend einer zu den Formen (58) apolaren (conjugirten) Form b_λ^4 müssen nach Obigem den beiden Gleichungen genügen

$$(59)\qquad a_s = 0, \quad a_{1s} = 0:$$

„(59) *stellt die ganze zu* (58) *conjugirte Gruppe dar*".

Bedienen wir uns noch des abkürzenden Ausdrucks: Ein Büschel (Netz, etc.) von Kegelschnitten trägt einen (ruht auf einem) Kegel-

---

*) Ihre Seiten, als Tangenten von $N_2(\varphi)$, bilden, wovon man sich leicht überzeugt, die zu den ersten Polaren von a_λ^4 conjugirte Involution.

Sie bilden selbst wiederum, was hier ohne Beweis mitgetheilt sein mag, die ersten Polaren einer zu a_λ^4 correspondirenden Form, $jf - iH$, wo i, j, H die bekannten invariantiven Bildungen von $f = a_\lambda^4$ sind (und zwar mit den üblichen Zahlenfactoren 2, 6, 2 versehen).

Beide Formen sind die, die dieselbe Hesse'sche Form H besitzen.

(Cf. Cap. II meines bald erscheinenden Buches, siehe die Schlussbemerkung).

schnitt, wenn alle Individuen des Büschels (Netzes, etc.) dies thun, so ergiebt unser Princip zuvörderst:

Gegeben sei ein Kegelschnittbüschel (A_1, A_2) *und ein von ihm getragener Kegelschnitt* φ.

I. Dann ist jedem der (zweifach) unendlich vielen φ *umschriebenen Polvierseite des Büschels* (A_1, A_2), *ein (einziger) Kegelschnitt* B *einbeschrieben, der zugleich auf* φ, A, A_1 *ruht.*

Wird B *also dadurch bestimmt, dass er auf einem dieser drei Kegelschnitte ruht, so ruht er auch auf den beiden andern. Oder:*

II. Man construire sich die zweifach unendliche Schaar (= Gewebe) der Kegelschnitte B, *die auf* φ, A, A_1 *ruhen.*

Jeder Kegelschnitt dieses Gewebes hat dann mit φ *ein Tangentenvierseit gemein, das zugleich Polvierseit des Büschels* (A, A_1) *ist.*

Wir nannten einen (Ordnungs)-Kegelschnitt A der Form a_λ^4 *„entsprechend"*, wenn er derjenige ist, der φ trägt und aus φ das Punktquadrupel a_λ^4 ausschneidet: dualistisch einen (Klassen)-Kegelschnitt B der Form b_λ^4 *„entsprechend"*, wenn er auf φ ruht und mit φ das Tangentenvierseit b_λ^4 gemein hat.

Dann können wir dem Satze auch folgende Formulirung geben (die sich dann, wie man sehen wird, fast unmittelbar auf höhere Gebiete übertragen lässt):

Auf einem (weder als Ordnungs- noch als Klassengebilde zerfallenden) Kegelschnitt φ sei eine Parametervertheilung in bekannter Art ausgebreitet.

Mittelst dieser sei auf φ

$$\begin{cases} \text{einmal die zweigliedrige Gruppe } a_\lambda^4 + \varkappa a_{1\lambda}^4, \\ \text{dann die ihr conjugirte dreigliedrige } b_\lambda^4 + \mu b_{1\lambda}^4 + \nu b_{2\lambda}^4 \end{cases}$$

dargestellt.

III. Dann „entspricht" der ersteren das Ordnungskegelschnittbüschel

$$A + \varkappa A_1,$$

dagegen der zweiten das Klassenkegelschnittgewebe

$$\mathsf{B} + \mu \mathsf{B}_1 + \nu \mathsf{B}_2.$$

Diese beiden stehen in der doppelten Beziehung

erstens, dass das Netz $A + \varkappa A_1 + m\varphi$ *die vollständige zum Gewebe* $\mathsf{B} + \mu \mathsf{B}_1 + \nu \mathsf{B}_2$;

zweitens, dass das Büschel $A + \varkappa A_1$ *die vollständige zur (dreifach unendlichen) Schaar* $\mathsf{B} + \mu \mathsf{B}_1 + \nu \mathsf{B}_2 + n\varphi$ *conjugirte Gruppe ist."*

12. Alle diese Sätze I, II, III enthalten aber auch Eigenschaften der quadratischen Transformation in der Ebene, wodurch ihre Wichtigkeit vermehrt wird.

Denn mit Berücksichtigung der Gleichungen (54), (55) ergiebt sich sofort, dass die Gleichungen (59) alle in Bezug auf das Kegelschnittbüschel (A, A_1) conjugirten Punktepaare darstellt d. h. bekanntlich die Punktepaare einer quadratischen ein-eindeutigen involutorischen Verwandtschaft T, deren vier Einheitspunkte die Grundpunkte jenes Büschels sind, deren Fundamentaldreieck somit mit dem gemeinsamen Polardreieck des Büschels zusammenfällt.

Wir nennen das Kegelschnittbüschel durch die Einheitspunkte einer (quadratischen, etc.) Transformation T einfach „das Einheitsbüschel von T".

Dann haben wir nach Obigem:

IV. Irgend eine Transformation T *sei gegeben; ihr Einheitsbüschel sei* (A, A_1).

Dann lassen sich die sämmtlichen Punktepaare von T *immer auffassen als die Gegeneckenpaare der (zweifach) unendlich vielen Polvierseite des Einheitsbüschels, die irgend einem der (dreifach unendlich vielen) auf dem Büschel ruhenden Kegelschnitte* φ *umbeschrieben sind.*

Greifen wir einen solchen Kegelschnitt φ *heraus, so giebt es wieder ein Gewebe von Kegelschnitten* B, *die alle zum Netze* (φ, A, A_1) *conjugirt sind.*

Irgend ein einem Kegelschnitt B *und* φ *gemeinsames Tangentenvierseit stellt vermöge seiner Gegeneckenpaare drei Punktepaare von* T *dar.*

Das Gewebe B *hat zugleich mit* φ *die sämmtlichen Formen* b_λ^4 *gemein, die zu den sämmtlichen Formen* a_λ^4, *die das Büschel* (A, A_1) *mit* φ *gemein hat, conjugirt sind.*"

Zweiter Fall. *Erste Behandlung.*

$$n = 2 \cdot 3 = 6.$$

13. Mit Hülfe der gewählten Bezeichnungen lassen sich die obigen Entwickelungen in ganz analoger Weise für diesen complicirteren Fall durchführen. Denn auch hier ist die cubische Normcurve (23), (24) so gewählt, dass die Coordinaten eines Raumpunktes mit den homogenen symmetrischen Functionen σ_0, σ_1, σ_2, σ_3 der drei Argumente $\lambda_1\ \lambda_2\ \lambda_3$ *identisch* sind, die den drei vom Punkte an die Curve gehenden Ebenen zugehören.

Bezeichnet man die drei entsprechenden Functionen dreier anderer Argumente λ_4, λ_5, λ_6 mit $\tau_0, \tau_1, \tau_2, \tau_3$, so schreibt sich die Bedingung, unter der die sechs Werthe λ die Wurzeln einer zur gegebenen Form a_λ^6 (21) apolaren Form b_λ^6 sind, folgendermassen:

$$(60)\quad \begin{cases} a_s \equiv a_0 s_0 + a_1 s_1 + a_2 s_2 + a_3 s_3 + a_4 s_4 + a_5 s_5 + a_6 s_6 = 0 \\ \quad = \sigma_0(a_0\tau_0 + a_1\tau_1 + a_2\tau_2 + a_3\tau_3) + \sigma_1(a_1\tau_0 + a_2\tau_1 + a_3\tau_2 + a_4\tau_3) \\ \quad + \sigma_2(a_2\tau_0 + a_3\tau_1 + a_4\tau_2 + a_5\tau_3) + \sigma_3(a_3\tau_0 + a_4\tau_1 + a_5\tau_2 + a_6\tau_3) \end{cases}$$

wo noch zu bemerken ist, dass die $s_i\,(i = 0, 1, \ldots, 6)$ die homogenen symmetrischen Functionen aller sechs Werthe λ sind.

Aus der zweiten Form von (60) geht wieder unmittelbar hervor, dass unter der Bedingung (60) die Punkte (σ_i) (τ_i) in Bezug auf die (die Normcurve N_3 stützende und aus ihr das Punktsextupel a_λ^6 ausschneidende) Fläche zweiter Ordnung: (32) $a_x'^2 = 0$ *conjugirt* sind, oder wegen der Symmetrie von (60) in Bezug auf die sechs λ:

„Trägt eine F_2 eine cubische Curve φ und trifft sie dieselbe im Punktsextupel a_λ^6, so stellt (60) $a_s = 0$ *die (fünffach unendliche) Schaar*) der φ umschriebenen Polsechsflache**) von F_2 dar.“*

„Die diesen entsprechenden Sextupel b_λ^6 bilden die ganze zu a_λ^6 conjugirte Gruppe.“

Mithin nach unserem Hauptprincipe:

„Trägt eine F_2 die cubische Curve φ, so ist stets einem der φ umschriebenen Polsechsflache von F_2 eine einzige Fläche zweiter Classe Φ_2 einbeschrieben, die zugleich auf φ ruht.

Diese ruht dann auch auf F_2.“

Oder:

„Trägt eine F_2 die cubische Curve φ, so bilde man die ganze (fünffach) unendliche Schaar von Flächen Φ_2, die zugleich auf F_2 und φ ruhen.

Jede dieser Flächen Φ_2 hat mit φ sechs Ebenen gemein, die ein Polsechsflach von F_2 bilden.

So gehört zur ganzen Schaar der Φ_2 die ganze Schaar der φ umschriebenen Polsechsflache von F_2.“

Oder, mit der dem Obigen ganz analogen Benützung des terminus „Entsprechen“:

Auf einer cubischen Curve φ sei in bekannter Weise eine Parametervertheilung ausgebreitet und mittelst ihrer eine binäre Form a_λ^6 nebst ihrer ganzen conjugirten Gruppe dargestellt.

„Dann ‚entspricht‘ der ersten Form eine bestimmte F_2 (die φ trägt und aus φ das Sextupel a_λ^6 ausschneidet), sowie der zweiten Gruppe eine

---

*) Cf. die zweite Anmerkung der Nr. 9, die hier analog gilt.

**) Wir gebrauchen, wie meistens üblich die Endung — flach, resp. — eck, um die Zusammensetzung aus Ebenen resp. Punkten anzudeuten. Nur für Vierflach und Viereck sagen wir ohne Unterschied Tetraeder.

Von einem solchen Polsechsflach von F_2 kann man fünf Ebenen (als Ebenen von φ) beliebig annehmen, dann ist die sechste eindeutig bestimmt.

Man erhält sie nach Obigem durch folgende Construction (cf. die Anm. zu Nr. 9). Es giebt *eine* Φ_2, die die fünf Ebenen berührt und zugleich auf φ und F_2 ruht. Die ihr mit φ gemeinsame sechste Ebene ist die gewünschte.

Für die Polfünf- und -vierflache gelten ganz analoge Sätze, wie in der erwähnten Anmerkung für die Poldreiseite eines Kegelschnitts mitgetheilten, ihre Aufstellung kann darum hier unterbleiben.

(*fünffach*) *unendliche Schaar von* Φ_2, *die auf* φ *ruhen und mit* φ *die* (*Ebenen*) *Sextupel jener Gruppe gemein haben.*

Dann bildet einmal die (*dreifach unendliche*) *Schaar von Flächen zweiter Ordnung, die sich aus* F_2 *und den der Curve* φ *einbeschriebenen Flächen linear zusammensetzt, die vollständige zur Schaar der* Φ_2, *andrerseits die* (*siebenfach unendliche*) *Schaar von Flächen zweiter Classe, die sich aus den* Φ_2 *und den der Curve* φ *umschriebenen Flächen linear zusammensetzt, die vollständige zu* F_2 *conjugirte Gruppe.*"

Wie sich dieser Satz modificirt, wenn für die eine Form a_λ^6 und die ihr conjugirte Gruppe eine *zwei*gliedrige Gruppe $a_\lambda^6 + \varkappa a_{1,\lambda}$ nebst der ihr conjugirten und endlich eine *drei*gliedrige Gruppe

$$a_\lambda^6 + \varkappa a_{1,\lambda}^6 + \varkappa' a_{2,\lambda}^6$$

nebst der ihr conjugirten eintreten, liegt nach den Angaben der vorigen und dieser Nummer so auf der Hand, dass auf diese Ergänzungen hier verzichtet werden darf.

Im Uebrigen, was diese mehrgliedrigen Gruppen anbelangt, vergleiche man die in meiner Note (diese Annalen Bd. XXI, pag. 134ff.) ohne Beweis mitgetheilten Sätze.

Auch die der quadratischen Transformation T analoge Raumtransformation, die dort (pag. 134, dritte Anm.) ihre wesentliche Rolle spielte, lässt sich im Anschluss an die *drei*gliedrigen Gruppen sechsten Grades gerade so behandeln, wie oben die quadratische im Anschluss an die zweigliedrigen Gruppen vierten Grades.

14. Dagegen sollen die speciellen Polsechsflache der Schaar (60) kurz ihre Erwähnung finden.

Wird eine Ebene eines Polsechsflaches der Fläche F_2 unbestimmt, so wird es zum Polfünfflach: desgleichen wenn zwei der Ebenen, zum Poltetraeder.

Bezeichnen also $S_i (i = 0, \ldots, 5)$ die homogenen symmetrischen Functionen von fünf Elementen $(\lambda_1 \ldots \lambda_5)$: analog $T_\varkappa (\varkappa = 0, \ldots, 4)$ die von vieren $(\lambda_1 \ldots \lambda_4)$, so zeigt die Form (60), dass

$$(61) \qquad \begin{cases} A_1 \equiv a_0 S_0 + a_1 S_1 + \cdots + a_5 S_5 = 0, \\ A_2 \equiv a_1 S_0 + a_2 S_1 + \cdots + a_6 S_5 = 0 \end{cases}$$

die φ umbeschriebenen (dreifach unendlich vielen) Polfünfflache von F_2 und

$$(62) \qquad \begin{cases} A_{11} \equiv a_0 T_0 + a_1 T_1 + \cdots + a_4 T_4 = 0, \\ A_{12} \equiv a_1 T_0 + a_2 T_1 + \cdots + a_5 T_4 = 0, \\ A_{22} = a_2 T_0 + a_3 T_1 + \cdots + a_6 T_4 = 0 \end{cases}$$

die φ umschriebenen (einfach unendlich vielen) Poltetraeder von F_2 repräsentirt.

Andrerseits erkennt man leicht, dass diese Polfünfflache, Poltetraeder (die ja φ umschrieben sind)

„durch die viergliedrige zu den ersten Polaren von a_λ^6 } *conjugirte*
resp. durch die zweigliedrige zu den zweiten Polaren von a_λ^6 } *conjugirte*
Gruppe dargestellt sind.“

Diese letztere bildet also eine Involution vierten Grades und man gelangt so zu den damals (pag. 135ff.) angeführten Sätzen über die Poltetraeder von F_2, die φ umschrieben sind.

Lassen wir uns hier nur insoweit auf diese speciellen Polflache von F_2 ein, als sie mit unserem Princip in Connex stehen, so erhalten wir:

„Irgend einem φ umschriebenen Polfünfflache von F_2 kann man noch einfach unendlich viele Flächen Φ_2 einbeschreiben, die auf F_2 und φ ruhen.“

„Irgend einem φ umschriebenen Poltetraeder von F_2 kann man noch zweifach unendlich viele Flächen Φ_2 einbeschreiben, die auf F_2 und φ ruhen.“

Zweiter Fall. *Zweite Behandlung.*

$$n = 3 \cdot 2 = 6.$$

15. Für diesen kann man die bei der ersten Behandlung gewonnenen Sätze sofort umschreiben, wenn man für die Pol-sechs-fünf-vierflache der die cubische Raumcurve φ tragenden Fläche F_2 die Pol-sechs-fünf-vierseite der einen Kegelschnitt φ tragenden ebenen cubischen Curve C_3 substituirt.

Zum Beweise wird es vollständig genügen, wenn wir zeigen, dass die Relation

$$a_s = 0 \tag{60}$$

in der That jetzt ein *Polsechsseit* derjenigen cubischen Curve C_3 darstellt, die den Normkegelschnitt N_2 trägt und aus ihm das Sextupel a_λ^6 ausschneidet, und zwar ein N_2 umbeschriebenes Polsechsseit von C_3.

Dazu reicht es wieder aus, wenn bewiesen wird, dass die drei Punkte $(\sigma_i)\,(\tau_i)\,(\tau_i')$, wo dies die homogenen symmetrischen Functionen der Argumentenpaare $\lambda_1\lambda_2$ resp. $\lambda_3\lambda_4$, resp. $\lambda_5\lambda_6$ sind, ein in Bezug auf die C_3 (44) $a_x'^3 = 0$ conjugirtes Poldreieck bilden.

In der That kann man (60) auch folgende Form geben:

$$\begin{aligned}(60)\quad a_s = 0 \equiv \sigma_0 \{ &\tau_0(a_0\tau_0' + a_1\tau_1' + a_2\tau_2') + \tau_1(a_1\tau_0' + a_2\tau_1' + a_3\tau_2') \\ &+ \tau_2(a_2\tau_0' + a_3\tau_1' + a_4\tau_2')\} \\ + \sigma_1 \{ &\tau_0(a_1\tau_0' + a_2\tau_1' + a_3\tau_2') + \tau_1(a_2\tau_0' + a_3\tau_1' + a_4\tau_2') \\ &+ \tau_2(a_3\tau_0' + a_4\tau_1' + a_5\tau_2')\}\end{aligned}$$

$$+\sigma_2\{\tau_0(a_2\tau_0'+a_3\tau_1'+a_4\tau_2')+\tau_1(a_3\tau_0'+a_4\tau_1'+a_5\tau_2')$$
$$+\tau_2(a_4\tau_0'+a_5\tau_1'+a_6\tau_2')\}$$

womit das gewünschte Resultat bewiesen ist.

Im Besondern spielen die Polvierseite von C_3 eine ebenso wichtige Rolle in der Ebene (vgl. Rosanes, insbesondere: Ein Princip der Zuordnung algebraischer Formen, Crelle, Bd. 76) wie die Poltetraeder von F_2 im Raume.

Eine nähere Darlegung dieser Beziehungen (namentlich auch zu Rosanes'schen Ergebnissen) widerspricht dem Zwecke dieser Mittheilung und möge daher auf eine andere Gelegenheit verschoben bleiben.

Im Uebrigen sind eine grosse Zahl hierhergehöriger Resultate bereits in meinem nun schon mehrfach angekündigten Buche*) abgeleitet, das sich gerade diese Verknüpfung der Apolaritätsbeziehungen *verschieden* ausgedehnter Gebiete zum Hauptstudium gemacht hat. Man findet dort auch den allgemeinen Beweis unseres Principes.

Tübingen, den 13. December 1882.

*) Dasselbe ist inzwischen erschienen (Nachschrift vom 4. April 1883).

Ueber unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten.

Von

Georg Cantor in Halle.

(Fortsetzung des Artikels in Bd. XXI, pag. 51.)

5.

§ 1.

Die bisherige Darstellung meiner Untersuchungen in der Mannichfaltigkeitslehre [1]) ist an einen Punkt gelangt, wo ihre Fortführung von einer Erweiterung des realen ganzen Zahlbegriffs über die bisherigen Grenzen hinaus abhängig wird, und zwar fällt diese Erweiterung in eine Richtung, in welcher sie meines Wissens bisher von Niemandem gesucht worden ist.

Die Abhängigkeit, in welche ich mich von dieser Ausdehnung des Zahlbegriffs versetzt sehe, ist eine so grosse, dass es mir ohne letztere kaum möglich sein würde, zwanglos den kleinsten Schritt weiter vorwärts in der Mengenlehre auszuführen; möge in diesem Umstande eine Rechtfertigung oder, wenn nöthig, eine Entschuldigung dafür gefunden werden, dass ich scheinbar fremdartige Ideen in meine Betrachtungen einführe. Denn es handelt sich um eine Erweiterung resp. Fortsetzung der realen ganzen Zahlenreihe über das Unendliche hinaus; so gewagt dies auch scheinen möchte, kann ich dennoch nicht nur die Hoffnung, sondern die feste Ueberzeugung aussprechen, dass diese Erweiterung mit der Zeit als eine durchaus einfache, angemessene, natürliche wird angesehen werden müssen. Dabei verhehle ich mir keineswegs, dass ich mit diesem Unternehmen in einen gewissen Gegensatz zu weitverbreiteten Anschauungen über das mathematische Unendliche und zu häufig vertretenen Ansichten über das Wesen der Zahlgrösse mich stelle.

Was das mathematische Unendliche anbetrifft, soweit es eine berechtigte Verwendung in der Wissenschaft bisher gefunden und zum Nutzen derselben beigetragen hat, so scheint mir dasselbe in erster Linie in der Bedeutung einer veränderlichen, entweder über

alle Grenzen hinaus wachsenden oder bis zu beliebiger Kleinheit abnehmenden, aber stets endlich bleibenden Grösse aufzutreten. Ich nenne dieses Unendliche das Uneigentlich-unendliche.

Daneben hat sich aber in der neueren und neuesten Zeit sowohl in der Geometrie wie auch namentlich in der Functionentheorie eine andere ebenso berechtigte Art von Unendlichkeitsbegriffen herausgebildet, wonach beispielsweise bei der Untersuchung einer analytischen Function einer complexen veränderlichen Grösse es nothwendig und allgemein üblich geworden ist, sich in der die complexe Variable repräsentirenden Ebene einen einzigen im Unendlichen liegenden, d. h. unendlich entfernten aber bestimmten Punkt zu denken und das Verhalten der Function in der Nähe dieses Punktes ebenso zu prüfen, wie dasjenige in der Nähe irgend eines anderen Punktes; dabei zeigt es sich, dass das Verhalten der Function in der Nähe des unendlich fernen Punktes genau dieselben Vorkommnisse darbietet, wie an jedem andern, im Endlichen gelegenen Punkte, so dass hieraus die volle Berechtigung dafür gefolgert wird, das Unendliche in diesem Falle in einen ganz bestimmten Punkt verlegt zu denken.

Wenn das Unendliche in solch einer bestimmten Form auftritt, so nenne ich es Eigentlich-Unendliches.

Diese beiden Erscheinungsarten, in welchen das mathematische Unendliche hervorgetreten ist, wobei es in beiden Formen die grössten Fortschritte in der Geometrie, in der Analysis und in der mathematischen Physik bewirkt hat, halten wir zum Verständniss des Folgenden wohl auseinander.

In der ersteren Form, als Uneigentlich-Unendliches, stellt es sich als ein veränderliches Endliche dar; in der andern Form, wo ich es Eigentlich-Unendliches nenne, tritt es als ein durchaus bestimmtes Unendliches auf. Die unendlichen realen ganzen Zahlen, welche ich im Folgenden definiren will und zu denen ich schon vor einer längeren Reihe von Jahren geführt worden bin, ohne dass es mir zum deutlichen Bewusstsein gekommen war, in ihnen concrete Zahlen von realer Bedeutung zu besitzen*), haben durchaus nichts gemein mit der ersten von jenen beiden Formen, mit dem Uneigentlich-Unendlichen, dagegen ist ihnen derselbe Charakter der Bestimmtheit eigen, wie wir ihn bei dem unendlich fernen Punkte in der analytischen Functionentheorie antreffen; sie gehören also zu den Formen und Affectionen des Eigentlich-Unendlichen. — Während aber der Punkt im Unendlichen der complexen Zahlenebene vereinzelt dasteht gegenüber allen im Endlichen liegenden Punkten, erhalten wir nicht blos eine einzige unendliche

*) Ich nannte sie bisher „bestimmt definirte Unendlichkeitssymbole" m. v. math. Ann. Bd. XVII, pag. 357, Bd. XX, pag. 113, Bd. XXI, pag. 54.

ganze Zahl, sondern eine unendliche Folge von solchen, die von einander wohl unterschieden sind und in gesetzmässigen zahlentheoretischen Beziehungen zu einander sowohl wie zu den endlichen ganzen Zahlen stehen. Diese Beziehungen sind nicht etwa solche, welche sich im Grunde auf Beziehungen endlicher Zahlen unter einander zurückführen lassen; die letztere Erscheinung tritt allerdings, aber auch nur bei den verschiedenen Stärken und Formen des Uneigentlich-Unendlichen häufig auf, z. B. bei unendlich klein- oder unendlich grosswerdenden Functionen einer Veränderlichen x, falls sie bestimmte endliche Ordnungszahlen des Unendlich-werdens haben. Solche Beziehungen können in der That nur als verschleierte Verhältnisse des Endlichen oder doch als auf letztere unmittelbar zurückführbar angesehen werden; die Gesetze unter den zu definirenden eigentlich-unendlichen ganzen Zahlen sind dagegen von Grund aus verschieden von den im Endlichen herrschenden Abhängigkeiten, womit aber nicht ausgeschlossen ist, dass die endlichen reellen Zahlen selbst gewisse neue Bestimmungen mit Hülfe der bestimmt-unendlichen Zahlen erfahren können.

Die *beiden Erzeugungsprincipe*, mit deren Hülfe, wie sich zeigen wird, die neuen bestimmt unendlichen Zahlen definirt werden, sind solcher Art, dass durch ihre vereinigte Wirkung jede Schranke in der Begriffsbildung realer ganzer Zahlen durchbrochen werden kann; glücklicherweise stellt sich ihnen aber, wie wir sehen werden, ein *drittes* Princip, welches ich das *Hemmungs-* oder *Beschränkungsprincip* nenne, entgegen, wodurch dem durchaus endlosen Bildungsprocess successive gewisse Schranken auferlegt werden, sodass wir natürliche Abschnitte in der absolut unendlichen Folge der realen ganzen Zahlen erhalten, welche Abschnitte ich *Zahlenclassen* nenne.

Die *erste* Zahlenclasse (I) ist die Menge der endlichen ganzen Zahlen $1, 2, 3, \cdots, \nu, \cdots$, auf sie folgt die *zweite* Zahlenclasse (II), bestehend aus gewissen in bestimmter Succession einander folgenden unendlichen ganzen Zahlen; erst nachdem die zweite Zahlenclasse definirt ist, kommt man zur dritten, dann zur vierten u. s. w.

Von der grössten Bedeutung scheint mir zunächst die Einführung der neuen ganzen Zahlen für die Entwickelung und Verschärfung des in meinen Arbeiten (Borchardts J. Bd. 77, pag. 257; Bd. 84, pag. 242) eingeführten und in den früheren Nummern dieses Aufsatzes vielfach verwandten Mächtigkeitsbegriffes. Jeder wohldefinirten Menge kommt darnach eine bestimmte Mächtigkeit zu, wobei zweien Mengen dieselbe Mächtigkeit zugeschrieben wird, wenn sie sich gegenseitig eindeutig, Element für Element, einander zuordnen lassen.

Bei endlichen Mengen fällt die Mächtigkeit mit der *Anzahl* der Elemente zusammen, weil solche Mengen in jeder Anordnung bekanntlich dieselbe Anzahl von Elementen haben.

Bei unendlichen Mengen hingegen war bisher überhaupt weder in meinen Arbeiten noch sonst wo von einer präcis definirten *Anzahl* ihrer Elemente die Rede, wohl aber konnte auch ihnen eine bestimmte, von ihrer Anordnung völlig unabhängige *Mächtigkeit* zugeschrieben werden.

Die kleinste Mächtigkeit unendlicher Mengen musste, wie leicht zu rechtfertigen war, denjenigen Mengen zugeschrieben werden, welche sich gegenseitig eindeutig der ersten Zahlenclasse zuordnen lassen und daher mit ihr gleiche Mächtigkeit haben. Dagegen fehlte es bisher an einer ebenso einfachen, natürlichen Definition der höheren Mächtigkeiten.

Unsere oben erwähnten Zahlenclassen der bestimmt-unendlichen realen ganzen Zahlen weisen sich nun als die natürlichen, in einheitlicher Form sich darbietenden Repräsentanten der in gesetzmässiger Folge aufsteigenden Mächtigkeiten von wohldefinirten Mengen aus. Ich zeige aufs Bestimmteste, dass die Mächtigkeit der zweiten Zahlenclasse (II) nicht nur verschieden ist von der Mächtigkeit der ersten Zahlenclasse, sondern dass sie auch thatsächlich die nächst höhere Mächtigkeit ist; wir können sie daher die zweite Mächtigkeit oder die Mächtigkeit zweiter Classe nennen. Ebenso ergiebt die dritte Zahlenclasse die Definition der dritten Mächtigkeit oder der Mächtigkeit dritter Classe u. s. w. u. s. w.

§ 2.

Ein anderer grosser, den neuen Zahlen zuzuschreibender Gewinn besteht für mich in einem *neuen*, bisher noch nicht vorgekommenen Begriffe, in dem Begriffe der *Anzahl* der Elemente einer *wohlgeordneten* unendlichen Mannichfaltigkeit; da dieser Begriff immer durch eine ganz bestimmte Zahl unseres erweiterten Zahlengebietes ausgedrückt wird, wofern nur die sogleich näher zu definirende Ordnung der Elemente der Menge bestimmt ist und da andererseits der Anzahlbegriff in unserer inneren Anschauung eine unmittelbare gegenständliche Repräsentation erhält, so ist durch diesen Zusammenhang zwischen Anzahl und Zahl die von mir betonte Realität der letzteren auch in den Fällen, dass sie bestimmt-unendlich ist, erwiesen.

Unter einer *wohlgeordneten* Menge ist jede wohldefinirte Menge zu verstehen, bei welcher die Elemente durch eine bestimmt vorgegebene Succession mit einander verbunden sind, welcher gemäss es ein *erstes* Element der Menge giebt und sowohl auf jedes einzelne Element (falls es nicht das letzte in der Succession ist) ein bestimmtes anderes folgt, wie auch zu jeder beliebigen endlichen oder unendlichen Menge von Elementen ein bestimmtes Element gehört, welches das ihnen allen *nächst* folgende Element in der Succession ist (es sei denn, dass es ein ihnen

allen in der Succession folgendes überhaupt nicht giebt). Zwei „wohlgeordnete" Mengen werden nun von derselben *Anzahl* (mit Bezug auf die für sie vorgegebenen Successionen) genannt, wenn eine gegenseitig eindeutige Zuordnung derselben derart möglich ist, dass, wenn E und F irgend zwei Elemente der einen, E_1 und F_1 die entsprechenden Elemente der anderen sind, immer die Stellung von E und F in der Succession der ersten Menge in Uebereinstimmung ist mit der Stellung von E_1 und F_1 in der Succession der zweiten Menge, so dass, wenn E dem F vorangeht in der Succession der ersten Menge, alsdann auch E_1 dem F_1 vorangeht in der Succession der zweiten Menge. Diese Zuordnung ist, wenn sie überhaupt möglich, wie man leicht sieht, immer eine durchaus bestimmte und da sich in der erweiterten Zahlenreihe stets eine und nur eine Zahl α findet, so dass die ihr *vorangehenden* Zahlen (von 1 an) in der natürlichen Succession dieselbe Anzahl haben, so wird man genöthigt, die Anzahl jener beiden „wohlgeordneten" Mengen geradezu gleich α zu setzen, wenn α eine unendlich grosse Zahl ist, und gleich der der Zahl α nächstvorangehenden Zahl $\alpha - 1$, wenn α eine endliche ganze Zahl ist.

Der wesentliche Unterschied zwischen den endlichen und unendlichen Mengen zeigt sich nun darin, dass eine endliche Menge in jeder Succession, welche man ihren Elementen geben kann, dieselbe Anzahl von Elementen darbietet; dagegen werden einer aus unendlich vielen Elementen bestehenden Menge im Allgemeinen verschiedene Anzahlen zukommen, je nach der Succession, welche man den Elementen giebt. Die *Mächtigkeit* einer Menge ist, wie wir gesehen, ein von der Anordnung unabhängiges Attribut derselben; die *Anzahl* der Menge weist sich aber als ein von einer gegebenen Succession der Elemente im Allgemeinen abhängiger Factor aus, sobald man es mit unendlichen Mengen zu thun hat. Indessen besteht dennoch auch bei den unendlichen Mengen ein gewisser Zusammenhang zwischen der *Mächtigkeit* der Menge und der bei gegebener Succession bestimmten *Anzahl* ihrer Elemente.

Nehmen wir zuerst eine Menge, welche die Mächtigkeit der ersten Classe hat und geben den Elementen *irgend* eine bestimmte Succession, so dass sie zu einer „wohlgeordneten" Menge wird, so ist ihre Anzahl immer eine bestimmte Zahl der *zweiten* Zahlenclasse und kann niemals durch eine Zahl einer anderen, als der zweiten, Zahlenclasse bestimmt werden. Andrerseits lässt sich jede Menge von der ersten Mächtigkeit in eine solche Succession ordnen, dass ihre Anzahl, mit Bezug auf diese Succession, gleich einer beliebig vorgezeichneten Zahl der zweiten Zahlenclasse wird. Wir können diese Sätze auch folgendermaassen ausdrücken: jede Menge von der Mächtigkeit *erster* Classe ist *abzählbar durch* Zahlen der *zweiten* Zahlenclasse und nur *durch* solche, und zwar

kann der Menge stets eine solche Succession ihrer Elemente gegeben werden, dass sie in dieser Succession *durch* eine beliebig vorgegebene Zahl der zweiten Zahlenclasse abgezählt wird, welche Zahl die Anzahl der Elemente der Menge mit Bezug auf jene Succession angiebt.

Die analogen Gesetze gelten für die Mengen höherer Mächtigkeiten. So ist jede wohldefinirte Menge von der Mächtigkeit *zweiter* Classe abzählbar *durch* Zahlen der *dritten* Zahlenclasse und nur *durch* solche, und zwar kann der Menge stets eine solche Succession ihrer Elemente gegeben werden, dass sie in dieser Succession *durch* eine *beliebig vorgegebene* Zahl der *dritten* Zahlenclasse abgezählt*) wird, welche Zahl die Anzahl der Elemente der Menge mit Bezug auf jene Succession bestimmt.

§ 3.

Der Begriff der *wohlgeordneten Menge* weist sich als fundamental für die ganze Mannichfaltigkeitslehre aus. Dass es immer möglich ist, jede *wohldefinirte* Menge in die *Form* einer *wohlgeordneten* Menge zu bringen, auf dieses, wie mir scheint, grundlegende und folgenreiche, durch seine Allgemeingültigkeit besonders merkwürdige Denkgesetz werde ich in einer späteren Abhandlung zurückkommen. Hier beschränke ich mich auf den Nachweis, wie aus dem Begriffe der *wohlgeordneten* Menge die Grundoperationen für die ganzen, sei es endlichen oder bestimmt-unendlichen Zahlen, in der einfachsten Weise sich ergeben und wie die Gesetze derselben aus der unmittelbaren inneren Anschauung mit apodictischer Gewissheit erschlossen werden. Sind zunächst zwei *wohlgeordnete* Mengen M und M_1, denen als Anzahlen die Zahlen α und β entsprechen, gegeben, so ist $M + M_1$ wieder eine *wohlgeordnete* Menge, welche entsteht, wenn zuerst die Menge M und auf sie folgend die Menge M_1 gesetzt und mit jener vereiniget wird; es entspricht also auch der Menge $M + M_1$ in Bezug auf die sich ergebende Succession ihrer Elemente eine bestimmte Zahl als Anzahl; diese Zahl wird die Summe von α und β genannt und mit $\alpha + \beta$ bezeichnet; hier zeigt sich sofort, dass, wenn nicht α und β beide endlich sind, $\alpha + \beta$ im Allgemeinen von $\beta + \alpha$ verschieden ist. Das *commutative* Gesetz hört also bereits bei der Addition auf im Allgemeinen gültig zu sein. Es ist nun so einfach, den Begriff der Summe von mehreren in bestimmter Folge gegebenen Summanden, wobei diese Folge selbst eine bestimmt-unendliche sein kann, zu bilden,

*) Was ich bisher in den früheren Nummern dieses Aufsatzes „abzählbar" genannt habe, ist nach der jetzt eingeführten, zugleich verschärften und verallgemeinerten Definition nichts anderes, als Abzählbarkeit *durch* Zahlen der ersten Classe (endliche Mengen) oder *durch* Zahlen der zweiten Classe (Mengen von der ersten Mächtigkeit).

dass ich hier nicht näher darauf einzugehen brauche und ich bemerke daher nur, dass das *associative* Gesetz allgemein sich als gültig erweist. Man hat im Besondern: $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$.

Nimmt man eine durch eine Zahl β bestimmte Succession von lauter gleichen und gleichgeordneten Mengen, bei welchen einzeln die Anzahl der Elemente gleich α ist, so erhält man eine neue *wohlgeordnete* Menge, deren zugehörige Anzahl die Definition für das Product $\beta\alpha$ liefert, wo β der Multiplicator, α der Multiplicandus ist; auch hier findet sich, dass $\beta\alpha$ im Allgemeinen von $\alpha\beta$ verschieden, also das commutative Gesetz auch bei der Multiplication der Zahlen im Allgemeinen ungültig ist. Dagegen findet sich das associative Gesetz auch bei der Multiplication als allgemein herrschend, so dass man hat: $\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma$.

Von den neuen Zahlen zeichnen sich gewisse vor den anderen dadurch aus, dass sie Primzahleigenschaft haben, doch muss letztere hier in etwas bestimmterer Weise charakterisirt werden, indem man unter Primzahl eine solche Zahl α versteht, für welche die Zerlegung: $\alpha = \beta\gamma$, wo β Multiplicator, nicht anders möglich ist, als wenn $\beta = 1$ oder $\beta = \alpha$; dagegen wird im Allgemeinen auch bei Primzahlen α der Multiplicandus einen gewissen Spielraum der Unbestimmtheit haben, was nach der Natur der Dinge nicht abgeändert werden kann. Nichtsdestoweniger soll in einer späteren Abhandlung gezeigt werden, dass die Zerlegung einer Zahl in ihre Primfactoren stets auf eine im Wesentlichen einzige und sogar hinsichtlich der Folge der Factoren (soweit dieselben nicht endliche im Product benachbart auftretende Primzahlen sind) bestimmte Weise erfolgen kann. Dabei stellen sich zwei Arten von bestimmt-unendlichen Primzahlen heraus, von denen die erste den endlichen Primzahlen näher steht, wogegen die Primzahlen der zweiten Art einen ganz andern Charakter haben.

Ferner wird es mir nun mit Hülfe der neuen Erkenntnisse möglich sein, demnächst eine strenge Begründung des in der Abhandlung: „Ein Beitrag zur Mannichfaltigkeitslehre“ (Borchardts J. Bd. 84, pag. 257) am Schlusse derselben angeführten Satzes über die sogenannten linearen unendlichen Mannichfaltigkeiten zu bringen.

In der letzten Nummer (4) dieses Aufsatzes (Bd. XXI, pag. 54) leitete ich für Punktmengen P, die in einem n-dimensionalen stetigen Gebiete enthalten sind, einen Satz her, der sich mit Anwendung der neuen, vorhin definirten Ausdrucksweise, wie folgt aussprechen lässt: „Ist P eine Punktmenge, deren Ableitung $P^{(\alpha)}$ identisch verschwindet, wo α eine beliebige ganze Zahl der *ersten* oder *zweiten* Zahlenclasse ist, so ist die erste Ableitung $P^{(1)}$, und daher auch P selbst, eine Punktmenge von der Mächtigkeit *erster* Classe.“ Es scheint mir höchst merkwürdig, dass sich dieser Satz wie folgt umkehren lässt: „Ist P

eine Punktmenge, deren erste Ableitung $P^{(1)}$ die Mächtigkeit *erster* Classe hat, so giebt es der *ersten* oder *zweiten* Zahlenclasse angehörige ganze Zahlen α, für welche $P^{(\alpha)}$ identisch verschwindet, und es ist von den Zahlen α, für welche diese Erscheinung eintritt, eine die kleinste."

Den Beweis dieses Satzes werde ich in der nächsten Zeit, in Folge einer freundlichen Aufforderung meines hochverehrten Freundes, des Herrn Prof. Mittag-Leffler in Stockholm, in dem ersten Bande des von ihm redigirten neuen mathematischen Journals publiciren. Im Anschlusse hieran wird Herr Mittag-Leffler einen Aufsatz veröffentlichen, in welchem er zeigen wird, wie auf Grund dieses Satzes seinen und des Herrn Prof. Weierstrass Untersuchungen über die Existenz eindeutiger analytischer Functionen mit gegebenen Singularitätsstellen eine erhebliche Verallgemeinerung gegeben werden kann.

§ 4.

Die erweiterte ganze Zahlenreihe kann, wenn es die Zwecke fordern, ohne Weiteres zu einer continuirlichen Zahlenmenge vervollständiget werden, indem man zu jeder ganzen Zahl α alle reellen Zahlen x, die grösser als Null und kleiner als Eins sind, hinzufügt.

Es wird nun vielleicht hieran die Frage geknüpft werden, ob man, da doch auf diese Weise eine bestimmte Erweiterung des reellen Zahlengebietes in das Unendlichgrosse erreicht ist, nicht auch mit gleichem Erfolge bestimmte unendlich kleine Zahlen oder, was auf dasselbe hinauslaufen möchte, endliche Zahlen definiren könnte, welche mit den rationalen und irrationalen Zahlen (die als Grenzwerthe von Reihen rationaler Zahlen auftreten) nicht zusammenfallen, sondern sich an muthmaasslichen Zwischenstellen inmitten der reellen Zahlen ebenso einfügen möchten, wie die irrationalen Zahlen in die Kette der rationalen oder wie die transcendenten Zahlen in das Gefüge der algebraischen Zahlen sich einschieben?

Die Frage der Herstellung solcher Interpolationen, auf welche von einigen Autoren viel Mühe verwandt worden ist, lässt sich, meines Erachtens und wie ich zeigen werde, erst mit Hülfe unsrer neuen Zahlen und namentlich auf Grund des allgemeinen Anzahlbegriffes wohlgeordneter Mengen klar und deutlich beantworten; während die bisherigen Versuche, wie mir scheint, theils auf einer irrthümlichen Verwechslung des Uneigentlich-Unendlichen mit dem Eigentlich-Unendlichen beruhen, theils auf einer durchaus unsicheren, schwankenden Basis ausgeführt worden sind.

Das Uneigentlich-Unendliche ist oft von neueren Philosophen „schlechtes" Unendliche genannt worden, meines Erachtens mit Unrecht, da es sich in der Mathematik und in den Naturwissenschaften als ein sehr gutes, höchst brauchbares Instrument bewährt hat. Die

unendlichkleinen Grössen sind, meines Wissens, bisher überhaupt nur in der Form des Uneigentlich-Unendlichen zum Nutzen ausgebildet und sind als solches aller jener Verschiedenheiten, Modificationen und Beziehungen fähig, welche in der Infinitesimalanalysis sowohl wie in der Functionentheorie gebraucht werden und zum Ausdruck kommen, um dort die reiche Fülle der analytischen Wahrheiten zu begründen. Dagegen müssten alle Versuche, dieses Unendlichkleine gewaltsam zu einem eigentlichen Unendlichkleinen zu machen als zwecklos endlich aufgegeben werden. Wenn anders überhaupt eigentlichunendlichkleine Grössen existiren, d. h. definirbar sind, so stehen sie sicherlich in keinem unmittelbaren Zusammenhange mit den gewöhnlichen, unendlich klein *werdenden* Grössen.

Im Gegensatz zu den erwähnten Versuchen über das Unendlichkleine und zu der Verwechselung der beiden Erscheinungsformen des Unendlichen findet sich eine Ansicht über das Wesen und die Bedeutung der Zahlgrössen vielfach vertreten, nach welcher keine anderen Zahlen als wirklich existirend aufgefasst werden, als die endlichen realen ganzen Zahlen unsrer Zahlenclasse (I).

Höchstens den aus ihnen unmittelbar hervorgehenden rationalen Zahlen wird eine gewisse Realität zugestanden. Was aber die Irrationalen anbetrifft, so soll denselben in der reinen Mathematik eine bloss formale Bedeutung zukommen, indem sie gewissermassen nur als Rechenmarken dazu dienen, Eigenschaften von Gruppen ganzer Zahlen zu fixiren und auf einfache, einheitliche Weise zu beschreiben. Das eigentliche Material der Analysis wird ausschliesslich, dieser Ansicht zufolge, von den endlichen, realen, ganzen Zahlen gebildet und alle in der Arithmetik und Analysis gefundenen oder noch der Entdeckung harrenden Wahrheiten sollen als Beziehungen der endlichen ganzen Zahlen untereinander aufzufassen sein; es wird die Infinitesimalanalysis und mit ihr die Functionentheorie nur insoweit für legalisirt gehalten, wie ihre Sätze sich nachweisbar als unter ganzen endlichen Zahlen herrschende Gesetze deuten lassen. Mit dieser Auffassung der reinen Mathematik, obgleich ich ihr nicht zustimmen kann, sind unstreitig gewisse Vorzüge verbunden, die ich hier hervorheben möchte; spricht doch für ihre Bedeutung auch der Umstand, dass zu ihren Vertretern ein Theil der verdienstvollsten Mathematiker der Gegenwart gehört.

Sind, wie es hier angenommen wird, nur die endlichen ganzen Zahlen wirklich, alle übrigen aber nichts Anderes als Beziehungsformen, so kann verlangt werden, dass die Beweise der analytischen Sätze nach ihrem „zahlentheoretischen Gehalte" geprüft werden und dass man jede Lücke, die sich in ihnen zeigt, nach den Grundsätzen der Arithmetik ausfülle; in der Thunlichkeit solcher Ergänzung wird der wahre Prüfstein für die Aechtheit und vollendete Strenge der Beweise gesehen.

Es ist nicht zu leugnen, dass auf diesem Wege die Begründung vieler Sätze vervollkommnet und auch sonstige methodische Verbesserungen in verschiedenen Theilen der Analysis bewirkt werden können; auch sieht man in der Befolgung der aus jener Anschauung fliessenden Grundsätze eine Sicherung vor jeder Art von Ungereimtheiten oder Fehlern.

Auf diese Weise ist ein bestimmtes, wenn auch ziemlich nüchternes und naheliegendes Princip gesetzt, das als Richtschnur Allen empfohlen wird; es soll dazu dienen, den Flug der mathematischen Speculations- und Conceptionslust in die wahren Grenzen zu weisen, wo sie keine Gefahr läuft, in den Abgrund des „Transcendenten" zu gerathen, dorthin, wo, wie zur Furcht und zum heilsamen Schrecken gesagt wird, „Alles möglich" sein soll. Dies dahingestellt, wer weiss, ob nicht gerade der Gesichtspunkt der Zweckmässigkeit es allein gewesen ist, welcher die Urheber der Ansicht bestimmt hat, sie den aufstrebenden, so leicht durch Uebermuth und Maasslosigkeit in Gefahr kommenden Kräften zum Schutz vor allen Irrthümern als ein wirksames Regulativ zu empfehlen, obgleich ein fruchtbares Princip darin nicht gefunden werden kann; denn die Annahme, dass sie selbst bei Auffindung neuer Wahrheiten von diesen Grundsätzen ausgegangen wären, ist für mich deshalb ausgeschlossen, weil ich, soviel gute Seiten ich diesen Maximen auch abgewinne, sie streng genommen für irrig halten muss; wir verdanken denselben keine wahren Fortschritte und wenn es wirklich genau nach ihnen zugegangen wäre, so würde die Wissenschaft zurückgehalten oder doch in die engsten Grenzen gebannt worden sein. Glücklicherweise stehen die Dinge in Wahrheit nicht so schlimm und die Anpreisung sowohl wie die Befolgung jener unter Umständen und Voraussetzungen nützlichen Regeln sind nie so ganz wörtlich genommen worden; auch hat es bis jetzt auffallenderweise, so viel mir bekannt geworden, an Jemandem gefehlt, der es unternommen hätte, sie vollständiger und besser zu formuliren, als es hier von mir versucht worden ist.

Sehen wir uns in der Geschichte um, so zeigt sich, dass ähnliche Ansichten öfter vertreten waren und schon bei Aristoteles vorkommen. Bekanntlich findet sich im Mittelalter durchgehends bei allen Scholastikern das „infinitum actu non datur" als unumstösslicher, von Aristoteles hergenommener, Satz vertreten. Wenn man aber die Gründe betrachtet, welche Aristoteles[2]) gegen die reale Existenz des Unendlichen vorführt (m. s. z. B. seine „Metaphysik", Buch XI, Cap. 10), so lassen sie sich der Hauptsache nach auf eine Voraussetzung zurückführen, die eine *petitio principii* involvirt, auf die Voraussetzung nämlich, dass es nur endliche Zahlen gebe, was er daraus schloss, dass ihm nur Zählungen an endlichen Mengen bekannt waren. Ich glaube aber oben bewiesen zu haben und es wird sich dies im Folgenden dieser Arbeit

noch deutlicher zeigen, dass eben so bestimmte Zählungen wie an endlichen auch an unendlichen Mengen vorgenommen werden können, vorausgesetzt, dass man den Mengen ein bestimmtes Gesetz giebt, wonach sie zu *wohlgeordneten* Mengen werden. Dass ohne eine solche gesetzmässige Succession der Elemente einer Menge keine Zählung mit ihr vorgenommen werden kann — dies liegt in der Natur des Begriffes *Zählung*; auch bei endlichen Mengen kann eine Zählung nur bei einer bestimmten Aufeinanderfolge der gezählten Elemente ausgeführt werden, es zeigt sich aber hier als eine besondere Beschaffenheit endlicher Mengen, dass das Resultat der Zählung — die *Anzahl* — unabhängig ist von der jeweiligen Anordnung; während bei unendlichen Mengen, wie wir gesehen haben, eine solche Unabhängigkeit im Allgemeinen nicht zutrifft, sondern die Anzahl einer unendlichen Menge eine durch das Gesetz der Zählung *mitbestimmte* unendliche ganze Zahl ist; hierin liegt eben und hierin allein der in der Natur selbst begründete und daher niemals fortzuschaffende wesentliche Unterschied zwischen dem Endlichen und Unendlichen; nimmermehr wird aber um dieses Unterschiedes willen die Existenz des Unendlichen geläugnet, dagegen die des Endlichen aufrecht erhalten werden können; lässt man das Eine fallen, so muss man mit dem Andern auch aufräumen; wo würden wir also auf diesem Wege hinkommen?

Ein anderes von Aristoteles gegen die Wirklichkeit des Unendlichen gebrauchte Argument besteht in der Behauptung, dass das Endliche vom Unendlichen, wenn dieses existirte, aufgehoben und zerstört werden würde, weil die endliche Zahl durch eine unendliche Zahl angeblich vernichtet wird; die Sache verhält sich, wie man im Folgenden deutlich sehen wird, in Wahrheit so, dass zu einer unendlichen Zahl, wenn sie als bestimmt und vollendet gedacht wird, *sehr wohl* eine endliche hinzugefügt und mit ihr vereinigt werden kann, ohne dass hierdurch eine Aufhebung der letzteren bewirkt wird (vielmehr wird die unendliche Zahl durch eine solche Hinzufügung einer endlichen Zahl zu ihr modificirt); nur der umgekehrte Vorgang, die Hinzufügung einer unendlichen Zahl zu einer endlichen, wenn diese zuerst gesetzt wird, bewirkt die Aufhebung der letzteren, ohne dass eine Modification der ersteren eintritt. — Dieser richtige Sachverhalt hinsichtlich des Endlichen und Unendlichen, der von Aristoteles gänzlich verkannt worden ist, dürfte nicht nur in der Analysis, sondern auch in anderen Wissenschaften, namentlich in den Naturwissenschaften zu neuen Anregungen führen.

Zu dem Gedanken, das Unendlichgrosse nicht bloss in der Form des unbegrenzt Wachsenden und in der hiermit eng zusammenhängenden Form der im siebenzehnten Jahrhundert zuerst eingeführten convergenten unendlichen Reihen zu betrachten, sondern es auch in der

bestimmten Form des Vollendetunendlichen mathematisch durch Zahlen zu fixiren, bin ich fast wider meinen Willen, weil im Gegensatz zu mir werthgewordenen Traditionen, durch den Verlauf vieljähriger wissenschaftlicher Bemühungen und Versuche logisch gezwungen worden und ich glaube daher auch nicht, dass Gründe sich dagegen werden geltend machen lassen, denen ich nicht zu begegnen wüsste.

§ 5.

Wenn ich soeben von Traditionen sprach, so verstand ich dieselben nicht blos im engeren Sinne des Erlebten, sondern führe sie auf die Begründer der neueren Philosophie und Naturwissenschaften zurück. Zur Beurtheilung der Frage, um die es sich hier handelt, gebe ich nur einige der wichtigsten Quellen an. Man vergleiche:

Locke, Essay o. h. u. lib. II, cap. XVI und XVII.

Descartes, Briefe und Erläuterungen zu seinen Meditationen; ferner Principia I, 26.

Spinoza, Brief XXIX; cogitata metaph. pars I und II.

Leibniz, Erdmannsche Ausg. pag. 138, 244, 436, 744; Pertzsche Ausg. II, 1 pag. 209; III, 4 pag. 218; III, 5 pag. 307, 322, 389; III, 7 pag. 273*).

Stärkere Gründe, als man sie hier gegen die Einführung unendlicher ganzer Zahlen zusammen findet, können wohl auch heute nicht ersonnen werden; man prüfe daher und vergleiche sie mit den meinigen für dieselben. Eine ausführliche und eingehende Besprechung dieser Stellen und namentlich des höchst bedeutenden, inhaltsvollen Briefes Spinozas an L. Meyer behalte ich mir für eine andere Gelegenheit vor, beschränke mich aber hier auf folgendes.

So verschieden auch die Lehren dieser Schriftsteller sind, in der Beurtheilung des Endlichen und Unendlichen stimmen sie an jenen Stellen im Wesentlichen darin überein, dass zu dem Begriffe einer Zahl die Endlichkeit derselben gehöre, und dass andrerseits das wahre Unendliche oder Absolute, welches in Gott ist, keinerlei Determination gestattet. Was den letzteren Punkt anbetrifft, so stimme ich, wie es nicht anders sein kann, demselben völlig bei, denn der Satz: „omnis determinatio est negatio" steht für mich ganz ausser Frage; dagegen sehe ich im ersteren, wie ich schon oben bei Erörterung der Aristotelischen Gründe gegen das „infinitum actu" gesagt habe, eine petitio principii, welche manche Widersprüche erklärlich macht, die sich bei allen diesen Autoren und namentlich auch bei Spinoza und Leibniz finden. Die Annahme, dass es ausser dem Absoluten durch keine Determination

*) Beachtenswerth ist auch: Hobbes, de corpore cap. VII, 11. Berkeley, Treatise on the princ. of hum. Knowledge, CXXVIII—CXXXI.

Erreichbaren und dem Endlichen keine Modificationen geben sollte, die, obgleich sie nicht endlich, dennoch durch Zahlen bestimmbar und folglich das sind, was ich Eigentlich-Unendliches nenne — diese Annahme finde ich durch nichts gerechtfertigt und sie steht, m. E., sogar im Widerspruch zu gewissen von den beiden letzteren Philosophen aufgestellten Sätzen. Was ich behaupte und durch diese Arbeit, wie auch durch meine früheren Versuche bewiesen zu haben glaube, ist, dass es nach dem Endlichen ein *Transfinitum* (welches man auch *Suprafinitum* nennen könnte), d. i. eine unbegrenzte Stufenleiter von bestimmten Modis giebt, die ihrer Natur nach nicht endlich, sondern unendlich sind, welche aber ebenso wie das Endliche durch bestimmte, wohldefinirte und von einander unterscheidbare Zahlen determinirt werden können. Mit den endlichen Grössen ist daher meiner Ueberzeugung nach das Bereich der definirbaren Grössen nicht abgeschlossen und die Grenzen unseres Erkennens lassen sich entsprechend weiter ausdehnen, ohne dass es dabei nöthig wäre unsrer Natur irgend welchen Zwang anzuthun. An Stelle des in §. 4 besprochenen Aristotelisch-scholastischen Satzes, setze ich daher den andern:

Omnia seu finita seu infinita *definita* sunt et excepto Deo ab intellectu determinari possunt.[3])

Man führt so oft die Endlichkeit des menschlichen Verstandes als Grund an, warum nur endliche Zahlen denkbar sind; doch sehe ich in dieser Behauptung wieder den erwähnten Cirkelschluss. Stillschweigend wird nämlich bei der „Endlichkeit des Verstandes" gemeint, dass sein Vermögen rücksichtlich der Zahlenbildung auf endliche Zahlen beschränkt sei. Zeigt es sich aber, dass der Verstand auch in bestimmtem Sinne unendliche, d. i. *überendliche* Zahlen definiren und von einander unterscheiden kann, so muss entweder den Worten „endlicher Verstand" eine erweiterte Bedeutung gegeben werden, wonach alsdann jener Schluss aus ihnen nicht mehr gezogen werden kann; oder es muss auch dem menschlichen Verstand das Prädicat „unendlich" in gewissen Rücksichten zugestanden werden, was meines Erachtens das einzig Richtige ist. Die Worte „endlicher Verstand", welche man so vielfach zu hören bekommt, treffen, wie ich glaube, in keiner Weise zu; so beschränkt auch die menschliche Natur in Wahrheit ist, vom Unendlichen haftet ihr doch sehr vieles an und ich meine sogar, dass wenn sie nicht in vielen Beziehungen selbst unendlich wäre, die feste Zuversicht und Gewissheit hinsichtlich des Seins des Absoluten, worin wir uns Alle einig wissen, nicht zu erklären sein würde. Und im Besondern vertrete ich die Ansicht, dass der menschliche Verstand eine unbegrenzte Anlage für die stufenweise Bildung von ganzen Zahlenclassen hat, die zu den unendlichen Modis in einer bestimmten Beziehung stehen und deren *Mächtigkeiten* von aufsteigender Stärke sind.

Die Hauptschwierigkeiten in den zwar äusserlich verschiedenartigen, innerlich aber durchaus verwandten Systemen der beiden zuletzt genannten Denker lassen sich, wie ich glaube, auf dem von mir eingeschlagenen Wege der Lösung näher bringen und selbst manche von ihnen schon jetzt befriedigend lösen und aufklären. Es sind dies Schwierigkeiten, welche zu dem späteren Kriticismus mit Veranlassung gegeben haben, der bei all seinen Vorzügen einen ausreichenden Ersatz für die gehemmte Entwickelung der Lehren Spinozas und Leibnizens mir nicht zu gewähren scheint. Denn neben oder an Stelle der mechanischen Naturerklärung, die innerhalb ihrer Sphäre alle Hülfsmittel und Vortheile mathematischer Analyse zur Verfügung hat, von welcher aber die Einseitigkeit und Unzulänglichkeit so treffend durch Kant aufgedeckt worden sind, ist bisher eine mit derselben mathematischen Strenge ausgerüstete, über jene hinausgreifende *organische* Naturerklärung nicht einmal dem Anfange nach getreten; sie kann, wie ich glaube, nur durch Wiederaufnahme und Fortbildung der Arbeiten und Bestrebungen Jener angebahnt werden.

Ein besonders schwieriger Punkt in dem Systeme des Spinoza ist das Verhältniss der endlichen Modi zu den unendlichen Modis; es bleibt dort unaufgeklärt, wieso und unter welchen Umständen sich das Endliche gegenüber dem Unendlichen oder das Unendliche gegenüber dem noch stärker Unendlichen in seiner Selbständigkeit behaupten könne. Das im § 4 bereits berührte Beispiel scheint mir in seiner schlichten Symbolik den Weg zu bezeichnen, auf welchem man der Lösung dieser Frage vielleicht näher kommen kann. Ist ω die erste Zahl der zweiten Zahlenclasse, so hat man: $1 + \omega = \omega$, dagegen $\omega + 1 = (\omega + 1)$, wo $(\omega + 1)$ eine von ω durchaus verschiedene Zahl ist. Auf die *Stellung* des Endlichen zum Unendlichen kommt also, wie man hier deutlich sieht, Alles an; tritt das Erstere vor, so geht es in dem Unendlichen auf und verschwindet darin, *beschcidet* es sich aber und nimmt seinen Platz *hinter* dem Unendlichen, so bleibt es erhalten und verbindet sich mit jenem zu einem neuen, weil modificirten Unendlichen.

§ 6.

Wenn es Schwierigkeiten bereiten sollte *unendlich grosse, abgeschlossene*, unter sich und mit den endlichen Zahlen vergleichbare, unter sich und mit den endlichen Zahlen durch feste Gesetze verbundene ganze Zahlen aufzufassen, so werden diese Schwierigkeiten mit der Wahrnehmung zusammenhängen, dass die neuen Zahlen zwar in vielen Beziehungen den Charakter der früheren, in viel mehr anderen Rücksichten aber eine durchaus eigenartige Natur haben, die es sogar oft mit sich bringt, dass verschiedene Merkmale an einer und der-

selben Zahl sich vereinigt finden, die bei den endlichen Zahlen nie zusammen vorkommen, sondern disparat sind. Findet sich doch schon an einer der im vorigen § citirten Stellen die Ueberlegung, eine unendliche ganze Zahl müsste, falls sie existirte, sowohl eine gerade, wie auch eine ungerade Zahl sein und da diese beiden Merkmale nicht vereinigt auftreten können, so existirt deshalb keine solche Zahl.

Man nimmt hier offenbar stillschweigend an, dass Merkmale, welche an den hergebrachten Zahlen disjunct sind, auch an den neuen Zahlen dieses Verhältniss zu einander haben müssten und schliesst daraus auf die Unmöglichkeit der unendlichen Zahlen. Wem springt hier der Paralogismus nicht in die Augen? Ist denn nicht jede Verallgemeinerung oder Erweiterung von Begriffen mit einem Aufgeben von Besonderheiten verbunden, ja selbst ohne ein solches undenkbar? Hat man nicht erst in neuerer Zeit den für die Entwickelung der Analysis so wichtigen, zu den grössten Fortschritten hinleitenden Gedanken gefasst, die complexen Grössen einzuführen, ohne ein Hinderniss darin zu sehen, dass sie weder positiv noch negativ genannt werden können? Und nur ein ähnlicher Schritt ist es, den ich hier wage; es wird vielleicht sogar dem allgemeinen Bewusstsein viel leichter werden mir zu folgen, als es möglich war von den reellen Zahlen zu den complexen überzugehen; denn die neuen ganzen Zahlen haben, wenn sie sich auch durch intensivere, substanzielle Bestimmtheit vor den hergebrachten auszeichnen, dennoch als Anzahlen durchaus die gleichartige Realität mit diesen gemein, wogegen der Einführung der complexen Grössen sich so lange Schwierigkeiten entgegenstellten, bis man ihre geometrische Repräsentation durch Punkte oder Strecken in einer Ebene nach vielen Mühen gefunden hatte.

Um auf jene Ueberlegung mit dem Gerade- und Ungeradesein noch kurz zurückzukommen, betrachten wir wieder die Zahl ω, um an ihr zu zeigen, wie jene an den endlichen Zahlen unvereinbaren Merkmale hier sich ohne jeglichen Widerspruch beisammen finden. In dem § 3 sind die allgemeinen Definitionen für die Addition und die Multiplication aufgestellt und ich habe hervorgehoben, dass bei diesen Operationen das commutative Gesetz im Allgemeinen keine Gültigkeit hat; hierin erblicke ich einen wesentlichen Unterschied zwischen den unendlichen und endlichen Zahlen. Beachte man noch, dass ich in einem Product $\beta\alpha$ unter β den Multiplicator, unter α den Multiplicandus verstehe. Ohne Weiteres ergeben sich alsdann für ω folgende zwei Formen: $\omega = \omega \cdot 2$ und $\omega = 1 + \omega \cdot 2$. Ihnen gemäss kann also ω sowohl als eine gerade, wie als eine ungerade Zahl aufgefasst werden. Von einem andern Gesichtspunkt, wenn nämlich 2 als Multiplicator genommen wird, liesse sich aber auch sagen, dass ω weder eine gerade noch eine ungerade Zahl ist, weil, wie man leicht beweisen kann, ω weder

in der Form $2 \cdot \alpha$, noch in der Form $2 \cdot \alpha + 1$ sich darstellen lässt. Es hat also in der That die Zahl ω, im Vergleich zu den hergebrachten Zahlen eine ganz eigenartige Natur, da alle diese Merkmale und Eigenschaften in ihr vereinigt sind. Um noch vieles eigenartiger sind die übrigen Zahlen der zweiten Zahlenclasse, wie ich dies später zeigen werde.

§ 7.

Obgleich ich in §. 5 viele Stellen aus Leibniz' Werken angeführt habe, in welchen er sich gegen die unendlichen Zahlen ausspricht, indem er unter Anderm dort sagt: „Il n'y a point de nombre infini ni de ligne ou autre quantité infinie, si on les prend pour des Touts veritables." „L'infini véritable n'est pas une modification, c'est l'absolu; au contraire, dès qu'on modifie on se borne ou forme un fini" (wobei ich ihm in der letzteren Stelle in Bezug auf die erste Aussage zustimme, hinsichtlich der zweiten aber nicht) bin ich doch andrerseits in der glücklichen Lage, Aussprüche desselben Denkers nachweisen zu können, in welchen er gewissermaassen im Widerspruch mit sich selbst für das Eigentlich-Unendliche (vom Absoluten Verschiedene) in der unzweideutigsten Weise sich ausspricht. So sagt er in Erdm. pag. 118:

„Je suis tellement pour l'infini actuel, qu'au lieu d'admettre que la nature l'abhorre, comme l'on dit vulgairement, je tiens qu'elle l'affecte partout, pour mieux marquer les perfections de son Auteur. Ainsi je crois qu'il n'y a aucune partie de la matière qui ne soit, je ne dis pas divisible, mais actuellement divisée; et par conséquent la moindre particelle doit être considerée comme un monde plein d'une infinité de créatures différentes."

Doch den entschiedensten Vertheidiger hat das Eigentlich-Unendliche, wie es uns beispielsweise in den wohldefinirten Punktmengen oder in der Constitution der Körper aus punktuellen Atomen, (ich meine also hier nicht die chemisch-physikalischen, Demokritischen Atome weil ich sie weder im Begriffe noch in der Wirklichkeit für existent halten kann, so viel Nützliches auch mit dieser Fiction bis zu einer gewissen Grenze zu Wege gebracht wird) entgegentritt, in einem höchst scharfsinnigen Philosophen und Mathematiker unseres Jahrhunderts, in Bernhard Bolzano gefunden, der seine betreffenden Ansichten namentlich in der schönen und gehaltreichen Schrift: „Paradoxien des Unendlichen, Leipzig 1851" entwickelt hat, deren Zweck es ist, nachzuweisen, wie die von Skeptikern und Peripatetikern *aller Zeiten* im Unendlichen gesuchten Widersprüche gar nicht vorhanden sind, sobald man sich nur die freilich nicht immer ganz leichte Mühe nimmt, die Unendlichkeitsbegriffe allen Ernstes ihrem wahren Inhalte nach in sich aufzunehmen. In dieser

Schrift findet man daher auch eine in vielen Beziehungen zutreffende Erörterung über das mathematische Uneigentlich-Unendliche, wie es in der Gestalt von Differenzialen erster und höherer Ordnung oder in den unendlichen Reihensummen oder bei sonstigen Grenzprocessen auftritt. Dieses Unendliche (von einigen Scholastikern synkategorematisches Unendliches genannt) ist ein blosser Hülfs- und Beziehungsbegriff unseres Denkens, welcher seiner Definition nach die Veränderlichkeit einschliesst und von dem somit das „datur" niemals im eigentlichen Sinne ausgesagt werden kann.

Es ist sehr bemerkenswerth, dass hinsichtlich dieser Art des Unendlichen keinerlei wesentliche Meinungsverschiedenheit auch unter den Philosophen der Gegenwart herrscht, wenn ich davon absehen darf, dass gewisse moderne Schulen von sogenannten Positivisten oder Realisten [4]) oder Materialisten in diesem *synkategorematischen* Unendlichen, von welchem sie selbst zugeben müssen, dass es kein eigentliches Sein hat, den *höchsten Begriff* zu sehen glauben.

Doch findet sich schon bei Leibniz der im Wesentlichen richtige Sachverhalt an vielen Orten angegeben; denn auf dieses Uneigentlich-Unendliche bezieht sich beispielsweise die folgende Stelle Erdmann pag. 436:

„Ego philosophice loquendo non magis statuo magnitudines infinite parvas quam infinite magnas, seu non magis infinitesimas quam infinituplas. Utrasque enim per modum loquendi compendiosum pro mentis fictionibus habeo, ad calculum aptis, quales etiam sunt radices imaginariae in Algebra. Interim demonstravi, magnum has expressiones usum habere ad compendium cogitandi adeoque ad inventionem; et in errorem ducere non posse, cum pro infinite parvo substituere sufficiat tam parvum quam quis volet, ut error sit minor dato, unde consequitur errorem dari non posse."

Bolzano ist vielleicht der Einzige, bei dem die eigentlich-unendlichen Zahlen zu einem gewissen Rechte kommen, wenigstens ist von ihnen vielfach die Rede; doch stimme ich gerade in der Art, wie er mit ihnen umgeht, ohne eine rechte Definition von ihnen aufstellen zu können, ganz und gar nicht mit ihm überein und sehe beispielsweise die §§ 29—33 jenes Buches als haltlos und irrig an. Es fehlt dem Autor zur wirklichen Begriffsfassung bestimmt-unendlicher Zahlen sowohl der allgemeine *Mächtigkeitsbegriff*, wie auch der präcise *Anzahlbegriff*. Beide treten zwar an einzelnen Stellen ihrem Keime nach in Form von Specialitäten bei ihm auf, er arbeitet sich aber dabei zu der vollen Klarheit und Bestimmtheit, wie mir scheint, nicht durch und daraus erklären sich viele Inconsequenzen und selbst manche Irrthümer dieser werthvollen Schrift.

Ohne die erwähnten beiden Begriffe kommt man meiner Ueber-

zeugung nach in der Mannichfaltigkeitslehre nicht weiter und das Gleiche gilt, wie ich glaube, von den Gebieten, welche unter der Mannichfaltigkeitslehre stehen oder mit ihr die innigste Berührung haben, wie beispielsweise von der modernen Functionentheorie einerseits und von der Logik und Erkenntnisslehre andrerseits. Fasse ich das Unendliche so auf, wie dies von mir hier und bei meinen früheren Versuchen geschehen ist, so folgt daraus für mich ein wahrer Genuss, dem ich mich dankerfüllt hingebe, zu sehen, wie der ganze Zahlbegriff, der im Endlichen nur den Hintergrund der *Anzahl* hat, wenn wir aufsteigen zum Unendlichen sich gewissermassen *spaltet* in zwei Begriffe, in denjenigen der *Mächtigkeit*, welche unabhängig ist von der Ordnung die einer Menge gegeben wird und in den der *Anzahl*, welche nothwendig an eine gesetzmässige Ordnung der Menge gebunden ist, vermöge welcher letztere zu einer *wohlgeordneten Menge* wird. Und steige ich wieder herab vom Unendlichen zum Endlichen, so sehe ich ebenso klar und schön, wie die beiden Begriffe wieder Eins werden und *zusammenfliessen* zum Begriffe der endlichen ganzen Zahl.

§. 8.

Wir können in zwei Bedeutungen von der Wirklichkeit oder Existenz der ganzen Zahlen, der endlichen sowie der unendlichen sprechen; genau genommen sind es aber dieselben zwei Beziehungen, in welchen allgemein die Realität von irgend welchen Begriffen und Ideen in Betracht gezogen werden kann. Einmal dürfen wir die ganzen Zahlen insofern für wirklich ansehen, als sie auf Grund von Definitionen in unserm Verstande einen ganz bestimmten Platz einnehmen, von allen übrigen Bestandtheilen unseres Denkens aufs Beste unterschieden werden, zu ihnen in bestimmten Beziehungen stehen und somit die Substanz unseres Geistes in bestimmter Weise modificiren; es sei mir gestattet diese Art der Realität unsrer Zahlen ihre *intrasubjective* oder *immanente Realität* zu nennen.[5]) Dann kann aber auch den Zahlen insofern Wirklichkeit zugeschrieben werden, als sie für einen Ausdruck oder ein Abbild von Vorgängen und Beziehungen in der dem Intellect gegenüberstehenden Aussenwelt gehalten werden müssen, als ferner die verschiedenen Zahlenclassen (I), (II), (III) u. s. w. Repräsentanten von Mächtigkeiten sind, die in der körperlichen und geistigen Natur thatsächlich vorkommen. Diese zweite Art der Realität nenne ich die *transsubjective* oder auch *transiente Realität* der ganzen Zahlen.

Bei der durchaus realistischen, zugleich aber nicht weniger idealistischen Grundlage meiner Betrachtungen unterliegt es für mich keinem Zweifel, dass diese beiden Arten der Realität stets sich zusammenfinden in dem Sinne, dass ein in der ersteren Hinsicht als

ntexiste zu bezeichnender Begriff immer in gewissen, sogar unendlich vielen Beziehungen auch eine transiente Realität besitzt[6]), deren Feststellung freilich meist zu den mühsamsten und schwierigsten Aufgaben der Metaphysik gehört und oft den Zeiten überlassen werden muss, in welchen die natürliche Entwickelung einer der übrigen Wissenschaften die transiente Bedeutung des in Frage stehenden Begriffs enthüllt.

Dieser Zusammenhang beider Realitäten hat seinen eigentlichen Grund in der *Einheit* des *Alls*, *zu welchem wir selbst mitgehören*. — Der Hinweis auf diesen Zusammenhang hat nun hier den Zweck, eine mir sehr wichtig scheinende Consequenz für die Mathematik daraus herzuleiten, dass nämlich letztere bei der Ausbildung ihres Ideenmaterials *einzig* und *allein* auf die *immanente* Realität ihrer Begriffe Rücksicht zu nehmen und daher *keinerlei* Verbindlichkeit hat, sie auch nach ihrer *transienten* Realität zu prüfen. Wegen dieser ausgezeichneten Stellung, die sie von allen anderen Wissenschaften unterscheidet und die eine Erklärung für die verhältnissmässig leichte und zwanglose Art der Beschäftigung mit ihr liefert, verdient sie ganz besonders den Namen der *freien Mathematik*, eine Bezeichnung, welcher ich, wenn ich die Wahl hätte, den Vorzug vor der üblich gewordenen „reinen" Mathematik geben würde.

Die Mathematik ist in ihrer Entwickelung völlig frei und nur an die selbstredende Rücksicht gebunden, dass ihre Begriffe sowohl in sich widerspruchslos sind, als auch in festen durch Definitionen geordneten Beziehungen zu den vorher gebildeten, bereits vorhandenen und bewährten Begriffen stehen.[7]) Im Besondern ist sie bei der Einführung neuer Zahlen nur verpflichtet, Definitionen von ihnen zu geben, durch welche ihnen eine solche Bestimmtheit und unter Umständen eine solche Beziehung zu den älteren Zahlen verliehen wird, dass sie sich in gegebenen Fällen unter einander bestimmt unterscheiden lassen. Sobald eine Zahl allen diesen Bedingungen genügt, kann und muss sie als existent und real in der Mathematik betrachtet werden. Hierin erblicke ich den in §. 4 angedeuteten Grund, warum man die rationalen, irrationalen und die complexen Zahlen für durchaus ebenso existent anzusehen hat, wie die endlichen positiven ganzen Zahlen.

Es ist, wie ich glaube, nicht nöthig in diesen Grundsätzen irgendeine Gefahr für die Wissenschaft zu befürchten, wie dies von Vielen geschieht; einerseits sind die bezeichneten Bedingungen, unter welchen die Freiheit der Zahlenbildung allein geübt werden kann, derartige, dass sie der Willkür einen äusserst geringen Spielraum lassen; dann aber trägt auch jeder mathematische Begriff das nöthige Correctiv in sich selbst einher; ist er unfruchtbar oder unzweckmässig, so zeigt er es sehr bald durch seine Unbrauchbarkeit und er wird alsdann,

wegen mangelnden Erfolgs, fallen gelassen. Dagegen scheint mir aber jede überflüssige Einengung des mathematischen Forschungstriebes eine viel grössere Gefahr mit sich zu bringen und eine um so grössere, als dafür aus dem Wesen der Wissenschaft wirklich keinerlei Rechtfertigung gezogen werden kann; denn das *Wesen* der *Mathematik* liegt gerade in ihrer *Freiheit*.

Würde mir diese Beschaffenheit der Mathematik nicht aus den erwähnten Gründen sich ergeben haben, so müsste mich doch die ganze Entwickelung der Wissenschaft selbst, wie wir sie in unserm Jahrhundert wahrnehmen, genau zu denselben Ansichten hinführen.

Wären Gauss, Cauchy, Abel, Jacobi, Dirichlet, Weierstrass, Hermite und Riemann verbunden gewesen, ihre neuen Ideen stets einer metaphysischen Controlle zu unterwerfen, wir würden uns fürwahr nicht des grossartigen Aufbaues der neueren Functionentheorie zu erfreuen haben, der, obgleich völlig frei und ohne transeunte Zwecke entworfen und errichtet, dennoch schon jetzt in Anwendungen auf Mechanik, Astronomie und mathematische Physik seine transiente Bedeutung, wie nicht anders zu erwarten war, offenbart; wir würden nicht den grossen Aufschwung in der Theorie der Differentialgleichungen durch Fuchs, Poincaré und viele andere herbeigeführt sehen, wenn diese ausgezeichneten Kräfte durch fremdartige Einflüsse gehemmt und eingeschnürt gewesen wären; und wenn Kummer die folgenreiche Freiheit der Einführung sogenannter „idealer" Zahlen in die Zahlentheorie sich nicht genommen haben würde, wir wären heute nicht in der Lage, die so wichtigen und vorzüglichen algebraischen und arithmetischen Arbeiten Kroneckers und Dedekinds zu bewundern.

So berechtigt daher die Mathematik ist, sich durchaus frei von allen metaphysischen Fesseln zu bewegen, vermag ich doch andrerseits der „angewandten" Mathematik, wie beispielsweise der analytischen Mechanik und der mathematischen Physik dasselbe Recht nicht zuzugestehen; diese Disciplinen sind m. E. in ihren Grundlagen sowohl, wie in ihren Zielen *metaphysisch*; suchen sie sich hiervon frei zu machen, wie dies neuerdings seitens eines berühmten Physikers vorgeschlagen worden ist, so arten sie in eine „Naturbeschreibung" aus, welcher der frische Hauch des freien mathematischen Gedankens ebensowohl, wie die Macht der *Erklärung* und *Ergründung* von Naturerscheinungen fehlen muss.

§ 9.

Bei der grossen Bedeutung, welche den sogenannten reellen, rationalen und irrationalen Zahlen in der Mannichfaltigkeitslehre zukommt, möchte ich es nicht unterlassen, über ihre Definitionen das Wichtigste hier zu sagen. Ich gehe auf die Einführung der rationalen Zahlen

nicht näher ein, da hiervon streng arithmetische Darstellungen vielfach ausgebildet sind; von den mir näher stehenden hebe ich diejenigen von H. Grassmann (Lehrbuch der Arithmetik, Berlin 1861) und J. H. T. Müller (Lehrbuch der allgemeinen Arithmetik, Halle 1855) hervor. Dagegen möchte ich in Kürze die drei mir bekannten und wohl auch im Wesentlichen einzigen Hauptformen der streng arithmetischen Einführung der allgemeinen reellen Zahlen genauer besprechen. Es sind dies *erstens* die Einführungsart, welcher sich Herr Prof. Weierstrass seit vielen Jahren in seinen Vorlesungen über analytische Functionen bedient und von welcher man einige Andeutungen in der Programmabhandlung von Herrn E. Kossak (Die Elemente der Arithmetik, Berlin 1872) finden kann. *Zweitens* hat Herr R. Dedekind in seiner Schrift: Stetigkeit und irrationale Zahlen, Braunschweig 1872 eine eigenartige Definitionsform publicirt und *drittens* ist von mir im Jahre 1871 (Math. Annalen Bd. V, pag. 123) eine Definitionsform angegeben worden, die äusserlich eine gewisse Aehnlichkeit mit der Weierstrass'schen hat, so dass sie von Herrn H. Weber (Zeitschrift für Mathematik und Physik, 27. Jahrg., historisch liter. Abth., pag. 163) mit dieser verwechselt werden konnte; m. E. ist aber diese *dritte*, später auch von Herrn Lipschitz (Grundlagen der Analysis, Bonn 1877) entwickelte Definitionsform die einfachste und natürlichste von allen und man hat an ihr den Vortheil, dass sie sich dem analytischen Calcül am unmittelbarsten anpasst.

Zur Definition einer irrationalen reellen Zahl gehört stets eine wohldefinirte unendliche Menge erster Mächtigkeit von rationalen Zahlen; hierin besteht das Gemeinschaftliche aller Definitionsformen, ihr Unterschied liegt in dem Erzeugungsmoment, durch welches die Menge mit der durch sie definirten Zahl verknüpft ist und in den Bedingungen, welche die Menge zu erfüllen hat, damit sie als Grundlage für die betreffende Zahlendefinition sich eigne.

Bei der *ersten* Definitionsform wird eine Menge positiver rationaler Zahlen a_ν zu Grunde gelegt, die mit (a_ν) bezeichnet werde und welche die Bedingung erfüllt, dass, wie viele und welche auch von den a_ν in endlicher Anzahl summirt werden, diese Summe immer unterhalb einer angebbaren Grenze bleibt. Hat man nun zwei solche Aggregate (a_ν) und (a_ν'), so wird strenge gezeigt, dass sie drei Fälle darbieten können; entweder ist jeder Theil $\frac{1}{n}$ der Einheit in beiden Aggregaten, sofern man ihre Elemente in hinreichender, vergrösserungsfähiger, endlicher Anzahl summirt, stets gleich oft enthalten; oder es ist $\frac{1}{n}$, von einem gewissen n an, in dem ersten Aggregat stets öfter als in dem zweiten, oder drittens es ist $\frac{1}{n}$, von einem gewissen n an, in dem zweiten stets

öfter als in dem ersten enthalten. Diesen Vorkommnissen entsprechend wird, wenn b und b' die durch die beiden Aggregate (a_ν) und (a_ν') zu definirenden Zahlen sind, im ersten Falle $b = b'$, im zweiten $b > b'$, im dritten $b < b'$ gesetzt. Vereinigt man die beiden Aggregate zu einem neuen (a_ν, a_ν'), so giebt dieses die Grundlage für die Definition von $b + b'$; bildet man aber aus den beiden Aggregaten (a_ν) und (a_ν') das neue $(a_\nu \cdot a_\mu')$, in welchem die Elemente die Producte aus allen a_ν in alle a_μ' sind, so wird dieses neue Aggregat zur Grundlage der Definition für das Product bb' genommen.

Man sieht, dass hier das Erzeugungsmoment, welches die Menge mit der durch sie zu definirenden Zahl verknüpft, in der Summenbildung liegt; doch muss als *wesentlich* hervorgehoben werden, dass nur die Summation einer stets endlichen Anzahl von rationalen Elementen zur Anwendung kommt und *nicht* etwa von vornherein die zu definirende Zahl b als die Summe Σa_ν der unendlichen Reihe (a_ν) gesetzt wird; es würde hierin ein *logischer Fehler* liegen, weil vielmehr die Definition der Summe Σa_ν erst durch Gleichsetzung mit der nothwendig vorher schon definirten, fertigen Zahl b gewonnen wird. Ich glaube, dass dieser erst von Herrn Weierstrass vermiedene logische Fehler in früheren Zeiten fast allgemein begangen und aus dem Grunde nicht bemerkt worden ist, weil er zu den seltenen Fällen gehört, in welchen wirkliche Fehler keinen bedeutenderen Schaden im Calcül anrichten können. — Trotzdem hängen, meiner Ueberzeugung nach, mit dem bezeichneten Fehler alle Schwierigkeiten zusammen, welche in dem Begriff des Irrationalen gefunden worden sind, wogegen bei Vermeidung dieses Fehlers die irrationale Zahl mit derselben Bestimmtheit, Deutlichkeit und Klarheit sich in unserm Geiste festsetzt, wie die rationale Zahl.

Die Definitionsform von Herrn Dedekind legt die Gesammtheit aller rationalen Zahlen, diese aber in zwei Gruppen derart getheilt zu Grunde, dass, wenn die Zahlen der ersten Gruppe mit $\mathfrak{A}_\nu$, die der zweiten Gruppe mit $\mathfrak{B}_\mu$ bezeichnet werden, stets $\mathfrak{A}_\nu < \mathfrak{B}_\mu$ ist; eine solche Theilung der rationalen Zahlenmenge nennt Herr Dedekind einen Schnitt derselben, bezeichnet ihn mit $(\mathfrak{A}_\nu \mid \mathfrak{B}_\mu)$ und ordnet ihm eine Zahl b zu. Vergleicht man zwei solche Schnitte $(\mathfrak{A}_\nu \mid \mathfrak{B}_\mu)$ und $(\mathfrak{A}_\nu' \mid \mathfrak{B}_\mu''$ mit einander, so finden sich ebenso wie bei der *ersten* Definitionsform im ganzen *drei* Möglichkeiten, denen entsprechend die durch die beiden Schnitte repräsentirten Zahlen b und b' einander gleich oder $b > b'$ oder $b < b'$ gesetzt werden. Der erste Fall findet, abgesehen von gewissen leicht zu regulirenden Ausnahmen, welche bei dem Rationalsein der zu definirenden Zahlen vorkommen, nur bei völliger Identität der beiden Schnitte statt und hierbei tritt der nicht wegzuleugnende entschiedene Vorzug dieser Definitionsform vor den beiden anderen her-

vor, dass jeder Zahl b nur ein einziger Schnitt entspricht, welchem Umstande aber der grosse Nachtheil gegenübersteht, dass die Zahlen in der Analysis sich *niemals* in der Form von „Schnitten" darbieten, in welche sie erst mit grosser Kunst und Umständlichkeit gebracht werden müssen.

Nun folgen auch hier die Definitionen für die Summe $b + b'$ und das Product bb' auf Grund neuer aus den beiden gegebenen hervorgehenden Schnitte.

Der Nachtheil, der mit der *ersten* und *dritten* Definitionsform verbunden ist, dass nämlich hier dieselben d. h. gleichen Zahlen unendlich oft sich darbieten und somit eine eindeutige Uebersicht über sämmtliche reellen Zahlen nicht unmittelbar erhalten wird, kann mit der grössten Leichtigkeit durch Specialisirung der zu Grunde gelegten Mengen (a_ν) beseitigt werden, indem man irgend eine der bekannten eindeutigen Systembildungen, wie das Decimalsystem oder die einfache Kettenbruchentwickelung heranzieht.

Ich komme nun zu der *dritten* Definitionsform der reellen Zahlen. Auch hier wird eine unendliche Menge rationaler Zahlen (a_ν) von der ersten Mächtigkeit zu Grunde gelegt, von ihr jedoch eine andere Beschaffenheit verlangt, wie bei der Weierstrass'schen Definitionsform; ich fordre, dass nach Annahme einer beliebig kleinen rationalen Zahl ε eine endliche Anzahl von Gliedern der Menge abgeschieden werden kann, so dass die übrig bleibenden paarweise einen Unterschied haben, der seiner absoluten Grösse nach kleiner ist als ε. Jede derartige Menge (a_ν), welche auch durch die Forderung:

$$\lim_{\nu=\infty} (a_{\nu+\mu} - a_\nu) = 0 \quad \text{(bei beliebig gelassenem } \mu\text{)}$$

charakterisirt werden kann, nenne ich eine *Fundamentalreihe* und ordne ihr eine durch sie zu definirende Zahl b zu, für welche man sogar zweckmässig das Zeichen (a_ν) selbst gebrauchen kann, wie dies von Herrn Heine, der in diesen Fragen nach vielen mündlichen Erörterungen sich mir angeschlossen hatte, in Vorschlag gebracht worden ist. (Man vgl. Borchardts J. Bd. 74 pag. 172). Eine solche *Fundamentalreihe* bietet, wie sich streng aus ihrem Begriffe deduciren lässt, drei Fälle dar; entweder es sind ihre Glieder a_ν für hinreichend grosse Werthe von ν kleiner, ihrem absoluten Betrage nach, als eine beliebig vorgegebene Zahl; oder es sind dieselben von einem gewissen ν an grösser als eine bestimmt angebbare positive rationale Zahl ϱ; oder sie sind von einem gewissen ν an kleiner als eine bestimmt angebbare negative rationale Grösse $-\varrho$. In dem ersten Falle sage ich, dass b gleich Null, im zweiten, dass b grösser als Null oder positiv, im dritten, dass b kleiner als Null oder negativ sei.

Nun kommen die Elementaroperationen. Sind (a_ν) und (a_ν') zwei

Fundamentalreihen durch welche die Zahlen b und b' determinirt seien, so zeigt sich, dass auch $(a_\nu \pm a'_\nu)$ und $(a_\nu \cdot a'_\nu)$ *Fundamentalreihen* sind, die also drei neue Zahlen bestimmen, welche mir als Definitionen für die Summe und Differenz $b \pm b'$ und für das Product $b \cdot b'$ dienen.

Ist zudem b von Null verschieden, wofür im Vorhergehenden die Definition gegeben ist, so beweist man, dass auch $\left(\frac{a'_\nu}{a_\nu}\right)$ eine *Fundamentalreihe* ist, deren zugehörige Zahl die Definition für den Quotienten $\frac{b'}{b}$ liefert.

Die Elementaroperationen zwischen einer durch eine Fundamentalreihe (a_ν) gegebenen Zahl b und einer direct gegebenen rationalen Zahl a sind in den soeben festgesetzten eingeschlossen, indem man $a'_\nu = a$, $b' = a$ sein lässt.

Jetzt erst kommen die Definitionen des Gleich-, Grösser- und Kleinerseins zweier Zahlen b und b' (von denen b' auch $= a$ sein kann) und zwar sagt man, dass $b = b'$ oder $b > b'$ oder $b < b'$ ist, je nachdem $b - b'$ gleich Null oder grösser oder kleiner als Null ist.

Nach allen diesen Vorbereitungen ergiebt sich als erster *streng beweisbarer* Satz, dass, wenn b die durch eine Fundamentalreihe (a_ν) bestimmte Zahl ist, alsdann $b - a_\nu$ mit wachsendem ν dem absoluten Betrage nach kleiner wird als jede denkbare rationale Zahl, oder was dasselbe heisst, dass:

$$\lim_{\nu=\infty} a_\nu = b.$$

Man achte wohl auf diesen Cardinalpunct, dessen Bedeutung leicht übersehen werden kann: Bei der *dritten* Definitionsform wird nicht etwa die Zahl b definirt als Grenze der Glieder a_ν einer Fundamentalreihe (a_ν); denn dies würde ein ähnlicher logischer Fehler sein, wie der bei Besprechung der *ersten* Definitionsform hervorgehobene und zwar aus dem Grunde, weil alsdann die Existenz der Grenze $\lim_{\nu=\infty} a_\nu$ präsumirt würde; vielmehr verhält sich die Sache umgekehrt so, dass durch unsere vorangegangenen Definitionen der Begriff b mit solchen Eigenschaften und Beziehungen zu den rationalen Zahlen bedacht worden ist, dass daraus mit logischer Evidenz der Schluss gezogen werden kann: $\lim_{\nu=\infty} a_\nu$ existirt und ist gleich b. Man verzeihe mir hier die Ausführlichkeit, welche ich mit der Wahrnehmung motivire, dass an dieser unscheinbaren Kleinigkeit die Meisten vorübergehen und sich alsdann leicht in Zweifel und Widersprüche mit Bezug auf das Irrationale verstricken, von denen sie bei Beobachtung der hier hervorgehobenen Umstände völlig verschont bleiben würden; denn sie würden alsdann klar erkennen, dass die irrationale Zahl vermöge der ihr *durch die Definitionen gegebenen Beschaffenheit* eine ebenso bestimmte Realität in

unserm Geiste hat, wie die rationale, selbst wie die ganze rationale Zahl und dass man sie nicht erst durch einen Grenzprocess zu *gewinnen* braucht, sondern vielmehr im Gegentheil durch ihren *Besitz* von der Thunlichkeit und Evidenz der Grenzprocesse allgemein überzeugt wird[8]); denn nun erweitert man mit Leichtigkeit den soeben angeführten Satz zu folgendem: Ist (b_ν) irgend eine Menge rationaler oder irrationaler Zahlen mit der Beschaffenheit, dass $\lim_{\nu=\infty}(b_{\nu+\mu} - b_\nu) = 0$, (was auch μ sei), so giebt es eine durch eine Fundamentalreihe (a_ν) bestimmte Zahl b, so dass:

$$\lim_{\nu=\infty} b_\nu = b$$

Es zeigt sich also, dass *dieselben* Zahlen b, welche auf Grund von Fundamentalreihen (a_ν) (ich nenne diese Fundamentalreihen von der *ersten* Ordnung) derart definirt sind, dass sie sich als Grenzen der a_ν ausweisen, auf mannichfache Weisen auch als Grenzen von Reihen (b_ν) darstellbar sind, wo jedes der b_ν durch eine Fundamentalreihe erster Ordnung $(a_\mu^{(\nu)})$ (mit festem ν) definirt ist.

Ich nenne daher eine solche Menge (b_ν), wenn sie die Beschaffenheit hat, dass $\lim_{\nu=\infty}(b_{\nu+\mu} - b_\nu) = 0$ (bei beliebigem μ), eine Fundamentalreihe *zweiter* Ordnung.

Ebenso lassen sich Fundamentalreihen *dritter*, *vierter*, $\cdots$ n^{ter} Ordnung, aber auch Fundamentalreihen α^{ter} Ordnung bilden, wo α eine beliebige Zahl der zweiten Zahlenclasse ist.

Alle diese Fundamentalreihen leisten für die Bestimmung einer reellen Zahl b genau dasselbe, wie die Fundamentalreihen *erster* Ordnung und der Unterschied liegt nur in der complicirteren, ausgebreiteteren Form des Gegebenseins. Nichts destoweniger scheint es mir, wofern man sich auf den Standpunkt der dritten Definitionsform überhaupt stellen will, in hohem Grade angemessen, diesen Unterschied in der bezeichneten Weise zu fixiren, wie ich dies auch am angeführten Orte (Math. Ann. Bd. V, pag. 123) in ähnlicher Weise schon gethan habe. Ich bediene mich deshalb jetzt der Ausdrucksweise: die Zahlengrösse b ist durch eine Fundamentalreihe n^{ter} resp. α^{ter} Ordnung gegeben. Entschliesst man sich hierzu, so erreicht man damit eine ausserordentlich leichtflüssige und zugleich fassliche Sprache, um die Fülle der vielgestaltigen, oft so complicirten Gewebe der Analysis in der allereinfachsten und bezeichnendsten Weise zu beschreiben, womit ein nach meiner Meinung nicht zu unterschätzender Gewinn an Klarheit und Durchsichtigkeit erzielt wird. Ich trete hiermit dem Bedenken entgegen, welches Herr Dedekind in der Vorrede seiner Schrift „Stetigkeit und irrationale Zahlen" hinsichtlich dieser Unterscheidungen ausgesprochen hat; es lag mir nicht entfernt im Sinne, durch die Funda-

mentalreihen zweiter, dritter Ordnung etc. *neue* Zahlen einzuführen, die nicht schon durch die Fundamentalreihen erster Ordnung bestimmbar wären, sondern ich hatte nur die begrifflich verschiedene Form des Gegebenseins im Auge; es geht dies aus einzelnen Stellen meiner Arbeit selbst deutlich hervor.

Auf einen merkwürdigen Umstand möchte ich hierbei aufmerksam machen, dass nämlich in diesen von mir durch Zahlen der ersten und zweiten Zahlenclasse unterschiedenen Ordnungen von Fundamentalreihen, alle überhaupt denkbaren in der Analysis bereits gefundenen oder noch ungefundenen Formen mit dem üblichen Reihencharakter durchaus erschöpft sind, in dem Sinne, dass es Fundamentalreihen deren Ordnungszahl etwa durch eine Zahl der dritten Zahlenclasse bezeichnet werden möchte, gar nicht giebt, wie ich bei anderer Gelegenheit streng beweisen werde.

Ich will nun in Kürze versuchen, die Zweckmässigkeit der *dritten* Definitionsform zu erklären.

Zur Bezeichnung dafür, dass eine Zahl b auf Grund einer Fundamentalreihe (e_ν) irgend welcher Ordnung n oder α gegeben ist, bediene ich mich der Formeln:

$$b \sim (e_\nu) \quad \text{oder} \quad (e_\nu) \sim b.$$

Liegt beispielsweise eine convergente Reihe mit dem allgemeinen Gliede c_ν vor, so ist die nothwendige und hinreichende Bedingung für die Convergenz bekanntlich diese, dass: $\lim\limits_{\nu=\infty} (c_{\nu+1} + \cdots + c_{\nu+\mu}) = 0$ (wo μ beliebig).

Man definirt daher die Summe der Reihe durch die Formel:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \sim \Big(\sum_{n=0}^{\nu} c_n\Big).$$

Sind z. B. alle c_n definirt auf Grund von Fundamentalreihen k^{ter} Ordnung, so gilt ein gleiches von $\sum\limits_{n=0}^{\nu} c_n$ und es tritt uns hier die Summe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ als definirt durch eine Fundamentalreihe $(k+1)^{\text{ter}}$ Ordnung entgegen.

Soll beispielsweise der gedankliche Inhalt des Satzes $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ beschrieben werden, so kann man sich etwa $\frac{\pi}{2}$ und dessen Potenzen gegeben denken durch die Formeln:

$$\frac{\pi}{2} \sim (a_\nu), \quad \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2m+1} \sim (a_\nu^{2m+1}),$$

wo zur Abkürzung gesetzt ist:

$$2\sum_{n=0}^{\nu}\frac{(-1)^n}{2n+1}=a_\nu.$$

Ferner wird sein:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\sim\left(\sum_{m=0}^{\mu}(-1)^m\frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2m+1}}{(2m+1)!}\right),$$

d. h. $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$ ist auf Grund einer Fundamentalreihe zweiter Ordnung definirt, und durch jenen Satz wird also das Gleichsein der rationalen Zahl 1 und einer auf Grund einer Fundamentalreihe zweiter Ordnung gegebenen Zahl $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$ ausgedrückt.

In ähnlicher Weise lässt sich der gedankliche Inhalt complicirterer Formeln, wie beispielsweise derjenigen aus der Theorie der Thetafunctionen präcis und verhältnissmässig einfach beschreiben, — während die Zurückführung unendlicher Reihen auf solche, die aus lauter rationalen Gliedern, zumal mit stets gleichem Vorzeichen, gebildet sind und unbedingt convergiren, meistens mit der grössten Umständlichkeit verbunden ist, die hier bei der *dritten* Definitionsform im Gegensatze zur *ersten* gänzlich vermieden wird und offenbar auch vermieden werden kann, so lange es sich nicht um eine numerische näherungsweise Bestimmung von Reihensummen mittelst rationaler Zahlen, sondern allein um unbedingt scharfe Definitionen derselben sich handelt. Die *erste* Definitionsform scheint mir allerdings nicht so leicht brauchbar zu sein, wenn es sich um die präcise Definition der Summen von Reihen handelt, die nicht unbedingt convergiren, bei denen vielmehr die Anordnung ihrer sowohl positiven wie negativen Glieder eine bestimmt vorgezeichnete ist. Doch selbst bei Reihen mit unbedingter Convergenz wird die Herstellung der Summe, wenn auch letztere unabhängig von der Anordnung ist, nur bei einer bestimmten Anordnung wirklich ausführbar sein; man ist daher auch in solchen Fällen versucht, der *dritten* Definitionsform den Vorzug vor der ersten zu geben. Endlich scheint mir für die *dritte* Definitionsform ihre Verallgemeinerungsfähigkeit auf *überendliche* Zahlen zu sprechen, während eine solche Ausbildung der *ersten* Definitionsform ganz *unmöglich* ist; dieser Unterschied liegt einfach daran, dass bei den überendlichen Zahlen das commutative Gesetz schon bei der Addition im Allgemeinen ungültig ist; die erste Definitionsform ist aber mit diesem Gesetze *untrennbar verknüpft*, sie steht und fällt mit demselben. Doch bei allen Zahlenarten, wo das commutative Additiongesetz gültig ist, erweist sich die *erste* Definitionsform, abgesehen von den bezeichneten Puncten, als ganz vortrefflich.

§ 10.

Der Begriff des „Continuums" hat in der Entwickelung der Wissenschaften überall nicht nur eine bedeutende Rolle gespielt, sondern auch stets die grössten Meinungsverschiedenheiten und sogar heftige Streitigkeiten hervorgerufen. Dies liegt vielleicht daran, dass die ihm zu Grunde liegende Idee in ihrer Erscheinung bei den Dissentirenden einen verschiedenen Inhalt aus dem Grunde angenommen hat, weil ihnen die genaue und vollständige Definition des Begriffs nicht überliefert worden war; vielleicht aber auch, und dies ist mir das Wahrscheinlichste, ist die Idee des Continuums schon von denjenigen Griechen, welche sie zuerst gefasst haben mögen, nicht mit der Klarheit und Vollständigkeit gedacht worden, welche erforderlich gewesen wäre, um die Möglichkeit verschiedener Auffassungen seitens der Nachfolger auszuschliessen. So sehen wir, dass Leukipp, Demokrit und Aristoteles das Continuum als ein Compositum betrachten, welches ex partibus sine fine divisibilibus besteht, dagegen Epikur und Lucretius dasselbe aus ihren Atomen, als endlichen Dingen zusammensetzen, woraus nachmals ein grosser Streit unter den Philosophen entstanden ist, von denen einige dem Aristoteles, andere dem Epikur gefolgt sind; andere wieder statuirten, um diesem Streit fern zu bleiben, mit Thomas von Aquino,[9]) dass das Continuum weder aus unendlich vielen, noch aus einer endlichen Anzahl von Theilen, sondern aus *gar keinen* Theilen bestehe; diese letztere Meinung scheint mir weniger eine Sacherklärung als das stillschweigende Bekenntniss zu enthalten, dass man der Sache nicht auf den Grund gekommen ist und es vorzieht, ihr vornehm aus dem Wege zu gehen. Hier sehen wir den *mittelalterlich-scholastischen Ursprung* einer Ansicht, die wir noch heutigen Tages vertreten finden, wonach das Continuum ein unzerlegbarer Begriff oder auch, wie andere sich ausdrücken, eine reine aprioristische Anschauung sei, die kaum einer Bestimmung durch Begriffe zugänglich wäre; jeder arithmetische *Determinationsversuch* dieses *Mysteriums* wird als ein unerlaubter Eingriff angesehen und mit gehörigem Nachdruck zurückgewiesen; schüchterne Naturen empfangen dabei den Eindruck, als ob es sich bei dem „Continuum" nicht um einen *mathematisch-logischen Begriff* sondern viel eher um ein *religiöses Dogma* handle.

Mir liegt es sehr fern, diese Streitfragen wieder heraufzubeschwören, auch würde mir zu einer genaueren Besprechung derselben in diesem engen Rahmen der Raum fehlen; ich sehe mich nur verpflichtet, den Begriff des Continuums, so logisch-nüchtern wie ich ihn auffassen muss und in der Mannichfaltigkeitslehre ihn brauche, hier möglichst kurz und auch nur mit Rücksicht auf die *mathematische* Mengenlehre zu entwickeln. Diese Bearbeitung ist mir aus dem Grunde nicht leicht

geworden, weil unter den Mathematikern, auf deren Autorität ich mich gern berufe, kein Einziger sich mit dem Continuum in dem Sinne genauer beschäftiget hat, wie ich es hier nöthig habe.

Man hat zwar unter Zugrundelegung einer oder mehrerer reellen oder complexen continuirlichen Grössen (oder, wie ich glaube richtiger mich auszudrücken, continuirlicher Grössenmengen) den Begriff eines von ihnen ein- oder mehrdeutig abhängigen Continuums, d. h. den stetigen Functionsbegriff nach den verschiedensten Richtungen aufs Beste ausgebildet und es ist auf diese Weise die Theorie der sogenannten *analytischen* Functionen, wie auch der allgemeineren Functionen mit ihren höchst merkwürdigen Erscheinungen (wie Nichtdifferentiirbarkeit und Aehnliches) entstanden; aber das *unabhängige* Continuum selbst ist von den mathematischen Autoren nur in jener einfachsten Erscheinungsform vorausgesetzt und keiner eingehenderen Betrachtung unterworfen worden.

Zunächst habe ich zu erklären, dass meiner Meinung nach die Heranziehung des *Zeitbegriffs* oder der *Zeitanschauung* bei Erörterung des viel ursprünglicheren und allgemeineren Begriffs des Continuums nicht in der Ordnung ist; die *Zeit* ist meines Erachtens eine Vorstellung, die zu ihrer deutlichen Erklärung den von ihr unabhängigen Continuitätsbegriff zur Voraussetzung hat und sogar mit Zuhülfenahme desselben weder objectiv als eine Substanz, noch subjectiv als eine nothwendige apriorische Anschauungsform aufgefasst werden kann, sondern nichts Anderes als ein *Hülfs- und Beziehungsbegriff* ist, durch welchen die Relation zwischen verschiedenen in der Natur vorkommenden und von uns wahrgenommenen Bewegungen festgestellt wird. So etwas wie *objective* oder *absolute Zeit* kommt in der Natur nirgends vor und es kann daher auch nicht die *Zeit* als Maass der *Bewegung*, viel eher könnte diese als Maass der *Zeit* angesehen werden, wenn nicht dem Letzteren entgegenstünde, dass die *Zeit* selbst in der bescheidenen Rolle einer *subjectiv nothwendigen apriorischen* Anschauungsform es zu keinem erspriesslichen, unangefochtenen Gedeihen hat bringen können, obgleich ihr seit Kant die Zeit dazu nicht gefehlt haben würde.

Ebenso ist es meine Ueberzeugung, dass man mit der sogenannten *Anschauungsform* des *Raumes* gar nichts anfangen kann, um Aufschluss über das *Continuum* zu gewinnen, da auch der *Raum* und die in ihm gedachten Gebilde nur mit Hülfe eines begrifflich bereits fertigen Continuums denjenigen Gehalt erlangen, mit welchem sie Gegenstand nicht blos ästhetischer Betrachtungen oder philosophischen Scharfsinnes oder ungenauer Vergleiche, sondern nüchtern-exacter mathematischer Untersuchungen werden können.

Somit bleibt mir nichts Anderes übrig, als mit Hülfe der in § 9

definirten reellen Zahlbegriffe einen möglichst allgemeinen rein arithmetischen Begriff eines Punctcontinuums zu versuchen. Als Grundlage dient mir hierbei, wie dies nicht anders sein kann, der n-dimensionale ebene *arithmetische* Raum G_n, d. h. der Inbegriff aller Werthsysteme:

$$(x_1 \mid x_2 \mid \cdots \mid x_n),$$

in welchen jedes x unabhängig von den anderen *alle reellen* Zahlenwerthe von $-\infty$ bis $+\infty$ erhalten kann. Jedes besondere derartige Werthsystem nenne ich einen *arithmetischen* Punct von G_n. Die Entfernung zweier solcher Puncte wird durch den Ausdruck:

$$+\sqrt{(x'_1 - x_1)^2 + (x'_2 - x_2)^2 + \cdots + (x'_n - x_n)^2}$$

definirt und unter einer *arithmetischen* in G_n enthaltenen Punctmenge P jeder gesetzmässig gegebene Inbegriff von Puncten des Raumes G_n verstanden. Die Untersuchung läuft also darauf hinaus, eine scharfe und zugleich möglichst allgemeine Definition dafür aufzustellen, *wann P ein Continuum zu nennen ist.*

Ich habe in Borchardts J. Bd. 84, pag. 242 bewiesen, dass alle Räume G_n, wie gross auch die sogenannte Dimensionenanzahl n sei, *gleiche* Mächtigkeit haben und folglich *ebenso mächtig* sind wie das Linearcontinuum, wie also etwa der Inbegriff aller reellen Zahlen des Intervalles $(0 \cdots 1)$. Es reducirt sich daher die Untersuchung und Feststellung der Mächtigkeit von G_n auf dieselbe Frage, specialisirt auf das Intervall $(0 \cdot\cdot 1)$ und ich hoffe, sie schon bald durch einen strengen Beweis dahin beantworten zu können, dass die gesuchte Mächtigkeit keine andere ist als diejenige unserer zweiten Zahlenclasse (II). Hieraus wird folgen, dass sämmtliche unendliche Punktmengen P entweder die Mächtigkeit der ersten Zahlenclasse (I) oder die Mächtigkeit der zweiten Zahlenclasse (II) haben. Es wird sich auch noch die weitere Consequenz daraus ziehen lassen, dass der Inbegriff aller Functionen von einer oder mehreren Veränderlichen, welche durch eine vorgegebene unendliche Reihenform, gleichviel welche, darstellbar sind, *auch nur* die Mächtigkeit der zweiten Zahlenclasse (II) besitzt und daher *durch* Zahlen der dritten Zahlenclasse (III) *abzählbar* ist.[10]) Dieser Satz wird sich also beispielsweise auf den Inbegriff aller „analytischen", d. h. durch Fortsetzung convergenter Potenzreihen hervorgehender Functionen von einer oder mehreren Veränderlichen oder auf die Menge aller Functionen einer oder mehrerer reellen Veränderlichen beziehen, die durch trigonometrische Reihen darstellbar sind.

Um nun dem allgemeinen Begriff eines innerhalb G_n gelegenen Continuums näher zu kommen, erinnere ich an den Begriff der Ableitung $P^{(1)}$ einer beliebig gegebenen Punktmenge P, wie er zuerst in der Arbeit: Math. Ann. Bd. V, dann in Bd. XV, XVII, XX und XXI

sich entwickelt und zum Begriff einer Ableitung $P^{(\gamma)}$ erweitert findet, wo γ irgend eine ganze Zahl einer der Zahlclassen (I), (II), (III) etc. sein kann.

Es lassen sich nun die Punktmengen P auch nach der Mächtigkeit ihrer ersten Ableitung $P^{(1)}$ in zwei Classen eintheilen. Hat $P^{(1)}$ die Mächtigkeit von (I), so zeigt sich, wie ich in § 3 dieser Schrift schon gesagt habe, dass es eine erste ganze Zahl α der *ersten* oder *zweiten* Zahlenclasse (II) giebt, für welche $P^{(\alpha)}$ verschwindet. Hat aber $P^{(1)}$ die Mächtigkeit der zweiten Zahlenclasse (II), so lässt sich $P^{(1)}$ stets und zwar nur auf einzige Weise in zwei Mengen R und S zerlegen, so dass:

$$P^{(1)} \equiv R + S,$$

wo R und S eine äusserst verschiedene Beschaffenheit haben:

R ist so beschaffen, dass sie durch den wiederholten Ableitungsprocess einer fortwährenden Reduction bis zur Annihilation fähig ist, so dass es immer eine erste ganze Zahl γ der Zahlenclassen (I) oder (II) giebt, für welche:

$$R^{(\gamma)} \equiv 0;$$

solche Punktmengen R nenne ich *reductibel.*

S dagegen ist so beschaffen, dass bei dieser Punktmenge der Ableitungsprocess gar keine Aenderung hervorbringt, indem:

$$S \equiv S^{(1)}$$

und folglich auch:

$$S \equiv S^{(\gamma)}$$

ist; derartige Mengen S nenne ich *perfecte* Punktmengen. Wir können daher sagen: ist $P^{(1)}$ von der Mächtigkeit der zweiten Zahlenclasse (II), so zerfällt $P^{(1)}$ in eine bestimmte *reductible* und eine bestimmte *perfecte* Punktmenge.

Obgleich diese beiden Prädicate „reductibel" und „perfect" in einer und derselben Punktmenge nicht vereinbar sind, so ist doch andrerseits irreductibel nicht soviel wie perfect und ebensowenig imperfect genau dasselbe wie reductibel, wie man bei einiger Aufmerksamkeit leicht sieht.

Die *perfecten* Punktmengen S sind keineswegs immer in ihrem Innern das, was ich in meinen vorhin genannten Arbeiten „überall-dicht" genannt habe[11]); deshalb eignen sie sich auch noch nicht allein zur vollständigen Definition eines Punktcontinuums, wenn man auch sofort zugeben muss, dass letzteres stets eine *perfecte* Menge sein muss.

Es ist vielmehr noch ein Begriff erforderlich, um im Verein mit dem vorhergehenden das Continuum zu definiren, nämlich der Begriff einer *zusammenhängenden* Punktmenge T.

Wir nennen T eine *zusammenhängende* Punktmenge, wenn für je zwei Punkte t und t' derselben, bei vorgegebener beliebig kleiner

Zahl ε immer eine *endliche* Anzahl Punkte $t_1, t_2, \cdots t_\nu$ von T auf mehrfache Art vorhanden sind, so dass die Entfernungen $\overline{tt_1}$, $\overline{t_1t_2}$, $\overline{t_2t_3}, \cdots \overline{t_\nu t'}$ sämmtlich kleiner sind als ε.

Alle uns bekannten geometrischen Punktcontinua fallen nun auch, wie leicht zu sehen, unter diesen Begriff der *zusammenhängenden* Punktmenge; ich glaube aber nun auch in diesen *beiden* Prädicaten „perfect" und „zusammenhängend" die nothwendigen und *hinreichenden* Merkmale eines Punktcontinuums zu erkennen und definire daher ein Punktcontinuum innerhalb G_n als eine *perfect-zusammenhängende Menge.*[12]) Hier sind „perfect" und „zusammenhängend" nicht blosse Worte, sondern durch die vorangegangenen Definitionen aufs schärfste begrifflich charakterisirte, ganz allgemeine Prädicate des *Continuums.*

Die Bolzanosche Definition des Continuums (Paradoxien § 38) ist gewiss nicht richtig; sie drückt einseitig bloss *eine* Eigenschaft des Continuums aus, die aber auch erfüllt ist bei Mengen, welche aus G_n dadurch hervorgehen, dass man sich von G_n irgend eine „isolirte" Punktmenge (man vgl. Math. Ann. Bd. XXI, pag. 51) entfernt denkt; desgleichen ist sie erfüllt bei Mengen, welche aus mehreren getrennten Continuis bestehen; offenbar liegt in solchen Fällen kein Continuum vor, obgleich nach Bolzano dies der Fall wäre: Wir sehen also hier einen Verstoss gegen den Satz: „ad essentiam alicujus rei pertinet id, quo dato res necessario ponitur et quo sublato res necessario tollitur; vel id, sine quo res, et vice versa quod sine re nec esse nec concipi potest."

Ebenso scheint mir aber auch in der Schrift des Herrn Dedekind (Stetigkeit und irrationale Zahlen) nur eine *andere* Eigenschaft des Continuums einseitig hervorgehoben zu sein, diejenige nämlich, welche es mit *allen „perfecten"* Mengen gemeinsam hat.

§ 11.

Es soll nun gezeigt werden, wie man zu den Definitionen der neuen Zahlen geführt wird und auf welche Weise sich die natürlichen Abschnitte in der absolut-unendlichen realen ganzen Zahlenfolge, welche ich *Zahlenclassen* nenne, ergeben. An diese Auseinandersetzung will ich alsdann nur noch die obersten Sätze über die *zweite* Zahlenclasse und ihr Verhältniss zur ersten hinzufügen. Die Reihe (I) der positiven realen ganzen Zahlen $1, 2, 3, \cdots, \nu, \cdots$ hat ihren Entstehungsgrund in der wiederholten Setzung und Vereinigung von zu Grunde gelegten als gleich angesehenen Einheiten; die Zahl ν ist der Ausdruck sowohl für eine bestimmte endliche Anzahl solcher auf einander folgenden Setzungen, wie auch für die Vereinigung der gesetzten Einheiten zu einem Ganzen. Es beruht somit die Bildung der endlichen ganzen realen Zahlen auf dem Princip der Hinzufügung einer Einheit zu einer vorhandenen schon gebildeten Zahl; ich nenne dieses Moment, welches,

wie wir gleich sehen werden, auch bei der Erzeugung der höheren ganzen Zahlen eine wesentliche Rolle spielt das *erste Erzeugungsprincip.* Die Anzahl der so zu bildenden Zahlen ν der Classe (I) ist unendlich und es giebt unter ihnen keine grösste. So widerspruchsvoll es daher wäre, von einer grössten Zahl der Classe (I) zu reden, hat es doch andrerseits nichts Anstössiges, sich eine *neue* Zahl, wir wollen sie ω nennen*), zu denken, welche der Ausdruck dafür sein soll, dass der ganze Inbegriff (I) in seiner natürlichen Succession dem Gesetze nach gegeben sei. (Aehnlich wie ν ein Ausdruck dafür ist, dass eine gewisse endliche Anzahl von Einheiten zu einem Ganzen vereiniget wird.) Es ist sogar erlaubt, sich die neugeschaffene Zahl ω als *Grenze* zu denken, welcher die Zahlen ν zustreben, wenn darunter nichts Anderes verstanden wird, als dass ω die *erste* ganze Zahl sein soll, welche auf alle Zahlen ν folgt, d. h. grösser zu nennen ist, als jede der Zahlen ν. Indem man auf die Setzung der Zahl ω weitere Setzungen der Einheit folgen lässt, erhält man mit Hülfe des *ersten* Erzeugungsprincips die weiteren Zahlen

$$\omega + 1,\ \omega + 2,\ \cdots,\ \omega + \nu,\ \cdots;$$

da man hierbei wieder zu keiner grössten Zahl kommt, so denkt man sich eine neue, die man 2ω nennen kann und welche die erste auf alle bisherigen Zahlen ν und $\omega + \nu$ folgende sein soll; wendet man auf die Zahl 2ω das *erste* Erzeugungsprincip wiederholt an, so kommt man zu der Fortsetzung:

$$2\omega + 1,\ 2\omega + 2,\ \cdots\ 2\omega + \nu,\ \cdots$$

der bisherigen Zahlen.

Die logische Function, welche uns die beiden Zahlen ω und 2ω geliefert hat, ist offenbar verschieden von dem *ersten* Erzeugungsprincip, ich nenne sie das *zweite Erzeugungsprincip* ganzer realer Zahlen und definire dasselbe näher dahin, dass — wenn irgend eine bestimmte Succession definirter ganzer realer Zahlen vorliegt, von denen keine grösste existirt, auf Grund dieses zweiten Erzeugungsprincips eine neue Zahl geschaffen wird, welche als *Grenze* jener Zahlen gedacht, d. h. als die ihnen allen nächst grössere Zahl definirt wird.

Durch combinirte Anwendung beider Erzeugungsprincipien erhält man daher successive die folgenden Fortsetzungen unserer bisher gewonnenen Zahlen:

$$3\omega,\ 3\omega + 1,\ \cdots,\ 3\omega + \nu,\ \cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\mu\omega,\ \mu\omega + 1,\ \cdots,\ \mu\omega + \nu,\ \cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

*) Das Zeichen ∞, welches ich in Nr. 2 dieses Aufsatzes (Bd. XVII, pag. 357) gebraucht habe, ersetze ich von nun an durch ω, weil das Zeichen ∞ schon vielfach zur Bezeichnung von unbestimmten Unendlichkeiten verwandt wird.

Doch wird auch hierdurch kein Abschluss erzielt, weil von den Zahlen $\mu\omega + \nu$ gleichfalls keine die grösste ist.

Das zweite Erzeugungsprincip veranlasst uns daher zur Einführung einer auf alle Zahlen $\mu\omega + \nu$ nächstfolgenden, die ω^2 genannt werden kann, an diese schliessen sich in bestimmter Succession Zahlen:

$$\lambda\omega^2 + \mu\omega + \nu,$$

und man kommt dann unter Befolgung der beiden Erzeugungsprincipien offenbar zu Zahlen von folgender Form:

$$\nu_0\omega^\mu + \nu_1\omega^{\mu-1} \cdots + \nu_{\mu-1}\omega + \nu_\mu;$$

doch treibt uns alsdann das zweite Erzeugungsprincip zum Setzen einer neuen Zahl, welche die diesen Zahlen allen nächst grössere sein soll und passend mit:

$$\omega^\omega$$

bezeichnet wird.

Die Bildung neuer Zahlen hat, wie man sieht, kein Ende; unter Befolgung der *beiden* Erzeugungsprincipe erhält man immer wieder neue Zahlen und Zahlenreihen, die eine völlig bestimmte Succession haben.

Es wird daher zunächst der *Anschein* erweckt, als ob wir uns bei dieser Bildungsweise neuer ganzer bestimmt-unendlicher Zahlen ins *Grenzenlose* hin verlieren müssten, und dass wir ausser Stande seien, diesem endlosen Process einen *gewissen vorläufigen* Abschluss zu geben, um dadurch eine ähnliche Beschränkung zu gewinnen, wie sie in Bezug auf die ältere Zahlenclasse (I) in gewissem Sinne thatsächlich vorhanden war; dort wurde nur von dem *ersten* Erzeugungsprincip Gebrauch gemacht und somit ein Heraustreten aus der Reihe (I) unmöglich. Das *zweite* Erzeugungsprincip musste aber nicht nur über das bisherige Zahlengebiet hinausführen, sondern erweist sich allerdings als ein Mittel, welches im Verein mit dem *ersten* Erzeugungsprincip die Befähigung giebt, *jede Schranke* in der Begriffsbildung der realen ganzen Zahlen zu *durchbrechen*.

Bemerken wir nun aber, dass alle bisher erhaltenen Zahlen und die zunächst auf sie folgenden eine gewisse Bedingung erfüllen, so erweist sich diese Bedingung, *wenn sie als Forderung an alle zunächst zu bildenden Zahlen gestellt wird*, als ein neues, zu jenen beiden hinzutretendes *drittes* Princip, welches von mir *Hemmungs- oder Beschränkungsprincip* genannt wird und das, wie ich zeigen werde, bewirkt, dass die mit seiner Hinzuziehung definirte zweite Zahlenclasse (II) nicht nur eine höhere Mächtigkeit erhält als (I), sondern sogar genau die *nächst höhere*, also *zweite Mächtigkeit*.

Die erwähnte Bedingung, welche jede der bisher definirten unendlichen Zahlen α, wie man sich sofort überzeugt, erfüllt, ist — dass

die Menge der dieser Zahl in der Zahlenfolge vorausgegangenen Zahlen von der Mächtigkeit der ersten Zahlenclasse (I) ist. Nehmen wir z. B. die Zahl ω^ω, so sind die ihr vorausgehenden in der Formel enthalten:

$$\nu_0\omega^\mu + \nu_1\omega^{\mu-1} + \cdots + \nu_{\mu-1}\omega + \nu_\mu,$$

worin μ, ν_0, ν_1, $\cdots$ ν_μ alle endlichen, positiven, ganzen Zahlenwerthe mit Einschluss der Null und mit Ausschluss der Verbindung: $\nu_0 = \nu_1 = \cdots = \nu_\mu = 0$ anzunehmen haben.

Wie bekannt, lässt sich diese Menge in die Form einer einfach unendlichen Reihe bringen und hat also die Mächtigkeit von (I).

Da ferner eine jede Folge von Mengen, von denen jegliche die *erste* Mächtigkeit hat, wenn jene Folge selbst von der *ersten* Mächtigkeit ist, immer wieder eine Menge ergiebt, welche die Mächtigkeit von (I) hat, so ist klar, dass bei Fortsetzung unserer Zahlenfolge man *wirklich zunächst immer wieder nur solche Zahlen* erhält, bei denen jene Bedingung *thatsächlich* erfüllt ist.

Wir definiren daher die zweite Zahlenclasse (II) als *den Inbegriff aller mit Hülfe der beiden Erzeugungsprincipe bildbaren, in bestimmter Succession fortschreitenden Zahlen α:*

$$\omega,\ \omega+1,\ \cdots,\ \nu_0\omega^\mu + \nu_1\omega^{\mu-1} + \cdots + \nu_{\mu-1}\omega + \nu_\mu,\ \cdots,\ \omega^\omega,\ \cdots,\ \alpha\ \cdots$$

welche der Bedingung unterworfen sind, dass alle der Zahl α vorauf-gehenden Zahlen, von 1 *an, eine Menge von der Mächtigkeit der Zahlenclasse* (I) *bilden.*

§ 12.

Das erste, was wir nun zu zeigen haben, ist der Satz, *dass die neue Zahlenclasse* (II) *eine Mächtigkeit hat, welche von derjenigen der ersten Zahlenclasse* (I) *verschieden ist.*

Dieser Satz ergiebt sich aus dem folgenden Satze:

„Ist $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_\nu, \cdots$ *irgend* eine die erste Mächtigkeit habende Menge von verschiedenen Zahlen der *zweiten* Zahlenclasse (so dass wir befugt sind sie in jener einfachen Reihenform (α_ν) anzunehmen), so ist entweder eine von ihnen die grösste, sie sei γ, oder wenn dies nicht der Fall ist, so giebt es eine nicht unter den Zahlen α_ν vorkommende bestimmte Zahl β der zweiten Zahlenclasse (II), so dass β grösser ist als alle α_ν, dass dagegen jede ganze Zahl $\beta' < \beta$ von gewissen Zahlen der Reihe (α_ν) in der Grösse übertroffen wird; die Zahlen γ resp. β können füglich die obere Grenze der Menge (α_ν) genannt werden."

Der Beweis dieses Satzes ist einfach folgender: sei α_{ν_1} in der Reihe (α_ν) die zuerst vorkommende Zahl, welche grösser ist als α_1, α_{ν_2} die zuerst vorkommende, welche grösser als α_{ν_1} ist u. s. f.

Man hat alsdann:

$$1 < \varkappa_2 < \varkappa_3 < \varkappa_4 < \cdots$$

$$\alpha_1 < \alpha_{\varkappa_2} < \alpha_{\varkappa_3} < \alpha_{\varkappa_4} < \cdots$$

und

$$\alpha_\nu < \alpha_{\varkappa_\lambda},$$

sobald

$$\nu < \varkappa_\lambda.$$

Hier kann es nun vorkommen, dass von einer gewissen Zahl $\alpha_{\varkappa_\varrho}$ an alle in der Reihe (α_ν) auf sie folgenden kleiner sind als sie; dann ist sie offenbar die grösste von allen und wir haben: $\gamma = \alpha_{\varkappa_\varrho}$. Andernfalls denke man sich die Menge aller ganzen Zahlen von 1 an, die kleiner sind als α_1, füge zu dieser Menge zunächst die Menge aller ganzen Zahlen, welche $\geqq \alpha_1$ und $< \alpha_{\varkappa_2}$, alsdann die Menge aller Zahlen, welche $\geqq \alpha_{\varkappa_2}$ und $< \alpha_{\varkappa_3}$ u. s. f., so erhält man einen bestimmten Theil succedirender Zahlen unserer ersten beiden Zahlclassen und zwar ist diese Zahlenmenge offenbar von der *ersten* Mächtigkeit und es existirt daher (der Definition von (II) zufolge) eine bestimmte Zahl β des Inbegriffes (II), welche die jenen Zahlen nächst grössere ist. Es ist also $\beta > \alpha_{\varkappa_\lambda}$ und daher auch: $\beta > \alpha_\nu$, weil $\varkappa_\lambda$ immer so gross angenommen werden kann, dass es grösser wird als ein vorgegebenes ν und weil alsdann: $\alpha_\nu < \alpha_{\varkappa_\lambda}$.

Andrerseits sieht man leicht, dass jede Zahl $\beta' < \beta$ von gewissen Zahlen α_{k_ν} der Grösse nach übertroffen wird; womit nun alle Theile des Satzes bewiesen sind.

Hieraus folgt nun der Satz, dass die Gesammtheit aller Zahlen der zweiten Zahlenclasse (II) nicht die Mächtigkeit von (I) hat; denn sonst würden wir uns den ganzen Inbegriff (II) in Form einer einfachen Reihe:

$$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_\nu, \cdots$$

denken können, die nach dem soeben bewiesenen Satze entweder ein grösstes Glied γ haben oder von einer gewissen Zahl β aus (II) hinsichtlich der Grösse aller ihrer Glieder α_ν übertroffen werden würde; im ersten Falle würde die zur Classe (II) gehörige Zahl $\gamma + 1$, im zweiten Falle die Zahl β einerseits zur Classe (II) gehörig sein, andrerseits nicht in der Reihe (α_ν) vorkommen, was bei der vorausgesetzten Identität der Mengen (II) und (α_ν) ein Widerspruch ist; folglich hat die Zahlenclasse (II) eine andere Mächtigkeit als die Zahlenclasse (I).

Dass von den beiden Mächtigkeiten der Zahlenclassen (I) und (II) wirklich die zweite die auf die erste *nächst folgende* ist, d. h. dass zwischen beiden Mächtigkeiten keine anderen existiren, geht mit Bestimmtheit aus einem Satze hervor, den ich sogleich angeben und beweisen will.

Werfen wir jedoch vorher einen Blick rückwärts und vergegenwärtigen uns die Mittel, welche sowohl zu einer Erweiterung des realen ganzen Zahlbegriffs, wie auch zu einer neuen von der ersten verschiedenen Mächtigkeit wohldefinirter Mengen geführt haben, so waren es drei hervorspringende, von einander zu unterscheidende logische Momente, die zur Wirksamkeit kamen. Es sind die *beiden* oben definirten *Erzeugungsprincipe* und ein zu diesen hinzukommendes *Hemmungs-* oder *Beschränkungsprincip*, welches in der Forderung besteht, nur dann mit Hülfe eines der beiden anderen Principe die Schöpfung einer neuen ganzen Zahl vorzunehmen, wenn die Gesammtheit aller vorausgegangenen Zahlen die Mächtigkeit einer, ihrem ganzen Umfange nach bereits verhandenen, definirten Zahlenclasse hat. Auf diesem Wege, mit Beobachtung dieser drei Principe kann man mit der grössten Sicherheit und Evidenz zu immer neuen Zahlenclassen und mit ihnen zu allen in der körperlichen und geistigen Natur vorkommenden, verschiedenen, successive aufsteigenden Mächtigkeiten gelangen und die hierbei erhaltenen neuen Zahlen sind dann immer durchaus von derselben concreten Bestimmtheit und gegenständlichen Realität wie die früheren; ich wüsste daher fürwahr nicht, was uns von dieser Thätigkeit des Bildens neuer Zahlen zurückhalten sollte, sobald es sich zeigt, dass für den Fortschritt der Wissenschaften die Einführung einer neuen von diesen unzähligen Zahlenclassen in die Betrachtungen wünschenswerth oder sogar unentbehrlich geworden ist.

§ 13.

Ich komme nun zu dem versprochenen Nachweise, dass die Mächtigkeiten von (I) und von (II) unmittelbar einander folgen, so dass keine anderen Mächtigkeiten dazwischen liegen.

Wenn man aus dem Inbegriffe (II) nach irgend einem Gesetze eine Menge (α') von verschiedenen Zahlen α' auswählt, d. h. irgend eine in (II) enthaltene Menge (α') sich denkt, so hat eine solche Menge stets Eigenthümlichkeiten die sich in den folgenden Sätzen zum Ausdruck bringen lassen.

„Unter den Zahlen der Menge (α') giebt es immer eine *kleinste*."

„Hat man im Besonderen eine Folge von Zahlen des Inbegriffes (II): $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_\beta, \cdots$, die ihrer Grösse nach fortwährend abnehmen (so dass $\alpha_\beta > \alpha_{\beta'}$ wenn $\beta' > \beta$), so bricht diese Reihe nothwendig mit einer endlichen Gliederzahl ab und schliesst mit der kleinsten der Zahlen; die Reihe kann keine unendliche sein."

Es ist bemerkenswerth, dass dieser Satz, welcher, wenn die Zahlen α_β endliche ganze Zahlen sind, unmittelbar klar ist, sich auch in dem Falle unendlicher Zahlen α_β nachweisen lässt. In der That nach dem vorigen Satze, der aus der Definition der Zahlenreihe (II) sich leicht

ergiebt, ist unter den Zahlen α_ν, wenn man nur diejenigen von ihnen ins Auge fasst, bei denen der Index ν endlich ist, eine kleinste vorhanden; ist diese etwa $= \alpha_\varrho$, so ist einleuchtend, dass, wegen $\alpha_\nu > \alpha_{\nu+1}$, die Reihe α_ν und somit auch die ganze Reihe α_β genau aus ϱ Gliedern bestehen muss, also eine endliche Reihe ist.

Nun erhält man folgenden Fundamentalsatz:

„Ist (α') irgend eine in dem Inbegriffe (II) enthaltene Zahlenmenge, so können nur folgende drei Fälle vorkommen: entweder (α') ist ein endlicher Inbegriff, d. h. besteht aus einer endlichen Anzahl von Zahlen, oder es hat (α') die Mächtigkeit erster Classe oder drittens es hat (α') die Mächtigkeit von (II); Quartum non datur."

Der Beweis lässt sich folgendermaassen einfach führen: sei Ω die erste Zahl der *dritten* Zahlenclasse (III); es sind alsdann sämmtliche Zahlen α' der Menge (α'), weil letztere in (II) enthalten ist, kleiner als Ω.

Wir denken uns nun die Zahlen α' ihrer Grösse nach geordnet; α_ω sei die kleinste unter ihnen, $\alpha_{\omega+1}$ die nächst grössere u. s. f., so erhält man die Menge (α') in der Form einer „wohlgeordneten" Menge α_β, wo β Zahlen unserer natürlichen erweiterten Zahlenreihe von ω an durchläuft; offenbar bleibt hierbei β immer kleiner oder gleich α_β und da $\alpha_\beta < \Omega$, so ist also auch $\beta < \Omega$. Die Zahl β kann also nicht über die Zahlenclasse (II) hinausgehen, sondern verharrt innerhalb des Gebietes derselben; es können daher nur drei Fälle stattfinden: entweder es bleibt β unterhalb einer angebbaren Zahl der Reihe $\omega + \nu$, alsdann ist (α') eine endliche Menge; oder es nimmt β alle Werthe der Reihe $\omega + \nu$ an, bleibt aber unterhalb einer angebbaren Zahl der Reihe (II), alsdann ist (α') offenbar eine Menge von der *ersten* Mächtigkeit; oder drittens es nimmt β auch beliebig grosse Werthe in (II) an, alsdann durchläuft β *alle* Zahlen von (II); in diesem letzten Falle hat der Inbegriff (α_β), d. h. die Menge (α') offenbar die Mächtigkeit von (II); w. z. b. w.

Als unmittelbares Ergebniss des soeben bewiesenen Satzes erscheinen nun die folgenden:

„Hat man irgend eine wohldefinirte Menge M von der Mächtigkeit der Zahlenclasse (II) und nimmt irgend eine unendliche Theilmenge M' von M, so lässt sich der Inbegriff M' entweder in Form einer einfach unendlichen Reihe denken, oder es ist möglich die beiden Mengen M' und M gegenseitig eindeutig auf einander abzubilden."

„Hat man irgend eine wohldefinirte Menge M von der zweiten Mächtigkeit, eine Theilmenge M' von M und eine Theilmenge M'' von M' und weiss man, dass die letztere M'' gegenseitig eindeutig abbildbar ist auf die erste M, so ist immer auch die zweite M' gegenseitig eindeutig abbildbar auf die erste und daher auch auf die dritte."

Ich spreche diesen letzten Satz hier, wegen des Zusammenhanges

mit den vorangehenden, unter der Voraussetzung aus, dass M die Mächtigkeit von (II) hat; offenbar ist er auch dann richtig, wenn M die Mächtigkeit von (I) hat; es scheint mir aber höchst bemerkenswerth und hebe ich es daher ausdrücklich hervor, dass dieser Satz *allgemeine* Gültigkeit hat, gleichviel welche Mächtigkeit der Menge M zukommen mag. Darauf will ich in einer späteren Abhandlung näher eingehen und alsdann das eigenthümliche Interesse nachweisen, welches sich an diesen allgemeinen Satz knüpft.

§ 14.

Ich will nun noch zum Schlusse die Zahlen der zweiten Zahlenclasse (II) und die mit ihnen ausführbaren Operationen einer Betrachtung unterwerfen, wobei ich mich aber bei dieser Gelegenheit nur auf das Nächstliegende beschränken will, indem ich mir die Veröffentlichung eingehender Untersuchungen darüber auf später vorbehalte.

Die Operationen des Addirens und Multiplicirens habe ich in § 1 allgemein definirt und gezeigt, dass sie für die unendlichen ganzen Zahlen im Allgemeinen *nicht* dem commutativen, wohl aber dem associativen Gesetze unterworfen sind; dies gilt also im Besondern auch für die Zahlen der zweiten Zahlenclasse. Hinsichtlich des distributiven Gesetzes, so ist dasselbe nur in der folgenden Form allgemein gültig:

$$(\alpha + \beta)\,\gamma = \alpha\gamma + \beta\gamma$$

(wo $\alpha + \beta$, α, β als Multiplicatoren auftreten),

wie man aus der inneren Anschauung unmittelbar erkennt.

Die Subtraction kann nach zwei Seiten hin betrachtet werden. Sind α und β irgend zwei ganze Zahlen, $\alpha < \beta$, so überzeugt man sich leicht, dass die Gleichung:

$$\alpha + \xi = \beta$$

immer eine und nur eine Auflösung nach ξ zulässt, wo, wenn α und β Zahlen aus (II) sind, ξ eine Zahl aus (I) oder (II) sein wird. Diese Zahl ξ werde gleich $\beta - \alpha$ gesetzt.

Betrachtet man hingegen die folgende Gleichung:

$$\xi + \alpha = \beta$$

so zeigt sich, dass dieselbe oft nach ξ gar nicht lösbar ist, z. B. tritt dieser Fall bei folgender Gleichung ein:

$$\xi + \omega = \omega + 1.$$

Aber auch in denjenigen Fällen, wo die Gleichung: $\xi + \alpha = \beta$ nach ξ lösbar ist, findet es sich oft, dass sie durch unendlich viele Zahlwerthe von ξ befriediget wird; von diesen verschiedenen Auflösungen wird aber immer eine die kleinste sein.

Für diese kleinste Wurzel der Gleichung:

$$\xi + \alpha = \beta,$$

falls letztere überhaupt lösbar ist, wählen wir die Bezeichnung $\underline{\beta}_\alpha$, was also von $\beta - \alpha$, welche letztere Zahl immer vorhanden ist wenn nur $\alpha < \beta$, im Allgemeinen verschieden ist.

Besteht ferner zwischen drei ganzen Zahlen β, α, γ die Gleichung:

$$\beta = \gamma\alpha,$$

(wo γ Multiplicator ist), so überzeugt man sich leicht, dass die Gleichung:

$$\beta = \xi\alpha$$

nach ξ keine andere Auflösung hat als $\xi = \gamma$ und man bezeichnet in diesem Falle γ durch $\frac{\beta}{\alpha}$.

Hingegen findet man, dass die Gleichung:

$$\beta = \alpha\xi$$

(wo ξ Multiplicandus ist), wenn sie überhaupt auflösbar nach ξ ist, oft mehrere und selbst unendlich viele Wurzeln hat, von denen aber eine immer die kleinste ist; diese kleinste der Gleichung: $\beta = \alpha\xi$, falls letztere überhaupt auflösbar ist, genügende Wurzel werde mit:

$$\underline{\frac{\beta}{\alpha}}$$

bezeichnet.

Die Zahlen α der zweiten Zahlenclasse sind zweierlei Art: 1) solche α, welche ein ihnen nächstvorangehendes Glied in der Reihe haben, welches alsdann $\underline{\alpha}_1$ ist, diese Zahlen nenne ich von der ersten Art. 2) solche α, welche ein ihnen nächstvorangehendes Glied in der Reihe nicht haben, für welche also $\underline{\alpha}_1$ nicht existirt; diese Zahlen nenne ich von der *zweiten* Art. Die Zahlen ω, 2ω, $\omega^\nu + \omega$, ω^ω sind beispielsweise von der zweiten Art, dagegen $\omega + 1$, $\omega^2 + \omega + 2$, $\omega^\omega + 3$ von der ersten Art sind.

Dem entsprechend zerfallen auch die Primzahlen der zweiten Zahlenclasse, welche ich allgemein in § 1 definirt, in Primzahlen der zweiten und in solche der ersten Art.

Primzahlen der zweiten Art sind in der Reihenfolge ihres Auftretens in der Zahlenclasse (II) folgende:

$$\omega,\ \omega^\omega,\ \omega^{\omega^\omega},\ \omega^{\omega^{\omega^\omega}},\ \cdots,$$

so dass unter allen Zahlen der Form:

$$\varphi = \nu_0\omega^\mu + \nu_1\omega^{\mu-1} + \cdots + \nu_{\mu-1}\omega + \nu_\mu$$

nur die *eine* Primzahl ω der *zweiten* Art vorhanden ist; man schliesse aber nicht aus dieser verhältnissmässig spärlichen Vertheilung der Primzahlen zweiter Art, dass der Inbegriff von ihnen allen eine geringere Mächtigkeit habe als die Zahlenclasse (II) selbst; es findet sich, dass dieser Inbegriff dieselbe Mächtigkeit hat wie (II).

Die Primzahlen erster Art sind zunächst:

$$\omega + 1,\ \omega^2 + 1,\ \cdots,\ \omega^\mu + 1,\ \cdots$$

Dieses sind die einzigen Primzahlen erster Art, welche unter den soeben mit φ bezeichneten Zahlen vorkommen; die Gesammtheit aller Primzahlen erster Art in (II) hat gleichfalls die Mächtigkeit von (II).

Die Primzahlen der zweiten Art haben eine Eigenschaft, welche ihnen einen ganz aparten Charakter giebt; ist η eine solche Primzahl (zweiter Art), so ist stets $\eta\alpha = \eta$, wenn α irgend eine Zahl kleiner als η ist; daraus folgt, dass, wenn α und β irgend zwei Zahlen sind, die beide kleiner als η, alsdann immer auch das Product $\alpha\beta$ kleiner ist als η.

Beschränken wir uns hier zunächst auf die Zahlen der zweiten Zahlenclasse, welche die Form φ haben, so finden sich für diese folgende Additions- und Multiplicationsregeln. Sei:

$$\varphi = \nu_0 \omega^\mu + \nu_1 \omega^{\mu-1} + \cdots + \nu_\mu$$
$$\psi = \varrho_0 \omega^\lambda + \varrho_1 \omega^{\lambda-1} + \cdots + \varrho_\lambda,$$

wo wir ν_0 und ϱ_0 von Null verschieden voraussetzen.

Addition.

1) Ist $\mu < \lambda$, so hat man:

$$\varphi + \psi = \psi.$$

2) Ist $\mu > \lambda$, so hat man:

$$\varphi + \psi = \nu_0 \omega^\mu + \cdots + \nu_{\mu-\lambda-1} \omega^{\lambda+1} + (\nu_{\mu-\lambda} + \varrho_0)\, \omega^\lambda + \varrho_1 \omega^{\lambda-1} + \varrho_2 \omega^{\lambda-2} + \cdots + \varrho_\lambda.$$

3) Für $\mu = \lambda$ ist:

$$\varphi + \psi = (\nu_0 + \varrho_0)\, \omega^\lambda + \varrho_1 \omega^{\lambda-1} + \cdots + \varrho_\lambda.$$

Multiplication.

1) Ist ν_μ von Null verschieden, so hat man:

$$\varphi\psi = \nu_0 \omega^{\mu+\lambda} + \nu_1 \omega^{\mu+\lambda-1} + \cdots + \nu_{\mu-1} \omega^{\lambda+1} + \nu_\mu \varrho_0 \omega^\lambda + \varrho_1 \omega^{\lambda-1} + \cdots + \varrho_\lambda.$$

Falls $\lambda = 0$ ist das letzte Glied rechterseits: $\nu_\mu \varrho_0$.

2) Ist $\nu_\mu = 0$, so hat man:

$$\varphi\psi = \nu_0 \omega^{\mu+\lambda} + \nu_1 \omega^{\mu+\lambda-1} + \cdots + \nu_{\mu-1} \omega^{\lambda+1} = \varphi\omega^\lambda.$$

Die Zerlegung einer Zahl φ in ihre Primfactoren ist folgende. Hat man:

$$\varphi = c_0 \omega^\mu + c_1 \omega^{\mu_1} + c_2 \omega^{\mu_2} + \cdots + c_\sigma \omega^{\mu_\sigma}$$

wo

$$\mu > \mu_1 > \mu_2 > \cdots > \mu_\sigma$$

und

$$c_0, c_1, \cdots c_\sigma$$

von Null verschiedene positive endliche Zahlen sind, so ist:

$$\varphi = c_0 (\omega^{\mu-\mu_1} + 1)\, c_1 (\omega^{\mu_1-\mu_2} + 1)\, c_2 \cdots c_{\sigma-1} (\omega^{\mu_{\sigma-1}-\mu_\sigma} + 1)\, c_\sigma \omega^{\mu_\sigma};$$

denkt man sich noch $c_0, c_1, \cdots c_{\sigma-1}\, c_\sigma$ nach den Regeln der ersten Zahlenclasse in Primfactoren zerlegt, so hat man alsdann die Zerlegung von φ in Primfactoren; denn die Factoren $\omega^x + 1$, und ω sind, wie oben bemerkt, selbst Primzahlen. Diese Zerlegung von Zahlen der Form φ ist einzig bestimmt, auch hinsichtlich der Reihenfolge der Factoren, wenn man von der Commutabilität der Primfactoren innerhalb der einzelnen c abstrahirt und wenn bestimmt wird, dass der letzte Factor eine Potenz von ω oder gleich Eins sein soll und dass ω nur an der letzten Stelle Factor sein darf. Ueber die Verallgemeinerung dieser Zerlegung in Primfactoren auf beliebige Zahlen α der zweiten Zahlenclasse (II) werde ich bei einer späteren Gelegenheit schreiben.

Anmerkungen.

Zu § 1.

1) *Mannichfaltigkeitslehre.* Mit diesem Worte bezeichne ich einen sehr viel umfassenden Lehrbegriff, den ich bisher nur in der speciellen Gestaltung einer arithmetischen oder geometrischen Mengenlehre auszubilden versucht habe. Unter einer Mannichfaltigkeit oder Menge verstehe ich nämlich allgemein jedes Viele, welches sich als Eines denken lässt, d. h. jeden Inbegriff bestimmter Elemente, welcher durch ein Gesetz zu einem Ganzen verbunden werden kann und ich glaube hiermit etwas zu definiren, was verwandt ist mit dem Platonischen εἶδος oder ἰδέα, wie auch mit dem, was Platon in seinem Dialoge „Philebos oder das höchste Gut" μικτόν nennt. Er setzt dieses dem ἄπειρον, d. h. dem Unbegrenzten, Unbestimmten, welches ich Uneigentlich-unendliches nenne, sowie dem πέρας d. h. der Grenze entgegen und erklärt es als ein geordnetes „Gemisch" der beiden letzteren. Dass diese Begriffe Pythagoreischen Ursprungs sind, deutet Platon selbst an; man vergleiche A. Boeckh, Philolaos des Pythagoreers Lehren. Berlin 1819.

Zu § 4.

2) *Aristoteles.* Man vergleiche die Darstellung Zellers in seinem grossen Werke: „Die Philosophie der Griechen, III. Aufl., II. Theil, 2. Abth. pag. 393 bis 403. Die Auffassung Platons vom Unendlichen ist eine ganz andere, wie die des Aristoteles; denn man vergleiche Zeller II. Theil, 1. Abth. pag. 628—646. Ebenso finde ich für meine Auffassungen Berührungspunkte in der Philosophie des Nicolaus Cusanus. Man vgl.: R. Zimmermann, der Cardinal Nicolaus von Cusa als Vorgänger Leibnizens (Sitzungsberichte d. Wiener Akademie d. Wiss. Jahrg. 1852). Dasselbe bemerke ich in Beziehung auf Giordano Bruno, den Nachfolger des Cusaners. Man vergl. Brunnhofer, Giordano Bruno's Weltanschauung und Verhängniss. Leipzig 1882.

Ein wesentlicher Unterschied besteht aber darin, dass ich die verschiedenen Abstufungen des Eigentlich-unendlichen durch die Zahlenclassen (I), (II), (III) u. s. w. ein für allemal dem Begriffe nach fixire und es erst nun als Aufgabe betrachte, die Beziehungen der überendlichen Zahlen nicht nur mathematisch zu untersuchen, sondern auch allüberall, wo sie in der Natur vorkommen, nachzuweisen und zu verfolgen. Dass wir auf diesem Wege immer weiter, niemals an eine unübersteigbare Grenze, aber auch zu keinem auch nur angenäherten Erfassen des Absoluten gelangen werden, unterliegt für mich keinem Zweifel. Das Absolute kann nur anerkannt, aber nie erkannt, auch nicht annähernd erkannt werden. Denn wie man innerhalb der ersten Zahlenclasse (I) bei jeder noch so grossen endlichen Zahl immer dieselbe Mächtigkeit der ihr grösseren endlichen Zahlen vor sich hat, ebenso folgt auf jede noch so grosse überendliche Zahl irgend einer der höheren Zahlenclassen (II) oder (III) u. s. w. ein Inbegriff von Zahlen und Zahlenclassen, der an Mächtigkeit nicht das Mindeste eingebüsst hat gegen das Ganze des von 1 anfangenden absolut unendlichen Zahleninbegriffs. Es verhält sich damit ähnlich, wie Albrecht von Haller von der Ewigkeit sagt: „ich

zieh' sie ab [die ungeheure Zahl] und Du [die Ewigkeit] liegst ganz vor mir." Die absolut unendliche Zahlenfolge erscheint mir daher in gewissem Sinne als ein geeignetes Symbol des Absoluten; wogegen die Unendlichkeit der ersten Zahlenclasse (I), welche bisher dazu allein gedient hat, mir, eben weil ich sie für eine fassbare Idee (nicht Vorstellung) halte, wie ein ganz verschwindendes Nichts im Vergleich mit Jener vorkommt. Bemerkenswerth erscheint mir auch dieses, dass jede der Zahlenclassen, also auch jede der Mächtigkeiten, einer ganz bestimmten Zahl des absolut-unendlichen Zahleninbegriffs zugeordnet ist und zwar so, dass auch zu jeder überendlichen Zahl γ eine Mächtigkeit vorhanden ist, welche die γ^{te} zu nennen ist; es bilden also auch die verschiedenen Mächtigkeiten eine absolutunendliche Folge. Dies ist um so merkwürdiger, als die Zahl γ, welche die Ordnung einer Mächtigkeit angiebt (falls die Zahl γ eine ihr nächst vorangehende hat) zu den Zahlen derjenigen Zahlenclasse, welche diese Mächtigkeit hat, in einem Grössenverhältniss steht, dessen Kleinheit jeglicher Beschreibung spottet und dies umsomehr, je grösser γ angenommen wird.

Zu § 5.

3) *determinari possunt.* Dem Unbestimmten, Veränderlichen, Uneigentlich-unendlichen, in welcher Form sie auch erscheinen, kann ich kein Sein zuschreiben, denn sie sind nichts als entweder Beziehungsbegriffe oder rein subjective Vorstellungen resp. Anschauungen (imaginationes), in keinem Falle adäquate Ideen. Wenn also nur das Uneigentlich-unendliche in dem Satze „infinitum actu non datur" gemeint wäre, so könnte ich ihn unterschreiben, er wäre aber alsdann ein rein tautologischer. Der Sinn dieses Satzes scheint mir aber an den bezeichneten Quellen vielmehr der zu sein, dass durch ihn die Unmöglichkeit des begrifflichen Setzens einer bestimmten Unendlichkeit ausgesprochen werden soll und in dieser Bedeutung halte ich ihn für falsch.

Zu § 7.

4 *Realisten.* Man findet den positivistischen und realistischen Standpunkt in Bezug auf (das Unendliche beispielsweise in: Dühring, natürliche Dialectik, Berlin 1865, pag. 109—135 und in v. Kirchmann, Katechismus der Philosophie pag. 124 bis 130 auseinandergesetzt. Man vergleiche auch Ueberweg's Anmerkungen zu Berkeley's Abhandl. über d. Princ. der menschlichen Erkenntniss in v. Kirchmann's philosophischer Bibliothek. Ich kann nur wiederholen, dass in der Würdigung des Uneigentlich-unendlichen ich im Wesentlichen mit allen diesen Autoren übereinstimme; der Differenzpunkt liegt nur darin, dass von ihnen dieses synkategorematische Unendliche für das einzige durch „Wendungen" oder Begriffe, und hier sogar durch blosse Beziehungsbegriffe fassbare Unendliche angesehen wird. Die Beweise Dühring's gegen das Eigentlich-unendliche könnten mit viel weniger Worten geführt werden und scheinen mir entweder darauf hinauszulaufen, dass die bestimmte endliche Zahl, wenn sie auch noch so gross gedacht wird, niemals eine unendliche sein kann, was aus ihrem Begriff unmittelbar folgt oder darauf, dass die veränderliche unbeschränkt grosse endliche Zahl nicht mit dem Prädicate der Bestimmtheit und daher auch nicht mit dem Prädicate des Seins gedacht werden kann, was wiederum aus dem Wesen der Veränderlichkeit unmittelbar sich ergiebt. Dass hiermit gegen die Denkbarkeit bestimmter überendlicher Zahlen nicht das Geringste ausgemacht sei, ist für mich nicht zweifelhaft; und dennoch werden jene Beweise für Beweise gegen die Realität überendlicher Zahlen gehalten. Mir erscheint diese Argumentation ähnlich wie wenn man daraus, dass es unzählig viele Intensitäten des Grünen giebt, schliessen wollte,

dass es kein Rothes geben könne. Merkwürdig ist es aber allerdings, dass Dühring auf pag. 126 seiner Schrift selbst zugesteht, dass für die Erklärung der „Möglichkeit der unbeschränkten Synthesis" ein Grund vorhanden sein muss, den er als „begreiflicher Weise völlig unbekannt" bezeichnet. Hierin liegt, wie mir scheint, ein Widerspruch.

Ebenso finden wir aber auch, dass dem Idealismus nahestehende oder selbst ihm ganz huldigende Denker den bestimmt-unendlichen Zahlen jede Berechtigung versagen.

Chr. Sigwart in seinem ausgezeichneten Werke: Logik, II. Bd. Die Methodenlehre (Tübingen 1878) argumentirt ganz ebenso wie Dühring und sagt auf pag. 47: „eine unendliche Zahl ist eine Contradictio in adjecto".

Aehnliches findet sich bei Kant und J. F. Fries; man vergleiche des letzteren: System der Metaphysik (Heidelberg 1824) in § 51 u. § 52. Auch die Philosophen der Hegel'schen Schule lassen die eigentlich-unendlichen Zahlen nicht gelten; ich führe nur das verdienstvolle Werk von K. Fischer an, sein System der Logik und Metaphysik oder Wissenschaftslehre, 2. Aufl. (Heidelberg 1865) pag. 275.

Zu § 8.

5) Was ich hier intrasubjective oder immanente Realität von Begriffen oder Ideen nenne, dürfte mit der Bestimmung „adäquat" in derjenigen Bedeutung, wie dieses Wort von Spinoza gebraucht wird, übereinstimmen, indem er sagt: Eth. pars II def. IV, „Per ideam adaequatam intelligo ideam, quae, quatenus in se sine relatione ad objectum consideratur, omnes verae ideae proprietates sive denominationes intrinsecas habet."

6) Diese Ueberzeugung stimmt im Wesentlichen sowohl mit den Grundsätzen des Platonischen Systems, wie auch mit einem wesentlichen Zuge des Spinoza-schen Systems überein; in ersterer Beziehung verweise ich auf Zeller, Philos. d. Griechen, 3. Aufl. 2. Theil 1. Abth. pag. 541—602. Es heisst hier gleich im Anfange des Abschnittes: „Nur das begriffliche Wissen soll (nach Plato) eine wahre Erkenntniss gewähren. So viel aber unsern Vorstellungen Wahrheit zukommt — diese Voraussetzung theilt Plato mit andern (Parmenides) — ebensoviel muss ihrem Gegenstand Wirklichkeit zukommen, und umgekehrt. Was sich erkennen lässt, ist, was sich nicht erkennen lässt, ist nicht, und in demselben Masse, in dem etwas ist, ist es auch erkennbar."

Hinsichtlich Spinozas brauche ich nur an seinen Satz in Ethik, pars II, prop. VII zu erinnern: „ordo et connexio idearum idem est ac ordo et connexio rerum."

Auch in der Leibnizschen Philosophie lässt sich dasselbe erkenntnisstheoretische Princip nachweisen. Erst seit dem neueren Empirismus, Sensualismus und Skepticismus, sowie dem daraus hervorgegangenen Kantischen Kriticismus glaubt man die Quelle des Wissens und der Gewissheit in die Sinne oder doch in die sogenannten reinen Anschauungsformen der Vorstellungswelt verlegen und auf sie beschränken zu müssen; meiner Ueberzeugung nach liefern diese Elemente durchaus keine sichere Erkenntniss, weil letztere nur durch Begriffe und Ideen erhalten werden kann, die von äusserer Erfahrung höchstens angeregt, der Hauptsache nach durch innere Induction und Deduction gebildet werden als Etwas, was in uns gewissermassen schon lag und nur geweckt und zum Bewusstsein gebracht wird.

Zu § 8, 7 und § 9, 8.

Der Vorgang bei der correcten Bildung von Begriffen ist m. E. überall derselbe; man setzt ein eigenschaftsloses Ding, das zuerst nichts anderes ist, als ein

Name oder ein Zeichen A und giebt demselben ordnungsmässig verschiedene, selbst unendlich viele verständliche Prädicate, deren Bedeutung an bereits vorhandenen Ideen bekannt ist und die einander nicht widersprechen dürfen; dadurch werden die Beziehungen von A zu den bereits vorhandenen Begriffen und namentlich zu den verwandten bestimmt; ist man hiermit vollständig zu Ende, so sind alle Bedingungen zur Weckung des Begriffes A, welcher in uns geschlummert, vorhanden und er tritt fertig ins Dasein, versehen mit der intrasubjectiven Realität, welche überall von Begriffen nur verlangt werden kann; seine transiente Bedeutung zu constatiren ist alsdann Sache der Metaphysik.

Zu § 10.

9) Thomas von Aquino, Opuscula, XLII de natura generis, cap. 19 et 20; LII de natura loci; XXXII de natura materiae et de dimensionibus interminâtis. Man vergleiche: C. Jourdin, la Philosophie de Saint Thomas d'Aquin, pag. 303—329; K. Werner, der heilige Thomas von Aquino (Regensburg 1859), 2. Bd. p. 177—201.

10) Selbst der Inbegriff aller stetigen, aber auch derjenige aller integrirbaren Functionen einer oder mehrerer Veränderlichen dürfte nur die Mächtigkeit der zweiten Zahlenclasse (II) haben; lässt man jedoch alle Beschränkungen fallen und betrachtet den Inbegriff aller stetigen und unstetigen Functionen einer oder mehrerer Veränderlichen, so hat diese Menge die Mächtigkeit der dritten Zahlenclasse (III).

11) Von den perfecten Mengen lässt sich der Satz beweisen, dass sie die Mächtigkeit von (I) niemals haben.

Als ein Beispiel einer perfecten Punctmenge, die in keinem noch so kleinen Intervall überall dicht ist, führe ich den Inbegriff aller reellen Zahlen an, die in der Formel:

$$z = \frac{c_1}{3} + \frac{c_2}{3^2} + \cdots + \frac{c_\nu}{3^\nu} + \cdots$$

enthalten sind, wo die Coefficienten c_ν nach Belieben die beiden Werthe o und 2 anzunehmen haben und die Reihe sowohl aus einer endlichen, wie aus einer unendlichen Anzahl von Gliedern bestehen kann.

12) Man beachte, dass diese Definition eines Continuums frei ist von jedem Hinweis auf das, was man die Dimension eines stetigen Gebildes nennt; die Definition umfasst nämlich auch solche Continua, die aus zusammenhängenden Stücken verschiedener Dimension, wie Linien, Flächen, Körper etc. bestehen. Bei einer späteren Gelegenheit will ich zeigen, wie man von diesem allgemeinen Continuum zu den specielleren Continuis mit bestimmter Dimension ordnungsmässig hinkommt. Ich weiss sehr wohl, dass das Wort „*Continuum*" in der Mathematik eine *feste* Bedeutung bisher *nicht* angenommen hat; es wird daher meine Definition desselben von Einigen als zu *eng*, von Anderen als zu *weit* beurtheilt werden; hoffentlich ist es mir gelungen, dabei die *richtige Mitte* zu finden.

Nach meiner Auffassung kann unter einem *Continuum nur* ein *perfectes* und *zusammenhängendes* Gebilde verstanden werden. Darnach sind beispielsweise eine gerade Strecke, welcher der eine oder beide Endpunkte fehlen, desgleichen eine Kreisfläche, von welcher die Begrenzung ausgeschlossen ist, keine *vollkommenen* Continua; ich nenne derartige Punktmengen *Semicontinua*.

Allgemein verstehe ich unter einem *Semicontinuum* eine *imperfecte, zusammenhängende* und zur *zweiten Classe* gehörige Punktmenge, welche so beschaffen ist, dass je zwei Punkte desselben durch ein *vollkommenes* Continuum, welches ein Bestandtheil der Punktmenge ist, verbunden werden können. So ist z. B. der in

Bd. XX, pag. 119 der Math. Annalen von mir mit $\mathfrak{A}$ bezeichnete Raum, welcher aus G_n durch Entfernung irgend einer Punktmenge *erster* Mächtigkeit entsteht, ein *Semicontinuum*.

Die *Ableitung* einer zusammenhängenden Punktmenge ist *stets* ein *Continuum*, wobei es gleichgültig ist, ob die zusammenhängende Punktmenge die *erste* oder *zweite* Mächtigkeit hat.

Ist eine zusammenhängende Punktmenge von der *ersten* Mächtigkeit, so kann ich sie *weder* ein Continuum *noch* ein Semicontinuum nennen.

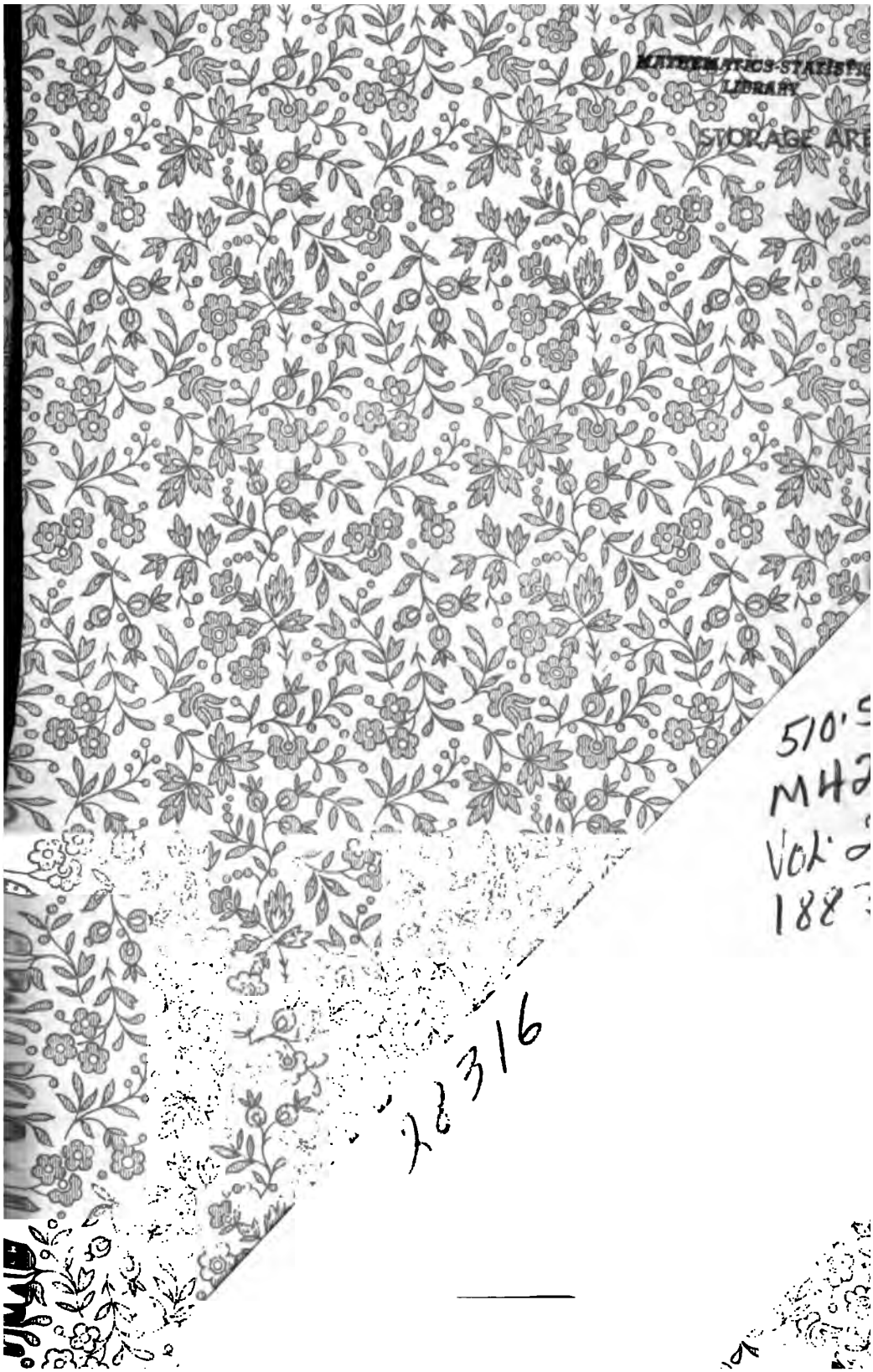
Durch die von mir an die Spitze der Mannichfaltigkeitslehre gestellten Begriffe mache ich mich anheischig, die sämmtlichen Gebilde der algebraischen sowohl wie der transcendenten Geometrie nach allen ihren Möglichkeiten zu erforschen, wobei die Allgemeinheit und Schärfe der Resultate von keiner andern Methode übertroffen werden dürften.

Bei dieser Gelegenheit möchte ich einige Druckfehler und Auslassungen in den früheren Nummern 1, 3, 4 dieses Aufsatzes berichtigen.

In No. 1. Bd. XV, pag. 6 in der 15. Z. v. o. l. „Reihe" statt „Reihen". In No. 3 Bd. XX, pag. 114 in d. 26. Z. v. o. ist zwischen „a" und „Punkte" der Relativsatz einzuschieben: „welches mit a gleiche Dimensionenzahl hat." In No. 4. Bd. XXI, pag. 56 in der 1. Z. v. o. ist zw. die Worte „dagegen" und „ausserhalb" der Relativsatz einzuschieben: „falls nicht c und d isolirte Punkte von Q sind"; ebendas. in der 4. Z. ist zw. „d" und „selbst" der Satz einzufügen: „auch im letzteren Falle".

Halle, October 1882.

To avoid fine, this book should be returned on
or before the date last stamped below
PHYSICS & MATH - STAT.
20M-2-60-92874
MAR 2 8 1983
NOV 1 4 1991


MATHEMATICS-STATISTICS
LIBRARY
STORAGE AREA
510.5
MH2
Vol. 2
1887
23316